Math f. 39h

Birckenstein

4°

Ac 185.

<36614141190015

<36614141190015

Bayer. Staatsbibliothek

Math P. 39 h

Birckenstein

4°

~~No 183.~~

<36614141190015

<36614141190015

Bayer. Staatsbibliothek

Mathesis. Geometria generalis 284.

R

Teutsch-
Redender Euclides.

Oder:

Acht Bücher,
Von denen Anfängen
Der
ad Conv. monat. O. Cist. S. Aug.

Reck-Kunst,

Auf eine neue und gantz leichte Art,
Zum Nutzen
Allen Generalen, Ingeniern, Natur- und Warheit-Kündigern, Bau-Meistern, Künstlern ꝛc.
In Teutscher Sprach eingerichtet und bewiesen;
Durch
Ant. Ernst Burckh. von Pirckenstein.

Wien in Oesterreich.
In Verlegung Peter Conrad Monaths.
Im Jahr 1744.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede des Authors
An den
Günstigen Leser.

DB zwar bißhero viel Euclidische Bücher, in verschiedenen Sprachen und Beweiß-Arten beschrieben, heraus gekommen sind; so glaube doch, daß deren noch keines also beschaffen, als gegenwärtiges, anzutreffen seyn werde: dann man sich hierinnen nicht wenig beflissen hat, aller Orten die mittelmässige Kürtze und Deutlichkeit deren sonst schweren Vorgaben, nebst denen gehörigen Figuren und beqvemen Druck, also einzurichten, daß nicht allein der Gelehrte, sondern auch derjenige, welcher nur lesen kan, diese Eucli-

dische Vorgaben leichtlich fassen, und innerhalb kurtzer Zeit verstehen mag.

Von denen funffzehen Büchern, so Euclides von denen Anfängen der Meß-Kunst geschrieben, habe ich nur acht Bücher, als nöthige, für dißmahl heraus gegeben, die übrigen, weilen sie von einer gantz andern Materie, nemlich von der abgesonderten Grösse, handeln, habe biß auf eine gelegene Zeit mit Fleiß zuruck halten wollen.

Nun wünsche ich nichts mehr, als nur allein, daß unsere Teutsche auch hierinnen der Ausländischen Völcker Moden nachfolgen, und die Mathematische Wissenschafften, gleich ihnen, erlernen, und zu Nutzen ihres Herrns und Vatterlandes anwenden möchten, nicht zweifflend, daß hierdurch unsere Kriegs- und Friedens-Künste und Wissenschafften viel auf eine höhere Staffel folgends gelangen und uns glückseeliger machen sollten.

Das

Das

Erste Buch

Des Teutsch-redenden

Euclides.

Ausleg- oder Erklärung der Zeichen.

∠	bedeutet	Ein Winckel und Ecke.
∥		Parallel- oder gleich weit lauffende Linien.
⊥		Perpendicular, oder Bleyrechte Linie
=		Gleich oder Gleichheit, oder, ist gleich.
⊓		Ist gröſſer, länger.
⊔		Ist kleiner, kürtzer.
+		Mehr, mit, oder Zusammensetzung mit einander.
−		Weniger, ohne, oder Abzug.
x		Vermehrung, Multiplication.
△		Triangel, Drey-Eck, dreyseitige Figur.
□		Quadrat, gleich vierseitige Figur, Vier-Eck.
▭		Parallelogramm, Winckelrechte ablange Vierung.
⊟		Cubus, Würffel, und auch ein Parallelepipedum.

Zu einem Beyspiel.

Man solte schreiben, der Winckel A. ist gleich dem ∠ B. und die Linie C. D. seye Parallel der Linie E. F. so setzt man bloß:

Der ∠. A. ist ⊓ dem ∠. B. und C. D. ist = E. F.

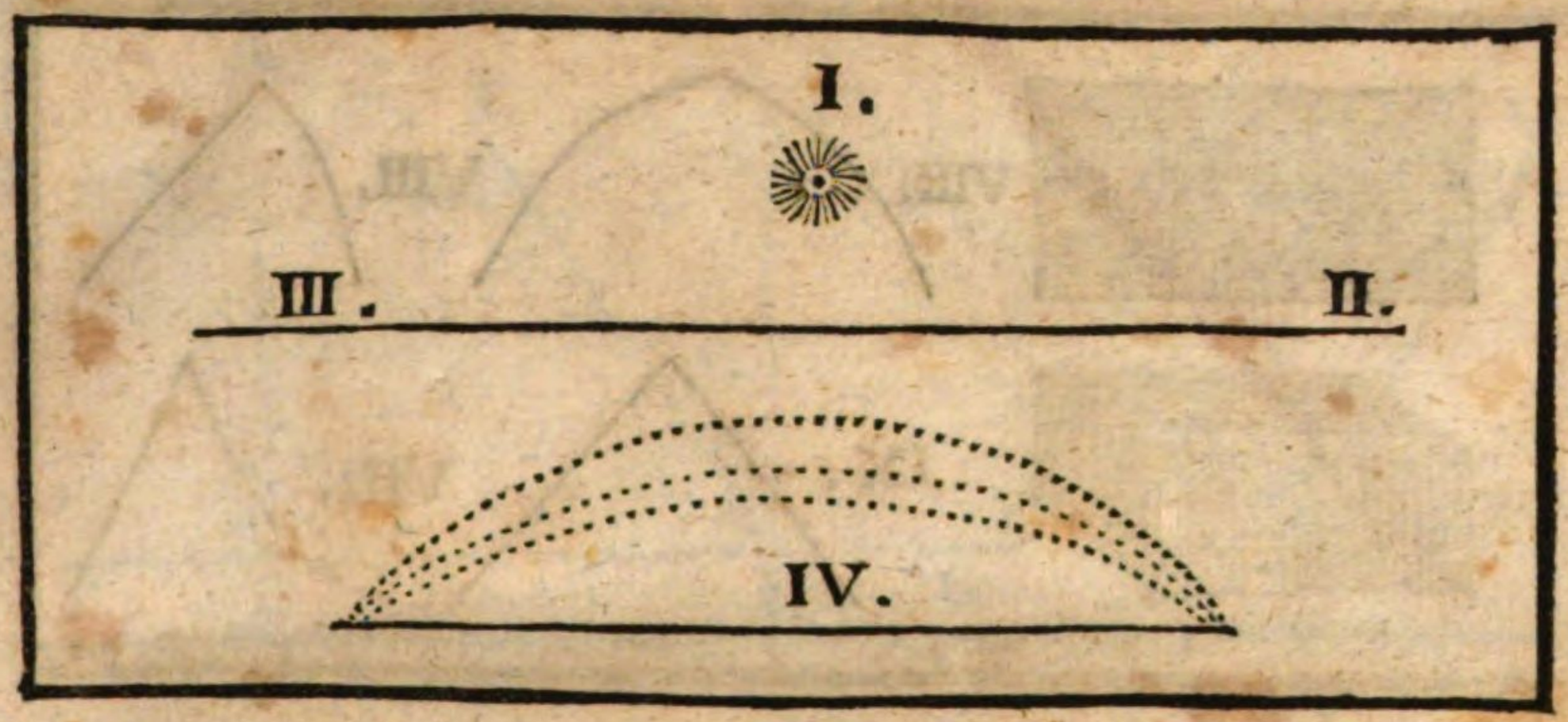
Item das Parallelogramm ist gröſſer als der Triangel F G H.

Viel kleiner aber, als das Quadrat M N. so stehet es also:

Das ▭ ist ⊓, als der △ F G H, viel ⊐ aber, als das □ M N.

Letzlich der Winckel A sambt denen Winckeln B, und C, und D. ist gleich dem Winckel E. sambt dem Winckel F. stehet also geschrieben

Der ∠ A + B + C + D + E ist ⊓ dem ∠ E + F.



Wort-Erklärungen.

I.

DEr Punct ist ein Tüpffelein, das in seiner Grösse unzertheilig ist, oder in welchem wir allhier keine Theile zu betrachten haben. Fig. I.

Gleich wie Eins aller Zahlen, also ist der Punct ein Anfang aller Grösse.

II.

Eine Linie, oder Strich, ist eine Länge ohne Breite. Fig. II.

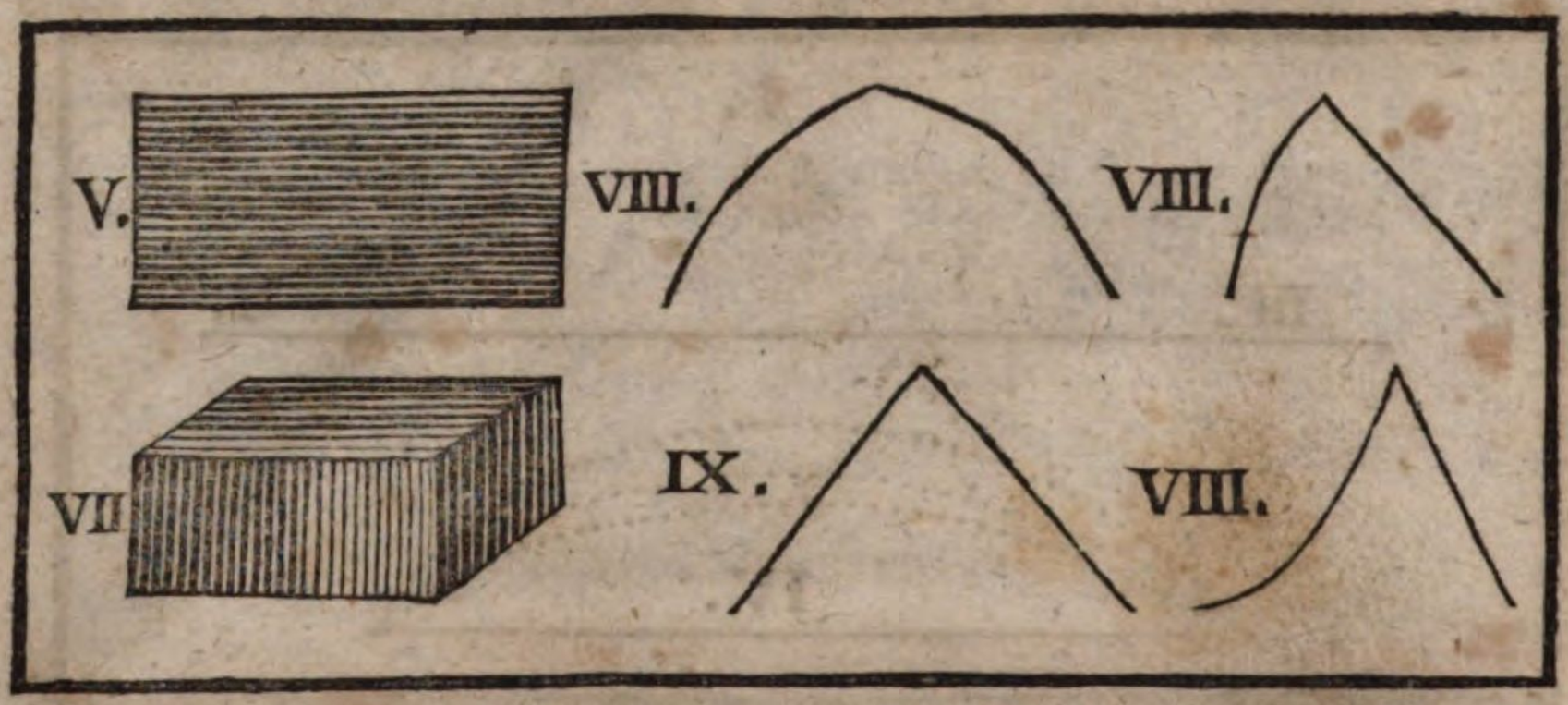
III.

Die äusserste Theile der Linien sind Puncten. Fig. III.

Dann eine Linie nimmt ihren Anfang von einem Punct, und endet sich an einem Punct.

IV.

Eine gerade Linie ist, welche Schnur-eben, zwischen zwey Puncten liegt: oder eine gerade Linie ist die kürtzeste unter allen, welche aus einem Punct in einen andern mögen gezogen werden. Fig. IV.



V.

Eine Ebene oder Fläche ist, welche nur allein eine Breite und Länge, nicht aber eine Dicke hat. Fig. V.

VI.

Das äusserste einer Fläche sind Linien.

VII.

Eine gerade Fläche ist, welche Schnur-eben zwischen ihren Linien ligt. Ist gleich einem wohl polierten Marmorstein. Fig. VII.

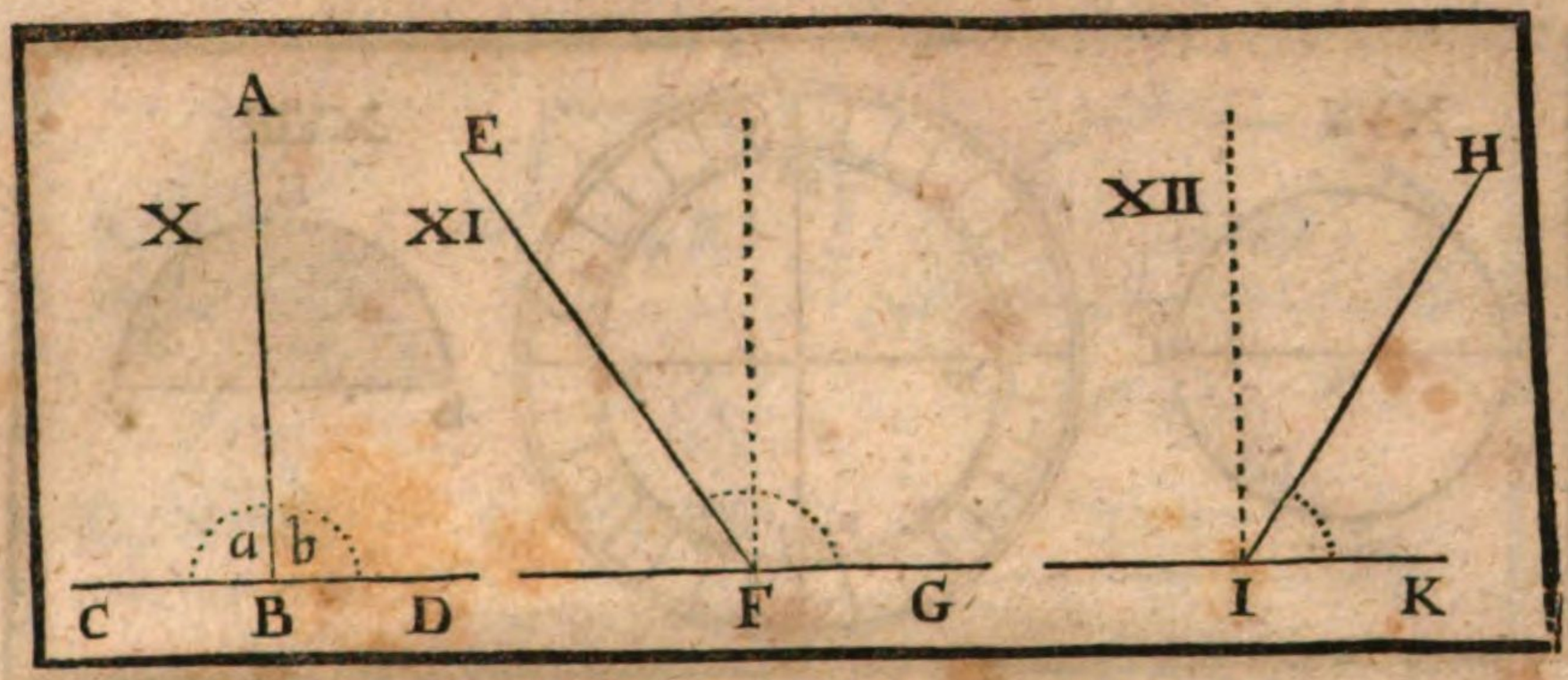
VIII.

Ein flacher Winckel ist, wann auf einer geraden Fläche zwo Linien mit dem einen Ende einander berühren, und nicht Schnur-gerad nach einander liegen, sondern so, daß eine Linie sich gegen die andere neiget. Fig. VIII.

IX.

Wann diejenige Linien, welche diesen Winckel machen, gerad sind, so wird er ein geradlinichter Winckel genannt. Fig. IX.

Die zwo Linien, welche den Winckel machen, werden Seiten genannt. Und die Spitze, oder der Punct, allwo sie zusammen stossen, der Winckel oder das Eck.



X.

Wan eine gerade Linie (A.B.) auf einer andern geraden Linie (C.D.) stehet, und die zwey Winckel (a und b) welche sie mit ihrem Anrühren verursachet, beyde einander gleich machet: so werden beyde Rechte Winckel genannt, und diejenige gerade Linie (A.B.) so auf der andern (C.D.) stehet, wird die Bleyrechte, oder Perpendicular derjenigen (C.D.) auff welcher sie stehet, geheissen. Fig. X.

XI.

Ein stumpffer Winckel ist, welcher grösser als ein rechter Winckel ist, gleich wie E, F, G. Fig. XI.

XII.

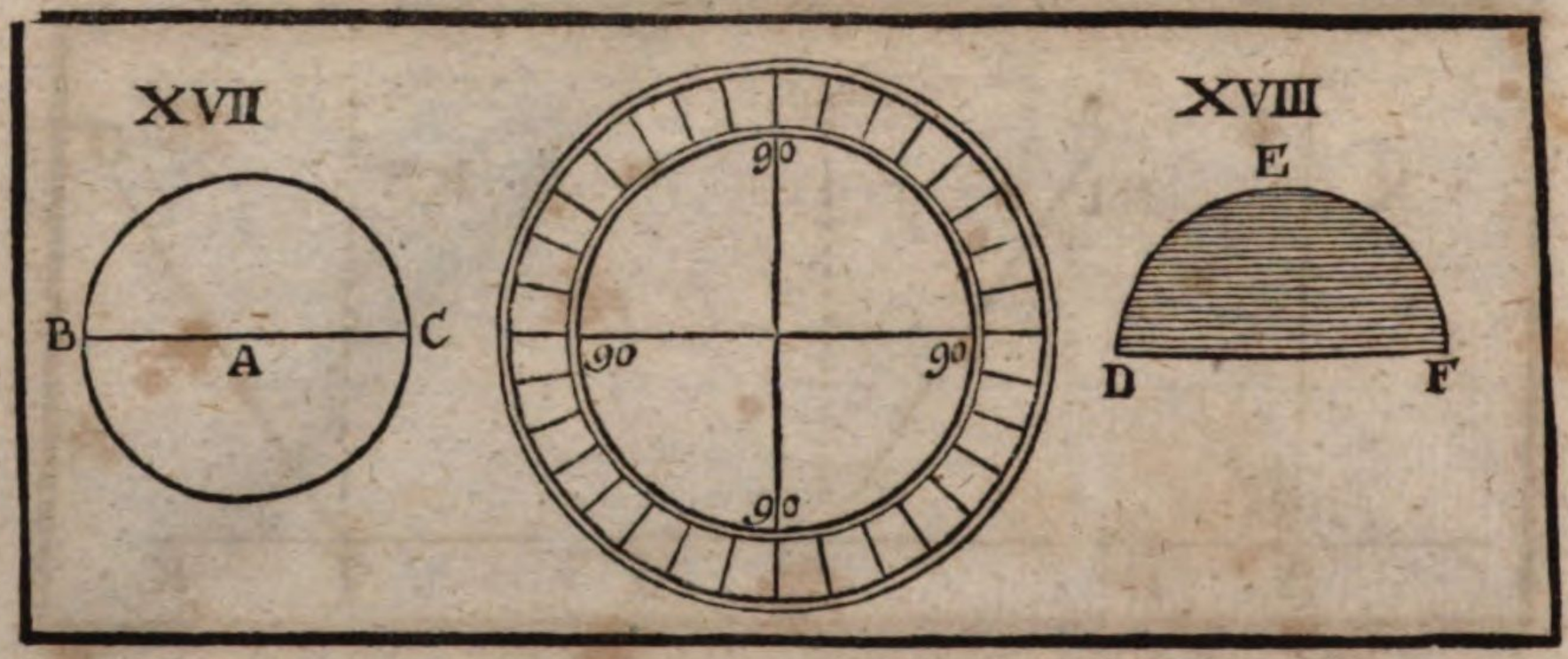
Ein spitziger Winckel ist, welcher kleiner als ein rechter Winckel ist, gleich wie H, I, K. Fig. XII.

XIII.

Das äusserste, oder Rand, in Latein Terminus, ist eines jeden Dings letztes Ende.

XIV.

Ein Figur ist, welche von einem oder mehr Ränden eingeschlossen ist.



XV.

Der Circkel ist eine flache Figur, mit einer einigen Linie umgeben, welche der Umbkreiß, Circumferenz, oder Peripheria genannt wird; Wenn man in diese aus einem gewissen Puncte, welcher in der Figur darinnen genommen wird, einige gerade Linien ziehet, so werden solche Linien einander in der Länge gleich seyn.

XVI.

Ein solcher gewisser Punct wird der Mittel-Punct des Circkels oder das Centrum geheissen.

XVII.

Der Diameter eines Circkels ist eine gerade Linie, die durch den Mittel-Punct gehet, und mit ihrem Ende den Umkreiß des Circkels berühret, auch den gantzen Circkel in zwey gleiche Theile abtheilet, gleich wie B. A. C. Fig. XVII.

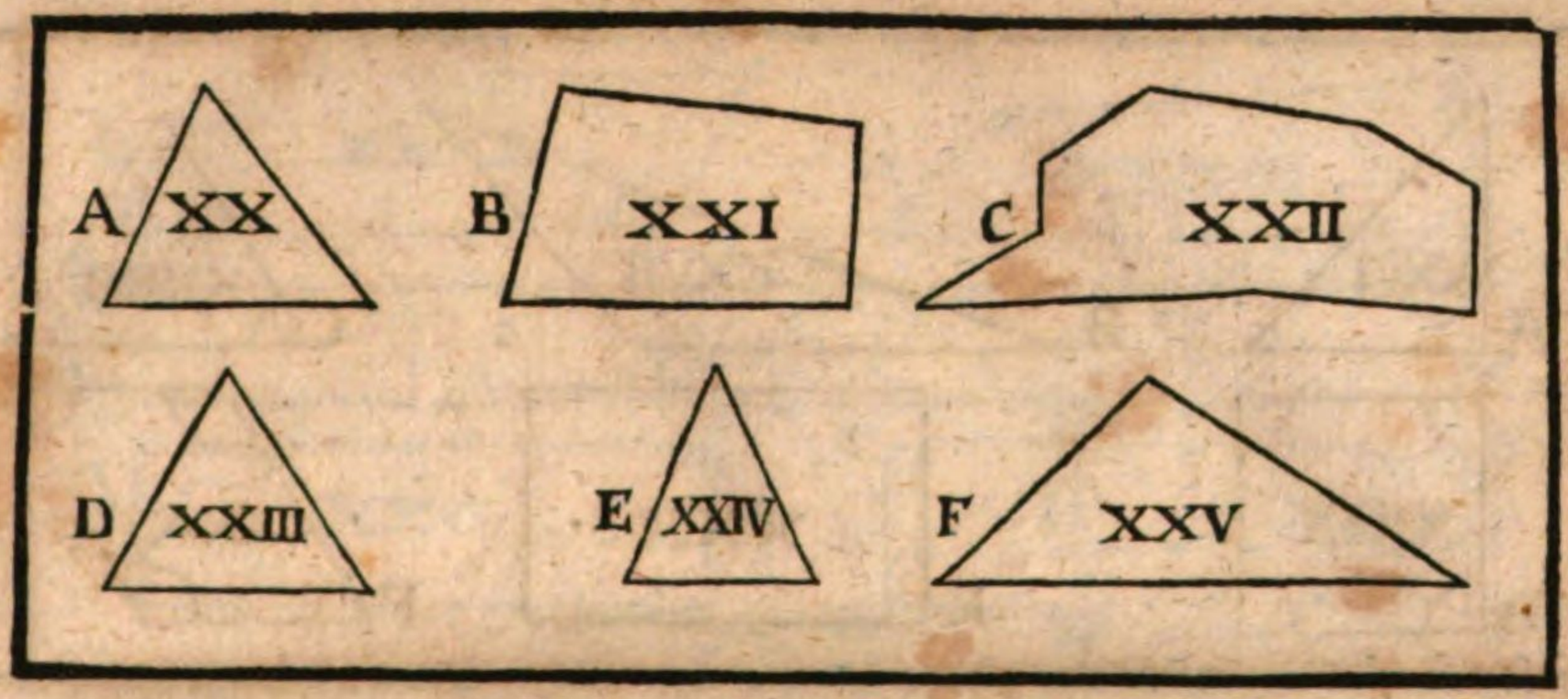
XVIII.

Ein halber Circkel ist eine flache Figur, welche eingeschlossen wird von dem Diameter und dem halben Umbkreiß D. E. F. Fig. XVIII.

Den Umbkreiß eines gantzen Circkels pflegen die Mathematici in 360. gleiche Theile einzutheilen, welche sie hernach Gradus nennen.

Einen Grad theilen sie wiederumb in 60. Theil oder Minuten, und eine Minute in 60. Secunden ein.

Ein halber Umbkreiß hält 180. Grad.
Ein Viertel-Bogen oder Quadrant 90. Grad.



XIX.

Gerad-linichte Figuren sind, welche aller Orten von geraden Linien eingeschlossen sind.

XX.

Dreyseitige Figuren, welche von drey geraden Linien eingeschlossen sind, gleich wie A.

XXI.

Vierseitige, die von vier geraden Linien eingeschlossen sind, gleich wie B.

XXII.

Vielseitige, die von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen werden, als wie C.

XXIII.

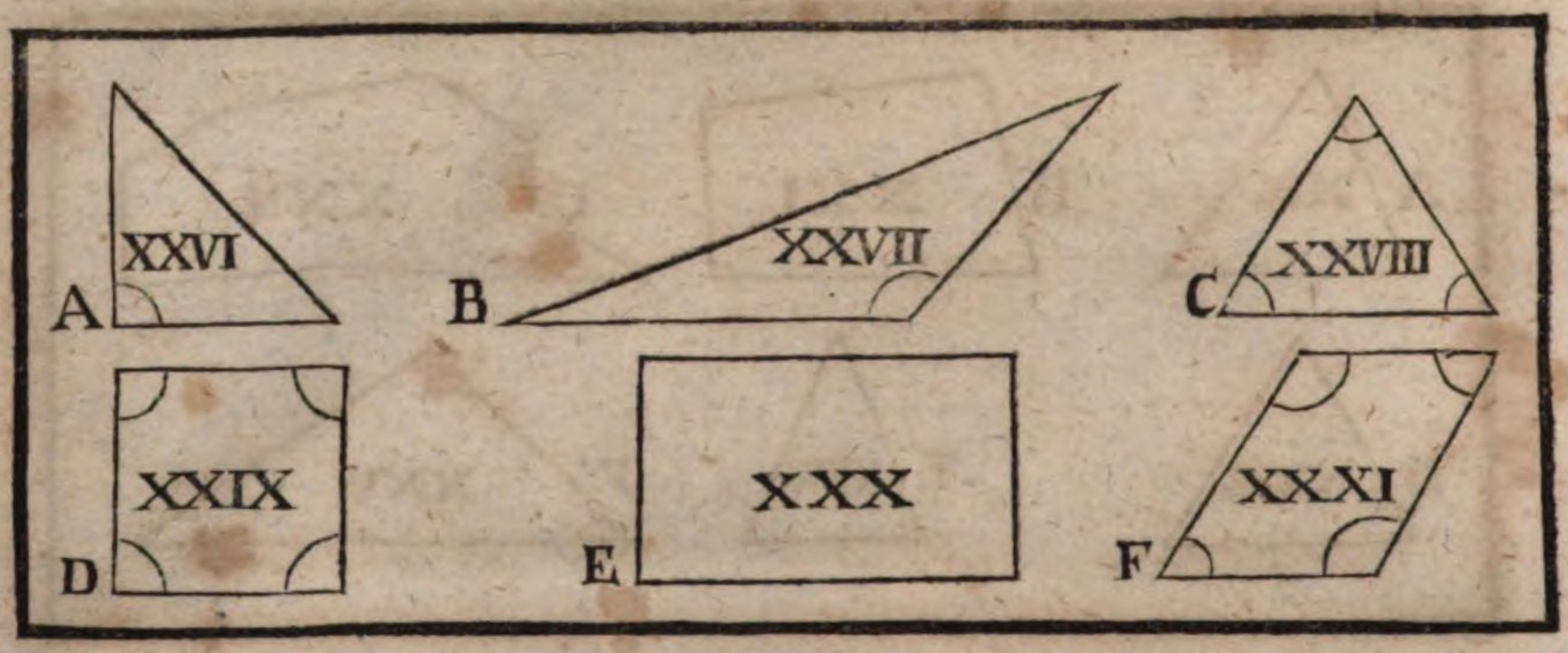
Unter denen dreyseitigen Figuren wird ein gleichseitiger Triangel genannt, welcher drey gleich-lange Seiten hat, wie D.

XXIV.

Der aber nur zwey gleich lange Seiten hat, wird Isosceles geheissen, wie E.

XXV.

Ein ungleichseitiger, das ist, dessen drey Seiten ungleich sind, ein solcher Triangel wird Scalenum genannt, wie F.



XXVI.

Uber diese ist unter denen dreyseitigen Figuren ein Recht-wincklichter Triangel derjenige, welcher einen rechten Winckel hat, wie A.

XXVII.

Ein stumpff-wincklichter Triangel oder Amblygonium ist, welcher einen stumpffen Winckel hat, gleich wie B.

XXVIII.

Ein spiz-wincklichter Triangel oder Oxygonium ist, welcher drey spizige Winckel hat, gleich wie C.

XXIX.

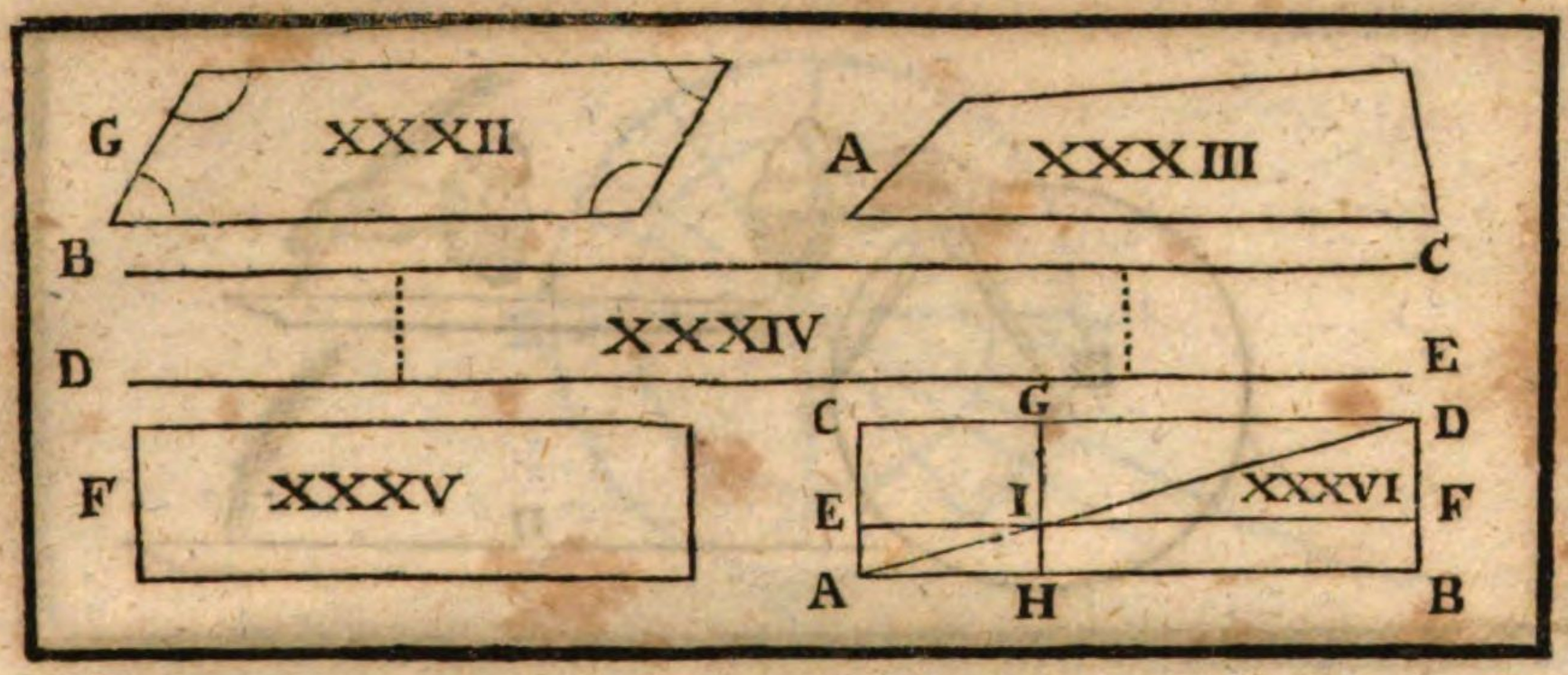
Unter denen vierseitigen Figuren wird ein Quadrat oder Vier-Eck genannt, welches vier gleich-lange Seiten, und vier rechte Winckel hat, gleich wie D.

XXX.

Die aber vier rechte Winckel, nicht aber vier gleich-lange Seiten hat, wird ein winckelrechte ablange Vierung oder Rectangulum genannt, wie E.

XXXI.

Die vier gleich-lange Seiten hat, aber keinen rechten Winckel, wird eine geschobene Vierung, oder Rhombus genannt, wie F.



XXXII.

Eine geschobene verlängte Vierung, oder Rhomboides ist genannt, welche zwey Seiten, und zween Winkeln gegen einander über stehend, gleich groß hat, als wie G.

XXXIII.

Ausser diesen benandten vierseitigen Figuren, werden alle andere, ungleiche Vierungen, oder Trapezia, geheissen. A.

XXXIV.

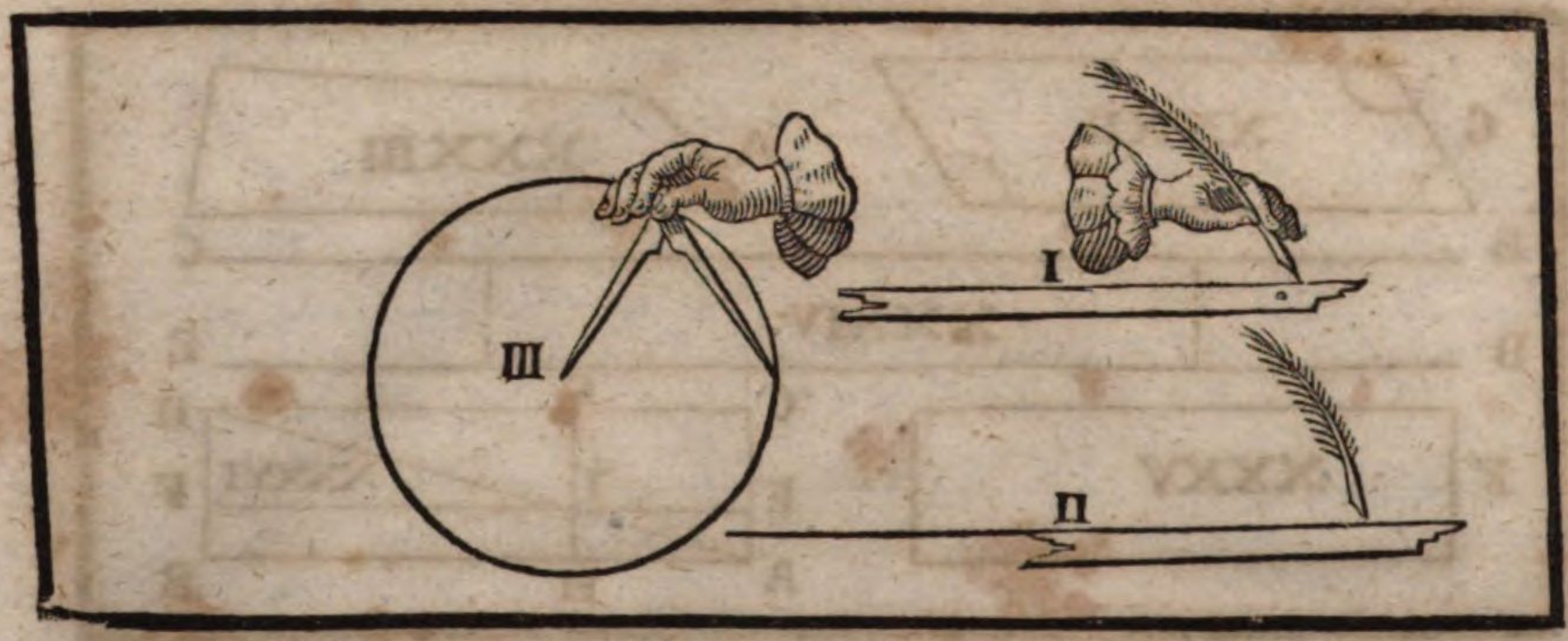
Gerade Parallel-Linien seynd, welche auf einerley Fläche liegen, und allzeit gleich weit von einander stehen, und sich nimmermehr anrühren, noch zusammen kommen, gleich wie BC. DE.

XXXV.

Ein Parallelogrammum ist ein vierseitige Figur, dessen zwey gegenüberstehende Seiten Parallel, oder gleich weit von einander seynd. F.

XXXVI.

Wann in einem Parallelogrammum (ABCD.) aus einem Winckel in dem andern gegen über ein Diameter (AD.) gezogen, und darmit das Parallelogrammum in zwey gleiche Theile abgetheilet worden ist; unterdessen aber man auch zwey Parallel-Linien (HG, EF) innerhalb dieses Parallelograms ziehet, welche sich in einen Puncten (I) des Diameters (AD) ins Creutz durchschneiden, und also vier Parallelogrammen machen: so werden hernach die zwey Parallelogrammen (HBIF, EICG) durch welche der Diameter (AD) nicht gehet, Complementen, oder Ausfühlungen, die zwey andere aber (AHEI, IFGD), durch welche der Diameter gehet, schlecht hinweg, die Parallelogrammen, so umb den Diameter stehen, genannt.



Begehrungen.

Postulata.

Die Sach ist in sich selber klar, und bedarff keines Beweisses, man gesteht es gar gern, daß es seyn kan, nemlich:

I.

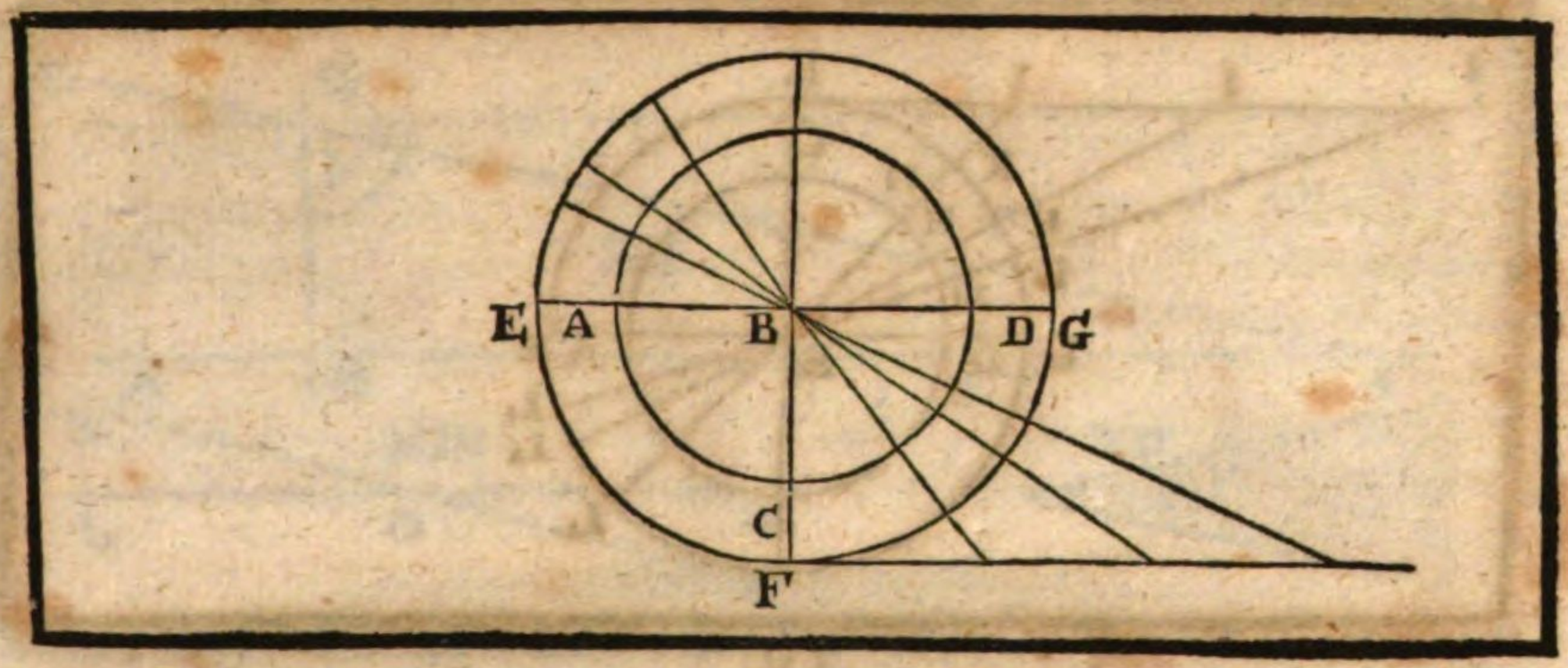
Von einem gegebenen Punct, zu einem andern Punct, eine gerade Linie zu ziehen. Fig. I.

II.

Eine gerade Linie hinaus gerade fort zu verlängern. Fig. II.

III.

Aus einem gegebenen Mittel-Punct, und gegebener Weite einen Circkel zu beschreiben. Fig. III.



Allgemeine Wissenschafft.

Axiomata.

I.

Die Dinge, welche einem Ding insonderheit gleich seynd, die seynd gleich unter einander.

Alldieweilen die Linie BA ⊓ ist der BC; und die BD auch ⊓ der BC durch die 15. Wort-Erklärung; so werden deßwegen alle drey BA, BD, BC unter einander ⊓ seyn.

II.

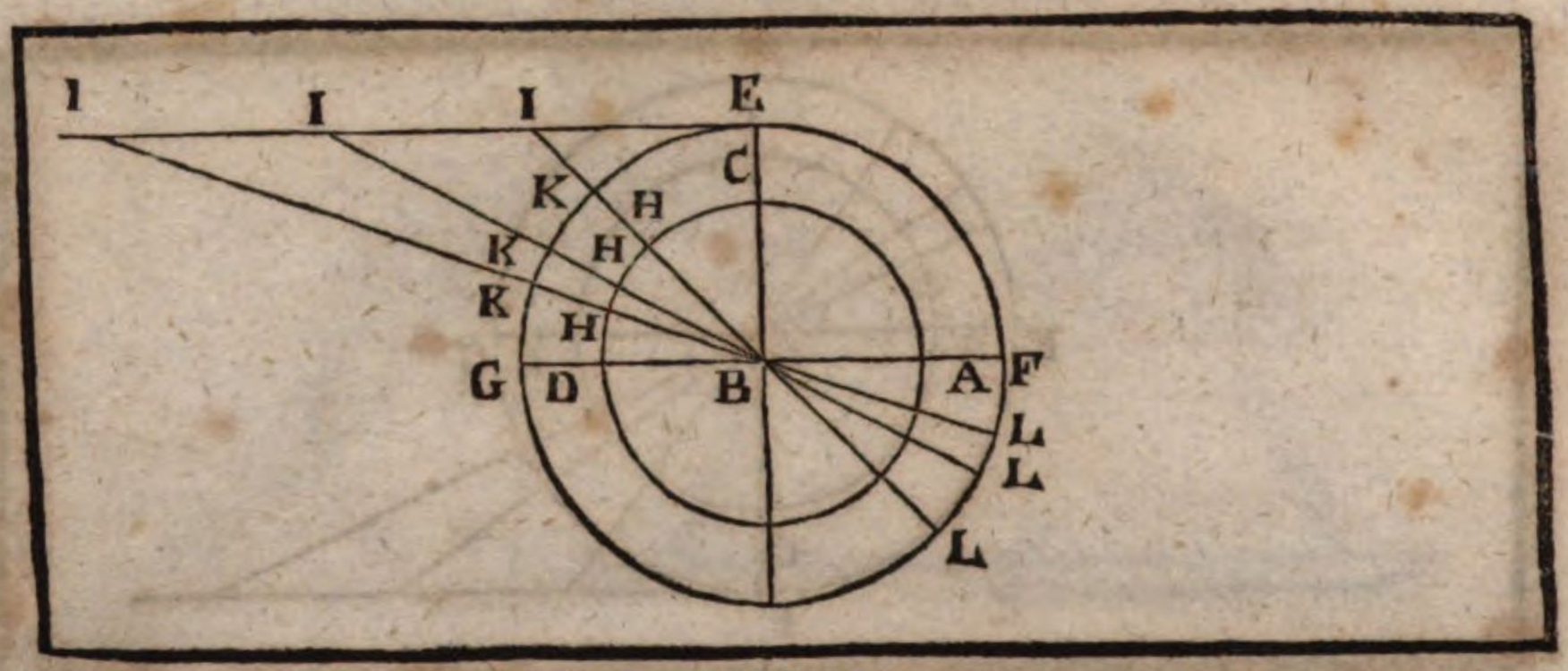
Wann gleiche Dinge zu gleichen Dingen hinzu gesetzt werden, so kommen gleiche Dinge heraus.

Weilen die AB ⊓ ist der CB, und die CB ⊓ der DB: setze hinzu die Gleiche AE, CF, DG; so kommen heraus die Gleiche BE, BF, BG.

III.

So man von gleichem Dinge gleiches hinweg nimmt; so werden auch die übrigen Dinge einander gleich verbleiben.

Von denen Gleichen BE, BF, BG seynd hinweg genommen worden die Gleiche AB, CB, DB; die übrige AE, CF, DG werden auch gleich unter einander verbleiben.



IV.

Wann man zu ungleichen Dingen, gleiche Dinge hinzu setzet, so werden die zusammen gesezte auch ungleich seyn.

Wenn man zu denen ungleichen Linien IK. die Gleiche BK. hinzu setzet, So werden auch die gantze BI. einander ungleich seyn.

V.

So von ungleichen Dingen gleiche abgezogen werden, so werden auch die überbliebene einander ungleich verbleiben.

Wann man von denen ungleichen Linien BI, die Gleiche BK darvon ziehet, So werden die überbliebene KI, einander noch ungleich seyn.

VI.

Alle Dinge, welche eines andern Dings (absonderlich gegen einander gehalten) zwey, drey, viermahln, und so fort, grösser seynd, die seynd gleich einander.

Eine jede KL absonderlich, ist zwey mahlen so groß als BF. derohalben seynd alle KL gleich unter einander.

VII.

Diejenige Dinge, so jedes absonderlich gerad der halbe, dritte, vierte Theil von einem andern Dinge ist; die seynd auch gleich einander.

Also seynd alle KB, weilen sie gerad die Helffte von GF seynd, einander gleich.

VIII.

Wann zwey oder mehr Dinge im Sinne auf einander gelegter verstanden werden, und sich durchaus zusammen schicken, auch keines das andere, weder in der Länge, Dicke, noch Breite übertreffe, so seynd auch solche Dinge einander gleich.

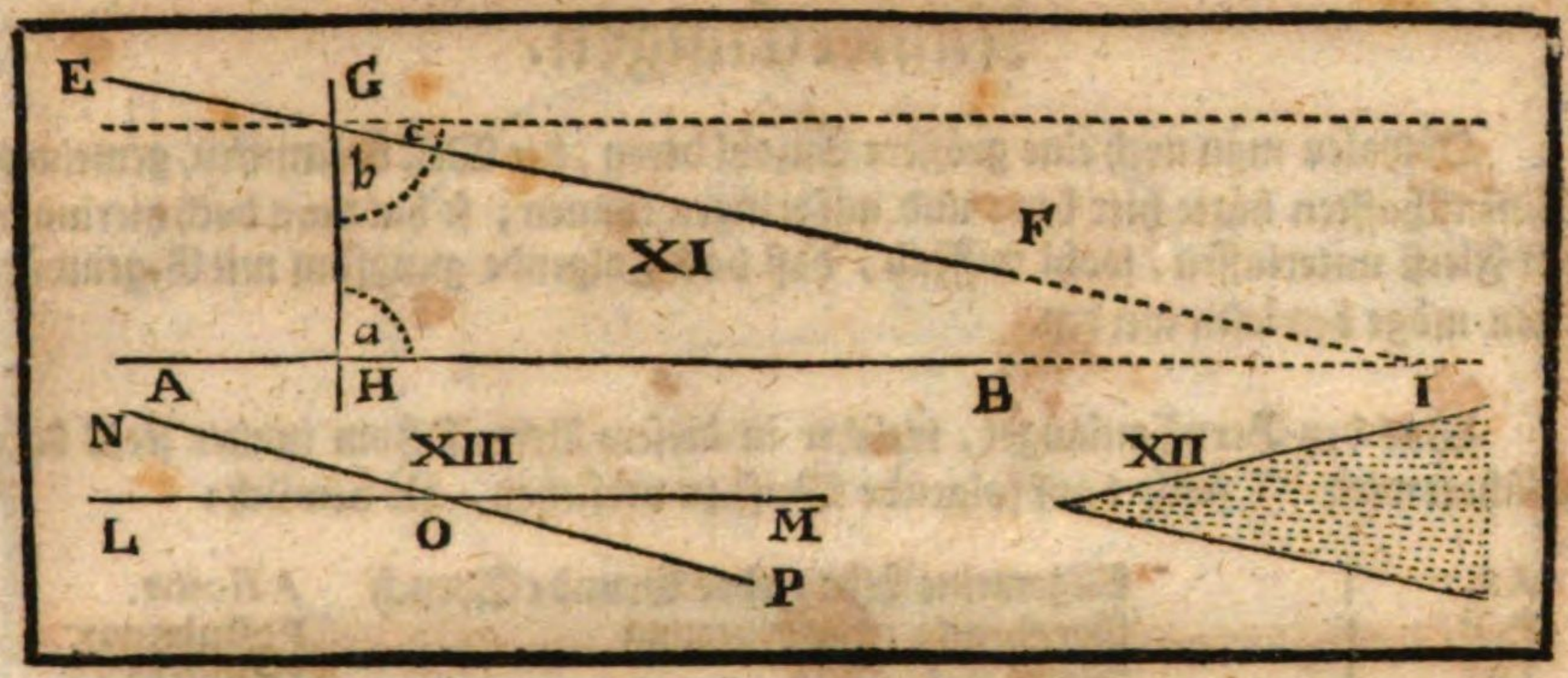
Also, wann man in einerley Form etwas giesset, oder machet, gleich wie die Ziegelsteine, so ist klar, daß solche gantz und gar einander gleich groß werden: In denen flachen Figuren hat es eben diese Meinung, welche man insgemein Patronen, und Muster nennet.

IX.

Das gantze ist grösser, als sein Theil.

X.

Alle rechte Winckel seynd einander gleich.



XI.

Wann über zwey gerade Linien (AB und EF), eine andere gerade Linie (GH) überzwerg gezogen wird, und die zwey inwendige Winckeln (a und b) mit einander kleiner machet, als zwey rechte Winckeln (a und b + c): da man hernach solche zwey Linien hinaus verlängert, werden sie endlich auf derselben Seiten, allwo die zween Winckeln kleiner, als zween rechte seynd, in einem Puncten (gesezt, als wie in I.) zusammen kommen.

XII.

Zwey gerade Linien beschliessen keinen Platz, und machen keine Figur: aufs wenigst gehöret die dritte darzu.

XIII.

Zwey gerade Linien (LO und NO) können nicht aus einer geraden Linie (OM) entspringen.

Dann wann die gerade Linie NO verlängert wird, so geschicht es nach dem Puncten P, und nicht nach M: sonsten würden sie keine geradtebne Linien seyn.

XIV.

Ein jedes ganzes Ding ist gleich allen seinen Theilen sammentlich: und hingegen alle Theile sammentlich seynd gleich seinem Gantzen.

XV.

Wann ein ganzes Ding eines andern ganzen, und das Hinweggenommene des andern Weggenommenen doppelt ist, so wird auch das übrige des andern übrigen doppelt seyn. u. s. f.

Anmerckungen.

Obwolen man noch eine grössere Anzahl deren, der Welt bekannten, gemeinen Wissenschafften hätte hier bey- und aufbringen können; so hat man doch hierinnen mit Fleiß unterlassen, wohl wissend, daß das Folgende gnugsam mit Gegenwärtigen möge bewiesen werden.

Was den Beruff anlanget, welcher in diesem Beweißthum immer stets beygeführet wird, ist solcher auf folgende Weise zu verstehen, als nemlich:

Ax.	bedeutet	Allgemeine Lehr, oder Grund-Spruch	Axioma.
Post.		Begehrung, Anforderung	Postulatum.
Def.		Wort-Erklärung	Definitio.
Corol.		Folge	Corollarium.
D.		Durch	Per.
B.		Buch	Liber.
Vorg.		Vorgab.	Propositio.
Handg.		Handgriff	Praxis, Operatio.
Zub.		Zubereitung	Constructio.
An.		Anmerckung	Nota.
Vor.		Vorgehend	Antecedens.

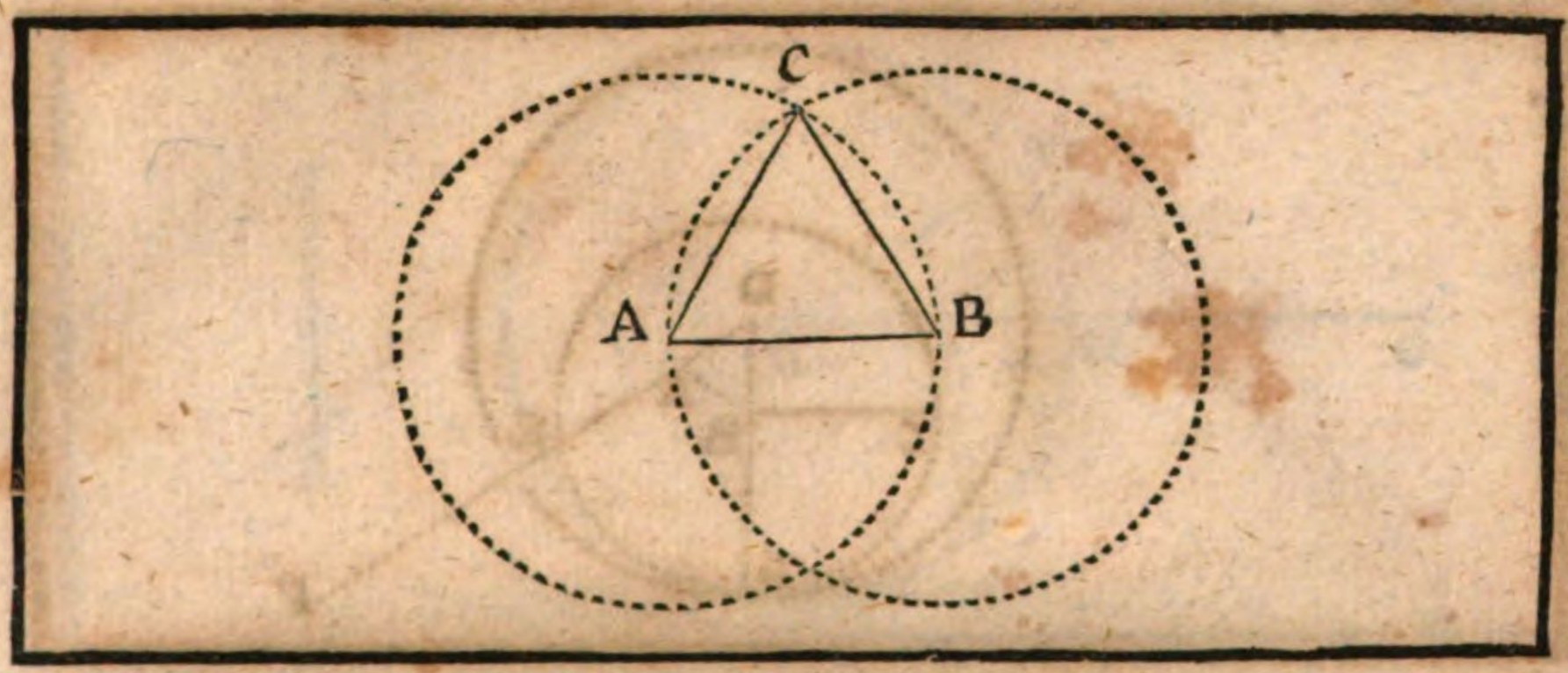
Zu einem Beyspiel, es stehet geschrieben 12. v. 3. b. lese es also:

Durch die zwölffte Vorgab des dritten Buchs.

Man schreibt es aber noch kürtzer auf solche Weiß, d. 13. 4. das ist:

Durch die dreyzehende Vorgab des vierten Buchs.

Problema, Theorema, und Lemma, seynd drey Griechische Wörtlein, so Euclides denen Vorgaben vorsetzet, und wollen nichts anders sagen, als daß die Vorgab entweder ein Handgriff, eine Betrachtung, eine Erleichterung, oder Hülff des nachgehenden seye, ohne welchem es sonsten nicht genugsam klar könte bewiesen werden.



Die Erste Vorgab.

Handgriff.

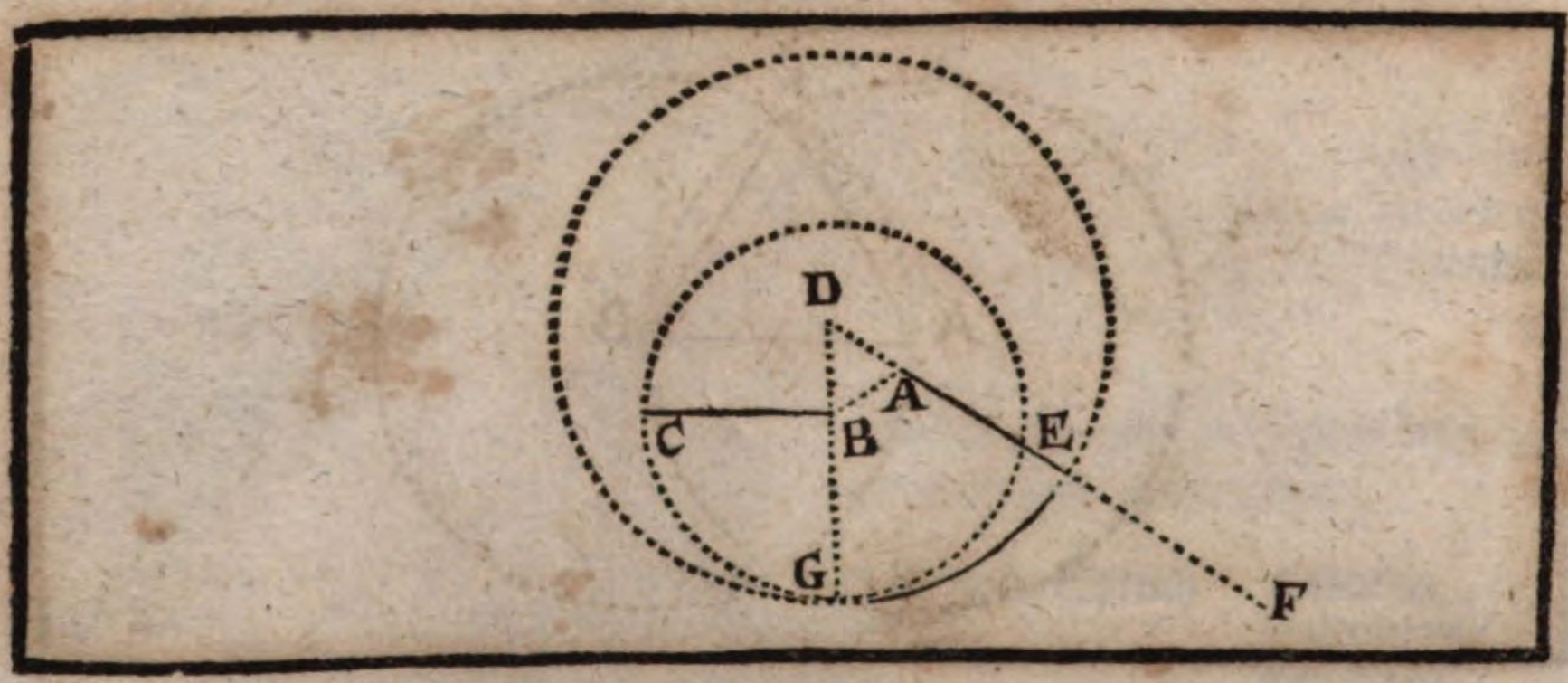
Auf einer gegebenen geraden Linie (AB) einen gleichseitigen Triangel (AGB) zu machen.

Handgriff.

Aus denen zwey äussersten Puncten A, und B.
mit der Weite der gegebenen Linie A B.
schreibe zween Circkel herum:
Allwo diese zwey Circkel sich durchschneiden, als wie in dem Puncten C.
Ziehe in solchen Durchschnitts-Puncten C
die zwey geraden Linien AC, BC.
So ist der gleichseitige △ A C B verfertiget.

Beweiß.

Die Linie A C ist ⊓, der Linie A B. d. 15. def. 1.
Die Linie CB ist auch ⊓, der Linie AB. d. 15. def. 1.
Darumb seynd die drey Linien einander gleich. d. 1. ax.
Und deßwegen ist der △ A C B ein gleichseitiger △. d. 23. def. 1.
Welches zu machen ware.



Die II. Vorgab.

Handgriff.

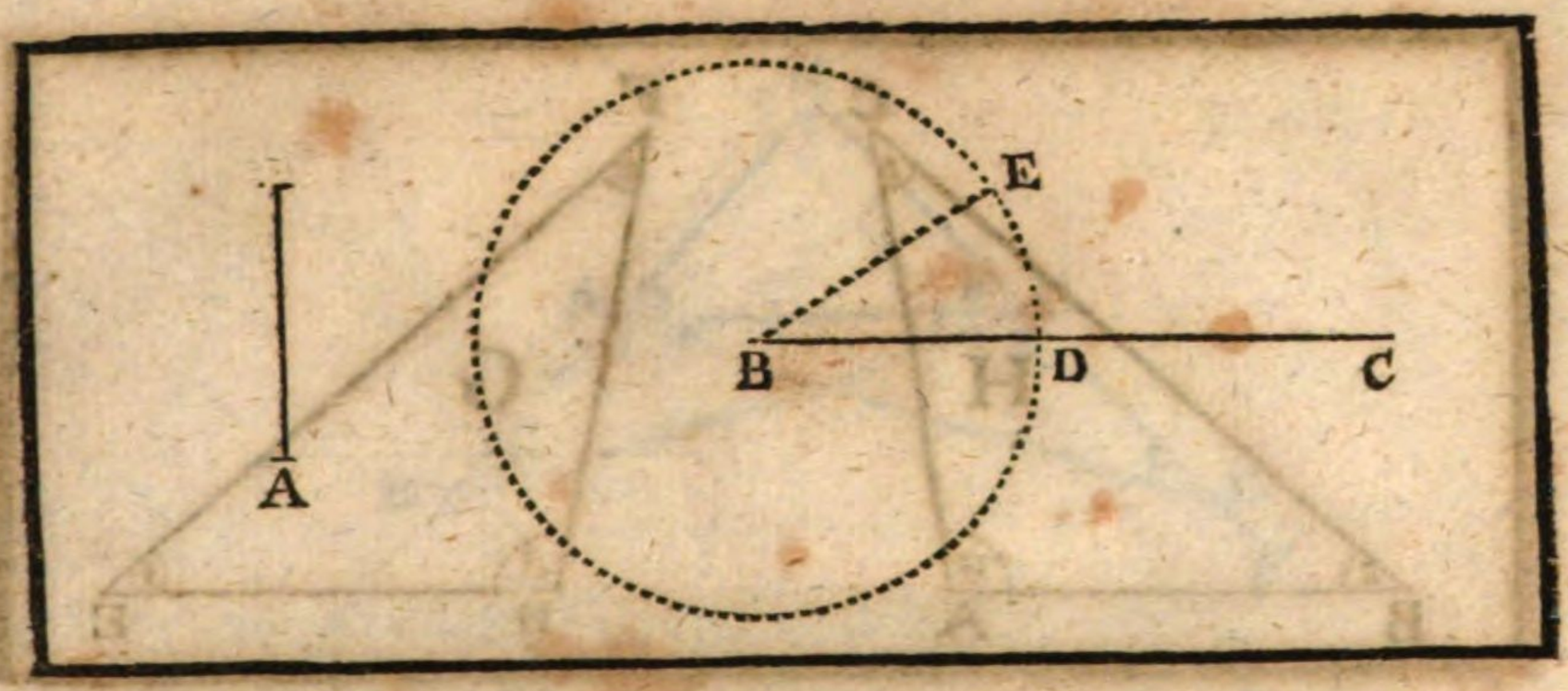
Aus einem gegebenen Puncten (A) eine gerade Linie (AE) zu ziehen, welche einer andern vorgegebenen geraden Linie (BC) gleich lang seye.

Handgriff.

Ziehe zusammen die zween Puncten B A.	d. 1. post.
Auf der Linie AB mache den gleichseitigen △ ADB.	d. 1. 1.
Aus dem Punct B, mit der Weite BC schreibe einen Circkel.	d. 3. post.
Verlängere die Seiten DB biß am Umkreiß G. und die Seiten DA hinauß in F. nach Gebühr.	
Aus dem Punct D, mit der Weite DG, schreibe einen Circkel, welcher die Linie DF durchschneiden werde in E.	
Die Linie AE wird alsdann ⌐ seyn, der Linie BC.	

Beweiß.

Die Linie DB ist ⌐, der Linie DA.	d. d. Handg.
und die Linie DG ist ⌐, der Linie DE.	d. 15. def. 1.
Wann man von denen gleichen Linien DG, und DE die gleiche Linien DB, und DA abziehet:	
So wird überbleiben die Linie BG ⌐, der Linie AE.	d. 3. ax.
Die Linie BG aber ist ⌐, der Linie BC.	d. 15. def. 1.
Dahero wird auch die Linie AE ⌐ seyn, der Linie BC.	
Welches zu machen war.	



Die III. Vorgab.

Handgriff.

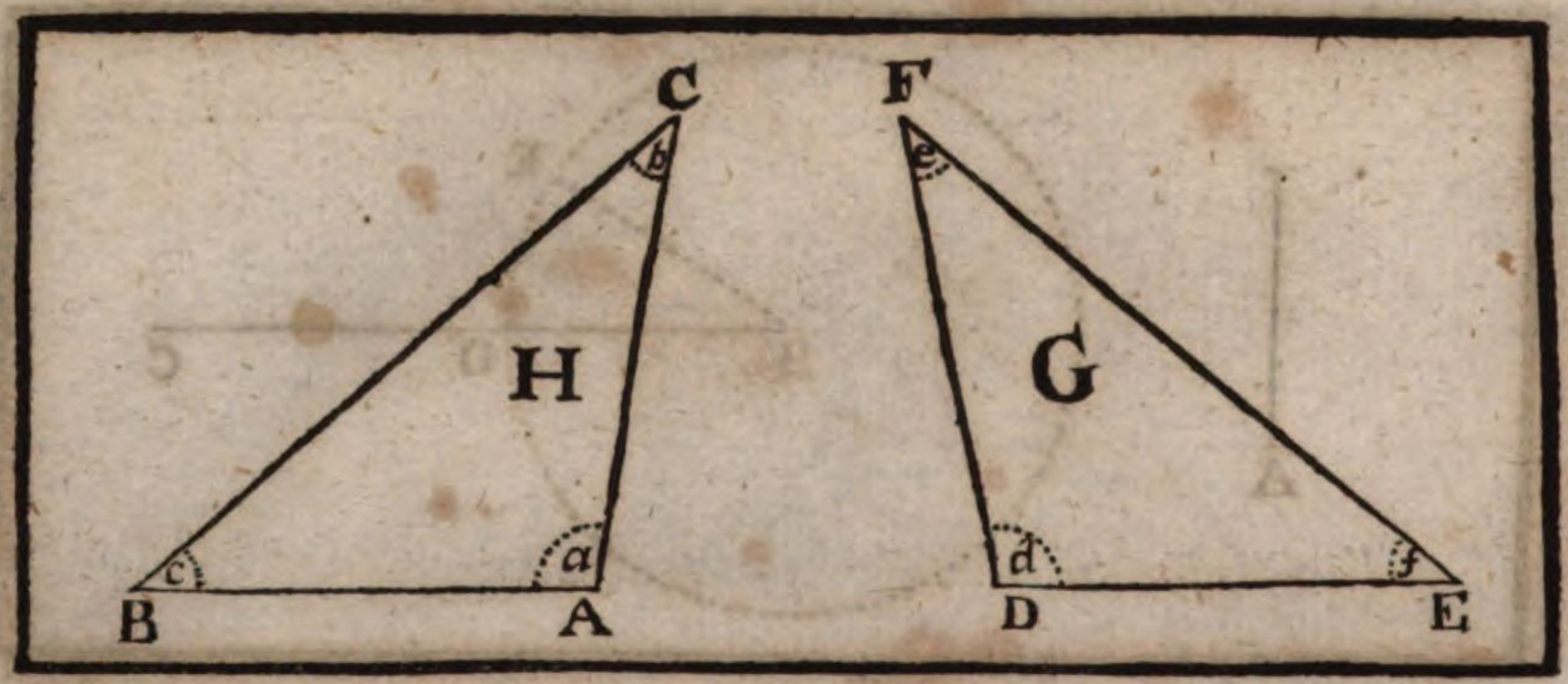
Von zwey gegebenen geraden Linien (A und BC) ungleicher Länge: von der Längern (BC) einen Theil (BD), welcher gleich ist der gegebenen kürtzern Linie (A), abzuschneiden.

Handgriff.

Aus dem Punct B mache die Linie BE ⊓, der Linie A. d. 2. I.
Schreibe aus dem Punct B, mit der Weite BE, einen Circkel.
wecher die Linie BC durchschneiden werde in D.
Nun sage ich, daß das Stück, oder die Linie BD ⊓ seye abgeschnitten
worden der gegebenen Linie A.

Beweiß.

Die Linie BD ist ⊓, der Linie BE. d. 15. def. I.
die Linie BE aber ist ⊓, der Linie A. d. d. Hand.
Dahero wird auch die Linie BD ⊓ seyn, der Linie A. d. 1. ax.
welche von der Längern BC ist abgeschnitten worden:
Welches zu machen ware.



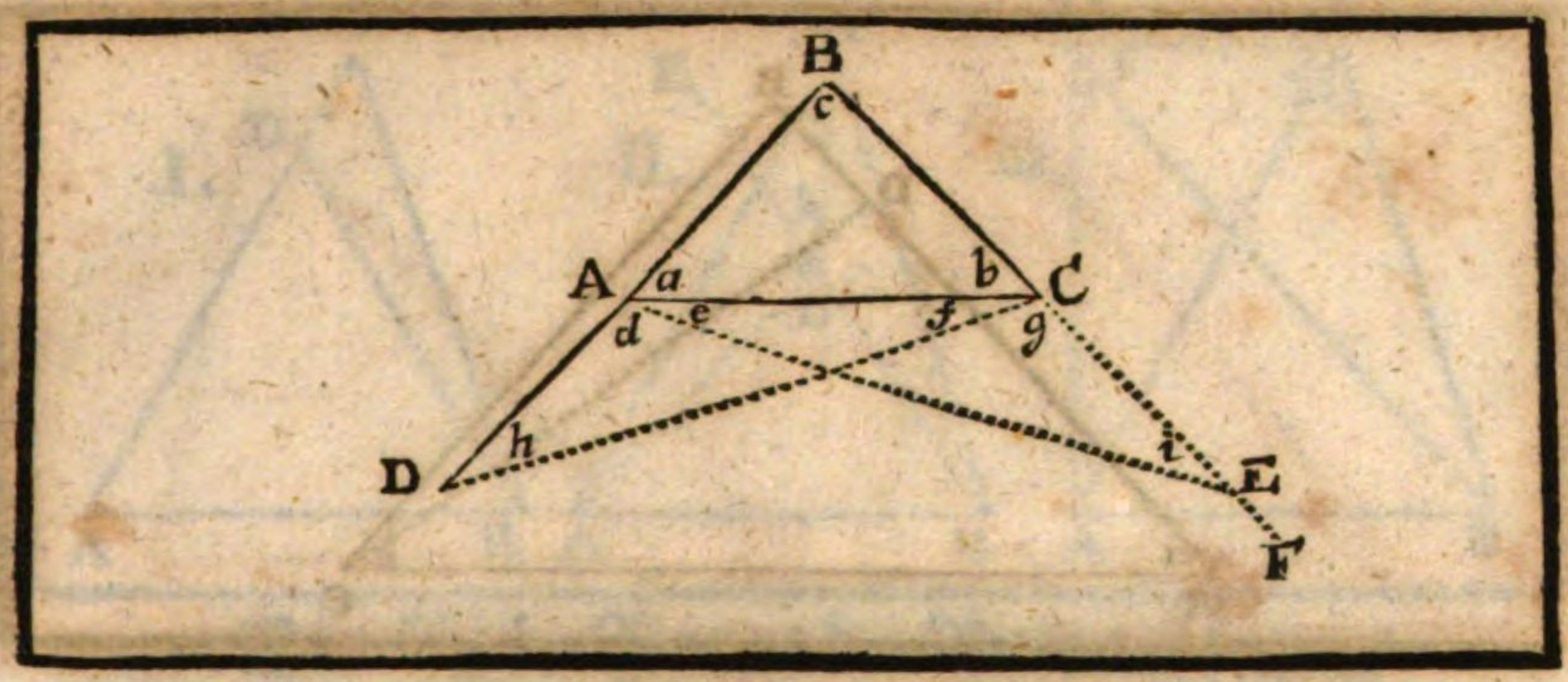
Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zweyen Triangeln (H und G) zwo Seiten (AC, BC) eines, gleich seyn zweyen Seiten (DF, EF) des andern, eine jede insonderheit der andern (gleich wie AC ⊓, DF, und BC ⊓, EF) auch die zween Winckeln (b und e), so von sothanen gleichen Seiten gemacht werden, einander gleich seyn: alsdann werden auch die Bases (AB und DE) einander gleich seyn; und der eine Triangel (H) wird sich durchaus mit dem andern Triangel (G) vergleichen; auch die übrigen zwey Winckel, so von gleichen Seiten beschlossen seynd, werden einander gleich seyn; (das ist, der Winckel a wird ⊓ seyn, dem Winckel d, und der Winckel c ⊓, dem Winckel f.)

Beweiß.

Weilen in dem △ H der ∠ b ⊓ ist, dem ∠ e in dem △ G, und die Seiten AC ⊓, der Seiten DF. d. d. Vorg.
Item die Seiten CB ⊓, der Seiten FE. d. d. Vorg.
So ist klar, daß, wann man den △ ACB auf den △ DFE also leget, daß der Spitz C auf den Spitz F, und die Seiten AC auf DF, und BC auf EF zu liegen kommen, auch nothwendig die Linie AB auf die Linie DE fallen und eintreffen werde, das ist:
Die Basis AB wird ⊓ seyn der Basis DE; und so fort wird sich der ganze △ H mit dem △ G durchaus zusammen schicken, und einander gleich seyn. d. 8. ax.
Dahero auch der ∠ a ⊓ seyn wird dem ∠ d; und der ∠ c ⊓, dem ∠ f. d. 8. ax.
Welches zu beweisen ware.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

In denen Triangeln (ABC), welche zwo gleiche Seiten (AB, CB) haben, seynd die zwey Winckel (a und b) ober der Basis (AC) einander gleich: und wann die zwo gleiche Seiten (AB, CB) verlängert werden, (als wie in D und F) so seynd auch die zwey Winckel (d + e, und g + f) unter der Basis (AC) einander gleich.

Zubereitung.

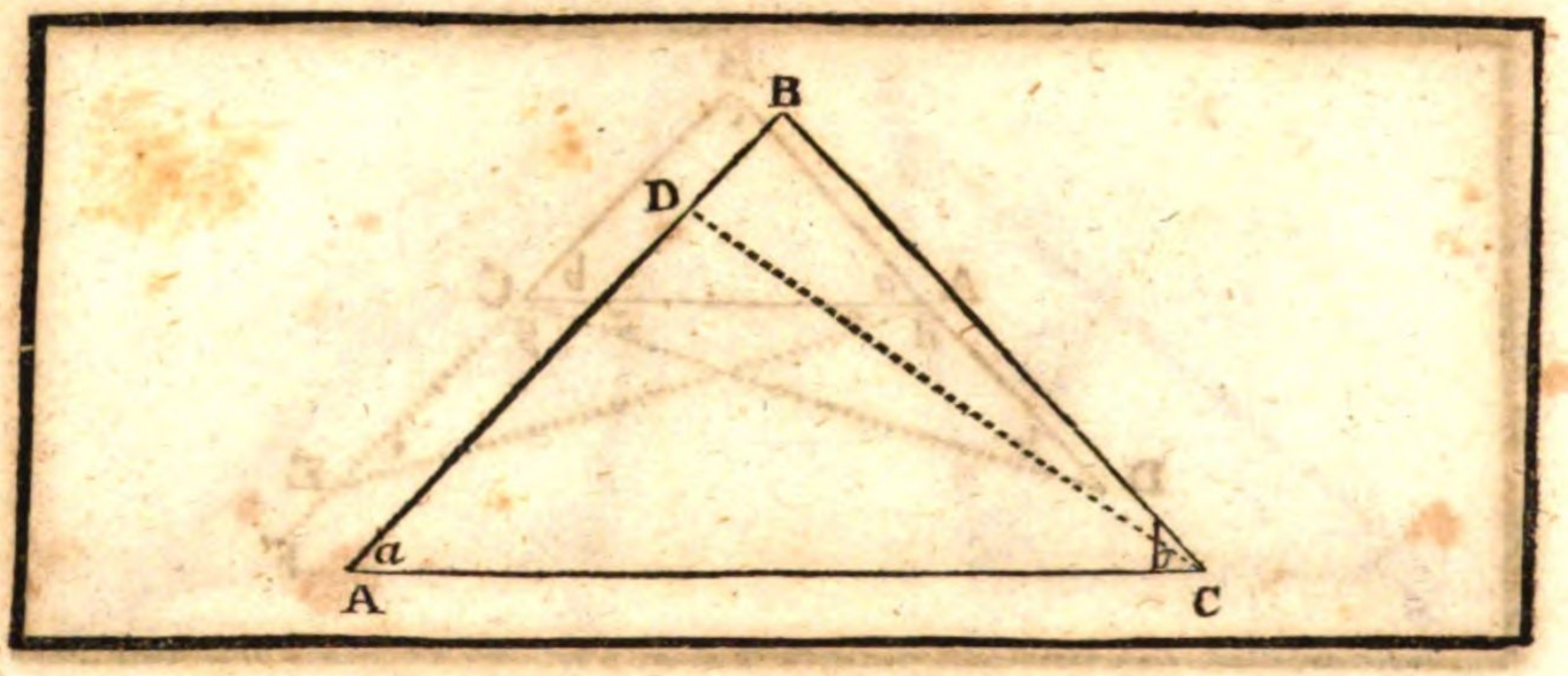
Mache CE ⊓, AD; und ziehe zusammen EA, und DC. [d. 3. 1. d. 1. post.

Beweiß.

Betrachte erstlich die zwey △ ABE, und BCD, alsdann sage:
In dem △ ABE seynd die zwo Seiten AB, und BE ⊓, denen zwo Seiten CB, und BD im △ BCD
und der ∠ c ist beyden △ gemein. [d. d. Vor. und Zub.
Darumb wird die Basis AE ⊓ seyn der Basis CD.
Und auch die ∠ e + a, und ∠ i werden ⊓ seyn, denen ∠ f + b, und ∠ h. d. 4. 1
Betrachte zum andern die zwey △ ACE, und ACD sprechend: [d. d. Zub.
In dem △ ACE seynd die zwo Seiten AE, und CE ⊓, denen zwo Seiten CD, und AD im △ ACD, und der ∠ i ⊓ dem ∠ h. [und d. Vor. d. d. Vor.
Folget, daß auch die übrige zween ∠ e, und f + g ⊓ seyn werden, denen übrigen zween ∠ f, und e + d. d. 4. 1.
Das ist, der ∠ f + g ist ⊓, dem ∠ e + d unter der Basis.
Unterdessen abziehe von denen gleichen ∠ c + a, und f + b die gleiche ∠ e, und f. d. d. Vor.
So wird überbleiben der ∠ a ⊓, dem ∠ b ober der Basis. d. 3. ax.
Welches zu beweisen ware.

Folge.

Ein jeder gleichseitiger Triangel ist auch gleichwincklicht.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in einem Triangel (ABC) die zwey Winckeln (a, b) einander gleich seynd, so werden auch die zwo Seiten (AB und BC), welche die gleichen Winckeln unterspannen, einander gleich seyn.

Beweiß.

Ob zwar diese Vorgab auß der vorgehenden für eine Warheit könte angenommen werden: so möchte dannoch einer einwerffen, daß eine von denen zwo Seiten gesetzt, als wie AB, ⌐ wäre, als die Seiten CB.

Mache derohalben nach dessen Willen, (wofern es möglich ist) die Seiten AD ⌐, BC, und hänge CD zusammen.

Nunmehro, weilen in dem △ ADC die Seiten AD ⌐ ist, der Seiten CB im △ ABC.

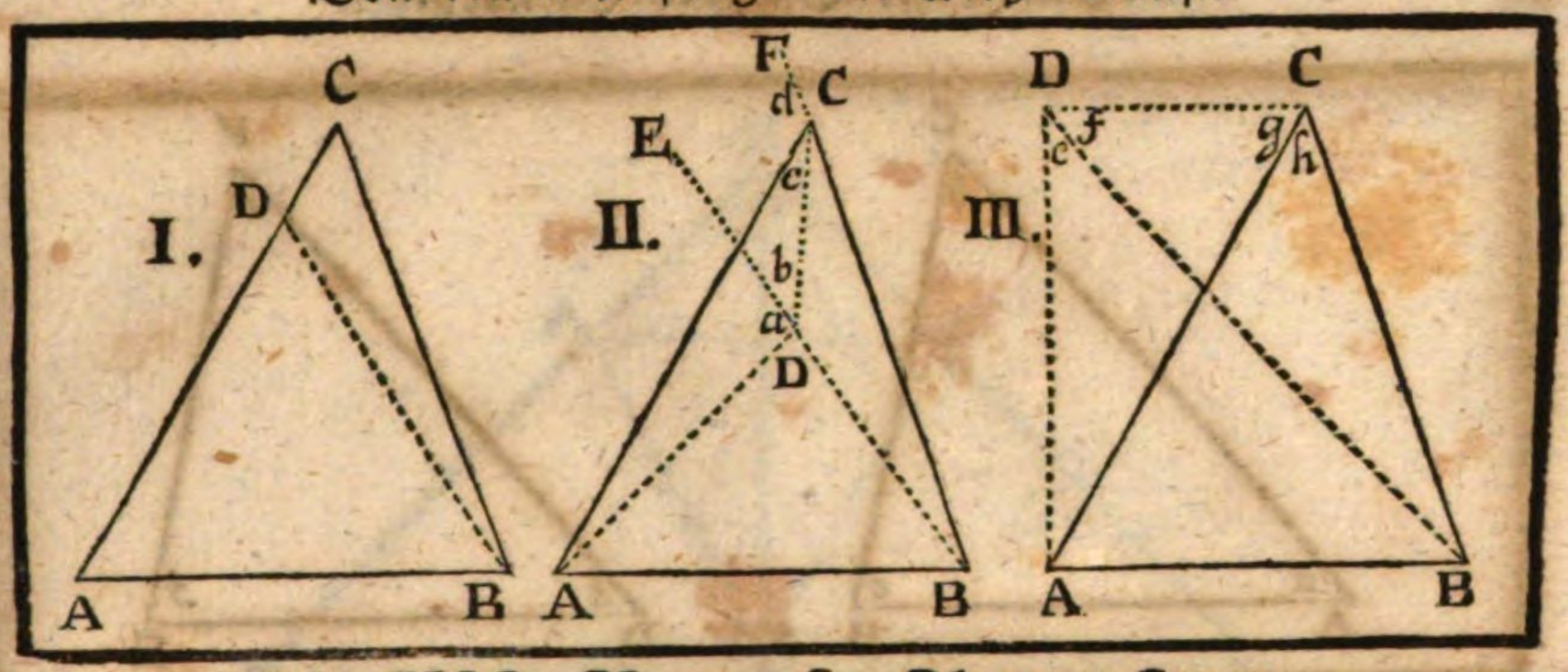
Und die Seiten AC beyden △ gemein; auch der ∠ a ⌐ ist gegeben dem ∠ b. d. d. Vorg.

Folget, daß der △ ADC ⌐ seye, dem △ ABC. d. 4. 1.

(nemlich ein Theil seinem gantzen): so nicht seyn kan, d. 9. ax.

Deßwegen ist es noch wahr, daß die Seiten AB ⌐ seye der Seiten CB.

Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab. Betrachtung.

Auff einer geraden Linie (AB) können nicht zwey andere gerade Linien, (als wie AD, BD) auß einerley Ende (AB) und gegen einerley Seiten, gleich denen ersten Linien (AC, BC, daß nemlich AD ⌐ seye, AC; und BD ⌐, BC) in einem andern Puncten (als nemlich in D) gezogen werden.

Dreyerley Fähle können in diesen Betrachtungen vorkommen.

Beweiß I.

Wann man den Punct D in die Linie AC setzet.

So ist es in sich selbst klar, daß die Linie AD nit ⌐ seye, der Linie AC. d. 9. ax.

II.

Wann der Punct D innerlich in dem △ ACB gesetzt wird:

So ziehe AD, und BD zusammen.

Hernach verlängere nach Gebühr BD in E, und BC in F, und ziehe DC zusamen, d. 2. post.

Weilen nun die Linie AD ⌐, der Linie AC gesetzt wird.

So wird in dem △ ACD, oder der Basis DC, der ∠ a + b ⌐, seyn dem ∠ c. d. 5. 1.

Abermahlen, weiln die Linie BD ⌐, der Linie BC gesetzt wird.

So wird in dem △ DBC, unter der Basis DC, der ∠ b ⌐ seyn, dem ∠ c + d. d. 5. 1.

Welches aber nicht seyn kan, indeme der ∠ b (welcher kurtz vorhero nur ein Theil deß ∠ b + a, und dahero kleiner, als der ∠ c ware,) nunmehro aber ⌐, als derselbe ∠ c seyn solte. III.

Letzlich, wan der Punct D ausserhalb den △ ABC gesetzt wird,

So ziehe zusammen AD, BD, DC. Dieweilen die Linie AD ⌐, der Linie AC gesetzt wird, folget, daß in dem △ DAC der ∠ e + f ⌐ seye, dem ∠ g. d. 5. 1.

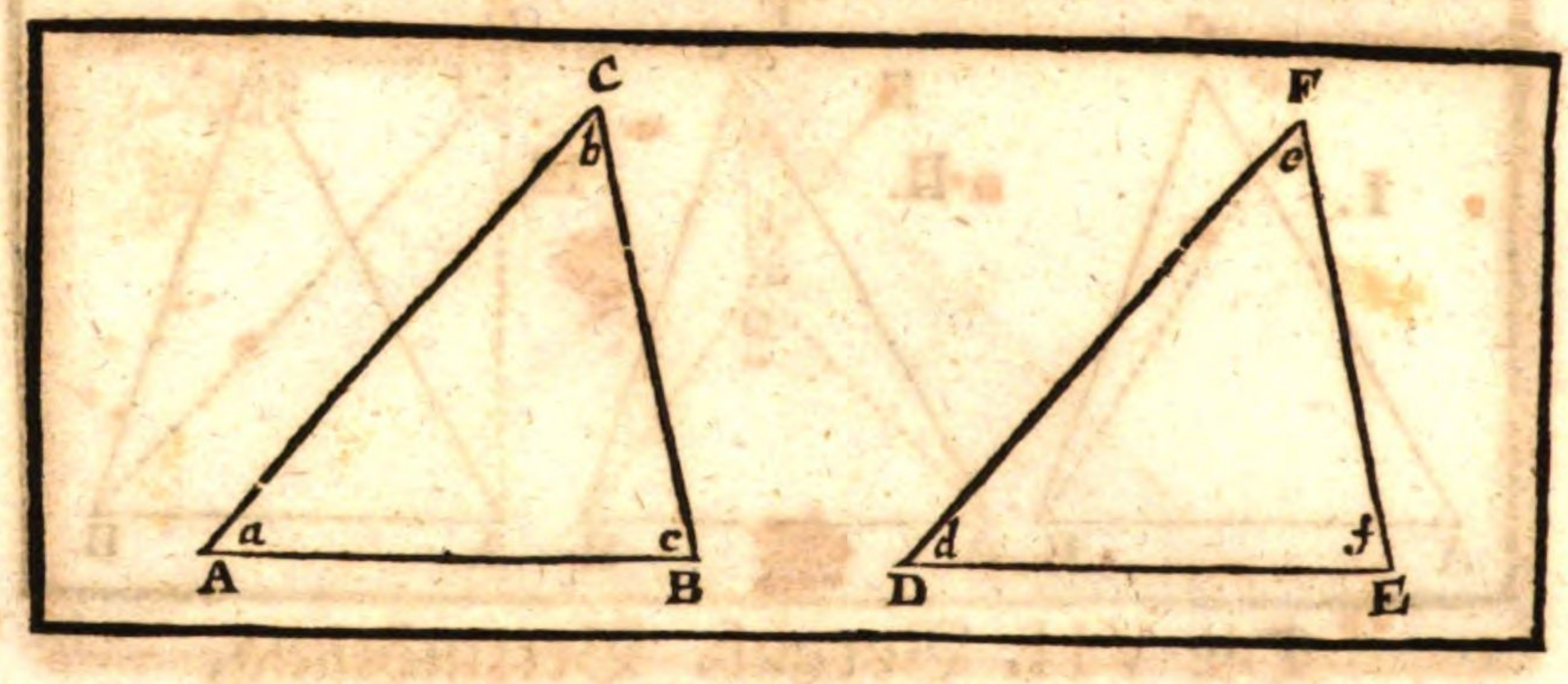
Abermahlen, weilen man setzet die Linie BD ⌐, BC,

So wird in dem △ DBC der ∠ f ⌐ seyn, dem ∠ g + h. d. 5. 1.

Der ∠ f aber ware vorgehends nur ein Theil deß ∠ e + f, und folgends auch nur ein Theil deß ∠ g. und jetzund solte derselbe ∠ f ⌐ seyn dem noch grössern ∠ g + h, so wider die Vernunfft streitet. d. 9. ax.

Dahero man schliesset, daß auff einer geraden Linie nicht zwey andere gerade Linien auß einerley Ende, und gegen einerley Seiten (gleich denen ersten Linien) in einen andern neuen Puncten können gezogen werden; sondern solche werden nothwendig mit denen erstgezogenen einfallen, und durchauß übereins kommen, und nur eine Linie machen.

Welches zu beweisen ware.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ein Triangel (ABC) die drey Seiten, andern dreyen Seiten eines andern Triangels (DEF), eine jede der andern insonderheit gleich hat: so werden auch die drey Winckeln Eines, denen drey Winckeln deß andern, so von gleichen Seiten unterspannet seynd, ein jeder insonderheit dem andern gleich seyn.

Beweiß.

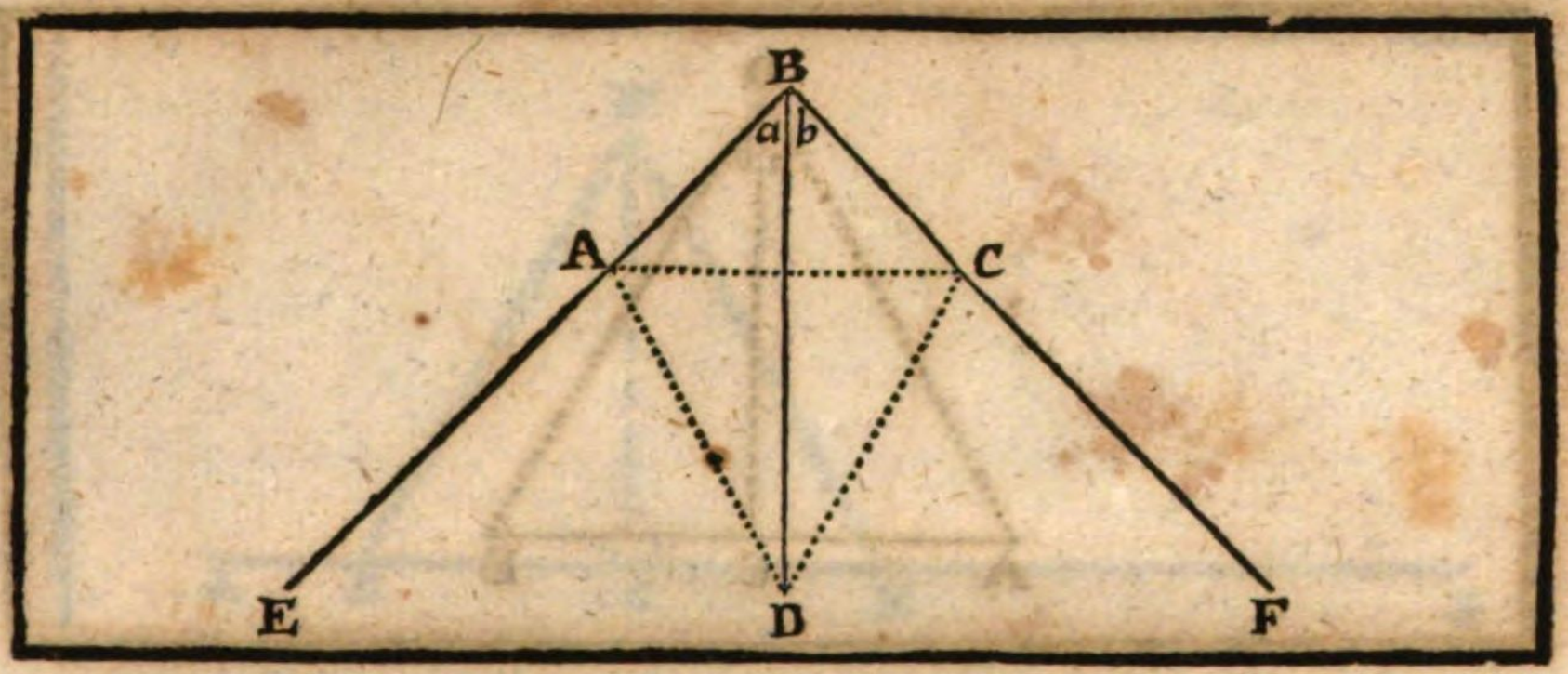
Betrachte im Sinne, als wenn der △ ABC auff den △ DEF geleget wäre.

Alsdann, weilen AB ⌐, ist der DE: — d. d. Vorg.
so werden sich beyde Linien durchauß auff einander schicken. — d. 8. ax.

Weilen auch AC ⌐, ist der DF, und BC ⌐, der EF. — d. d. Vorg.
so wird der Spitz, C gerad auff F zu liegen kommen, und nicht in einen andern Punct auffer; oder innerhalb deß △ DFE fallen.

Darumb so werden sich die △ ABC, und DEF durchauß zusammen schicken, und einander gleich seyn,
und folgends auch der ∠ b ⌐, dem ∠ e.
Item der ∠ a ⌐ dem ∠ d, und der ∠ c ⌐ dem ∠ f. } d. 8. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Vorgab.

Handgriff.

Einen gegebenen gerad-liniſchen Winckel (EBF) in zwey gleiche Theile zu ſchneiden.

Handgriff.

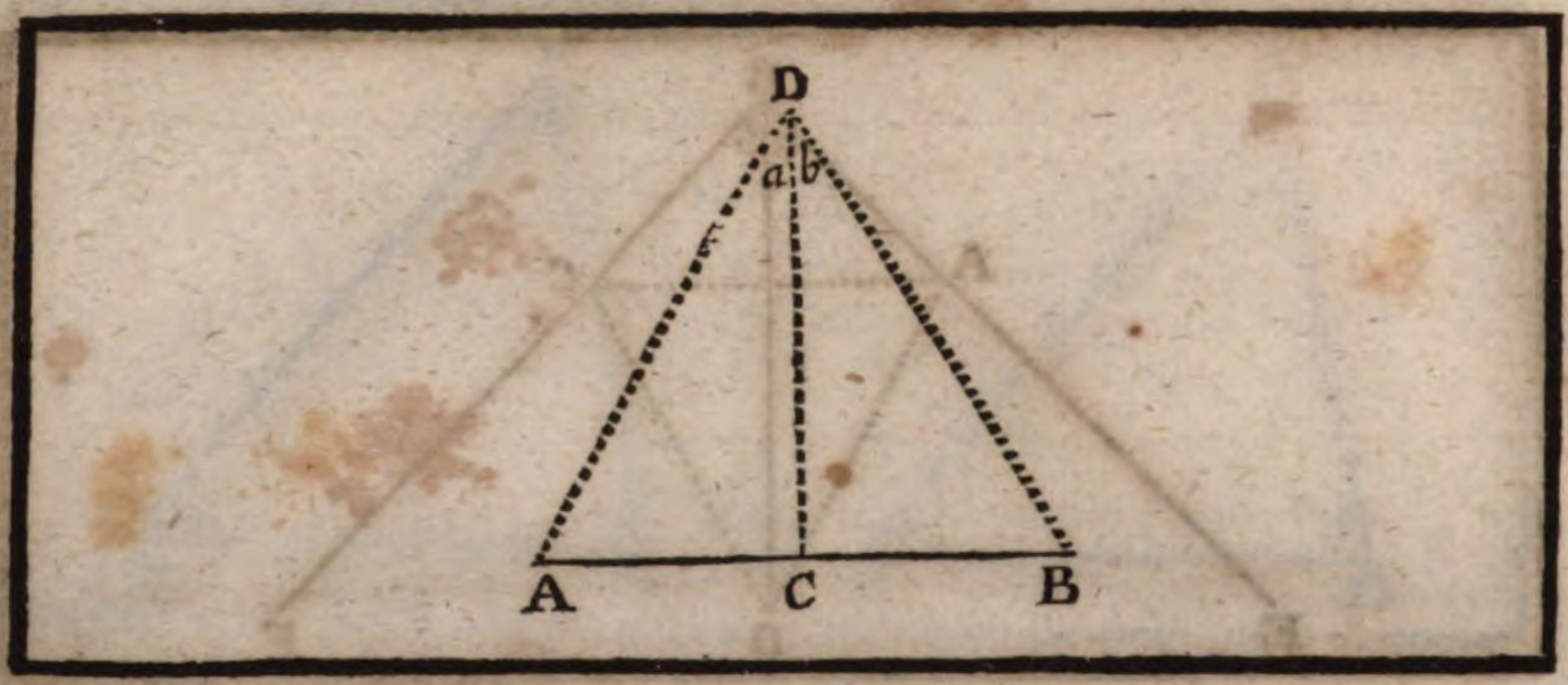
Mache AB ⊓, der BC. d. 3. 1.
Hange AC zuſammen.
Auff der Linie AC mache unter ſich den gleichſeitigen △ ADC. d. 1. 1.
Ziehe durch die Puncten B D eine gerade Linie, welche den gegebenen Winckel a + b gleich entzwey theilen werde.

Beweiß.

In dem △ ABD iſt AB ⊓, der BC in dem △ CBD. d. d. Handt.
Die Linie AD iſt auch ⊓, der Linie CD. d. 1. 1.
Und die Seiten BD iſt auch beyden △ gemein.
Darumb wird der ∠ a ⊓ ſeyn dem ∠ b. d. 8. 1.
Welches zu machen ware.

Folge.

Einen jeden gerad-liniſchen Winckel in gleiche Theile, als in 4. 8. 16. ſo fort, abzutheilen, iſt mehr nichts nöthig, als nur jederzeit den halben Winckel wiederum gleich entzwey zu ſchneiden.



Die X. Vorgab.

Handgriff.

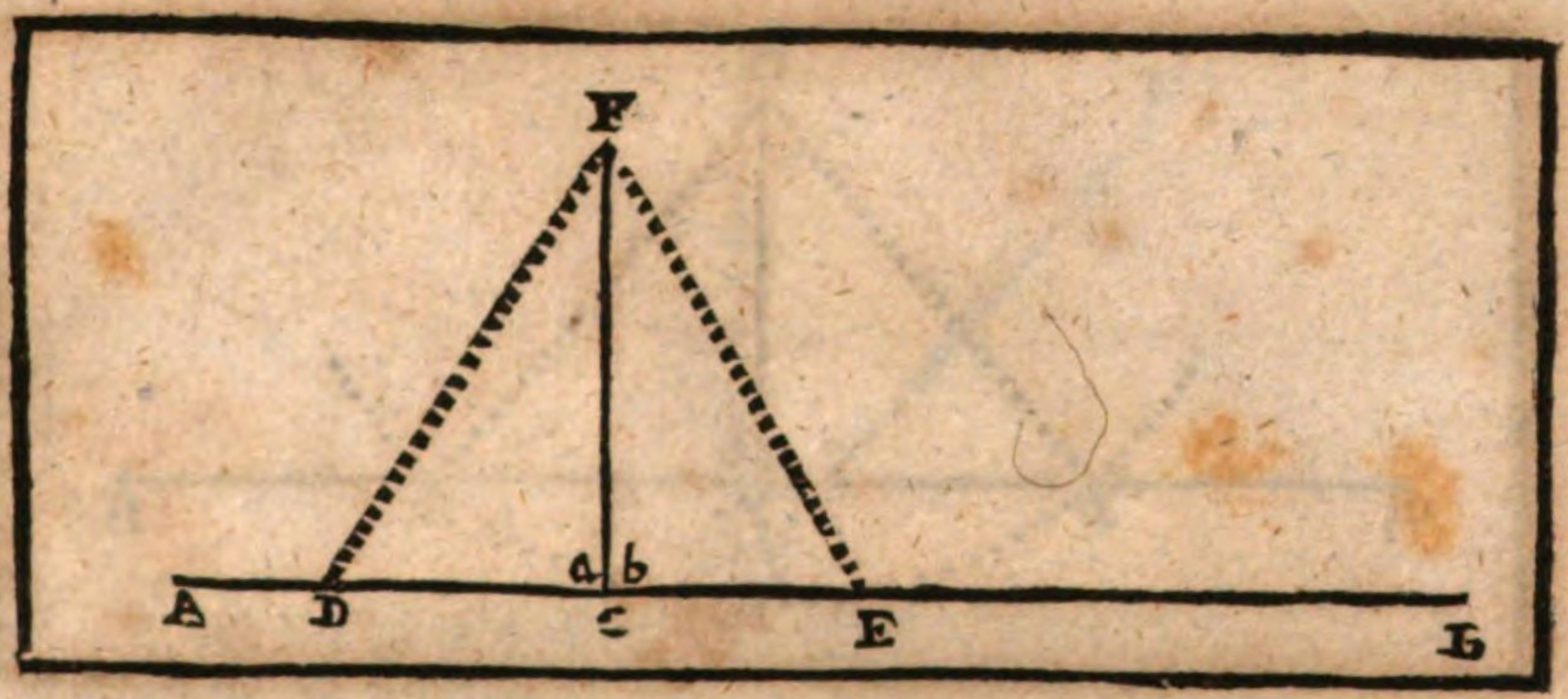
Eine gegebene gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile zu schneiden.

Handgriff.

Auff der Linie AB mache den gleichseitigen △ ADB, d. 1. 1.
Den Winckel a + b schneide gleich entzwey mit der geraden Linie DC, d. 9. 1.
Welche auch die gegebene Linie AB in Puncten C gleich entzwey schneiden werde.

Beweiß.

In dem △ ACD ist AD ⊓, DB in dem △ BCD. d. 1. 1.
Item die Seiten CD, ist beyden △ gemein.
und der ∠ a ist ⊓ gemacht worden, dem ∠ b. d. d. Hand.
So folget, daß die Basis AC ⊓ seye, der Basis CB. d. 4. 1.
Welches zu machen ware.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

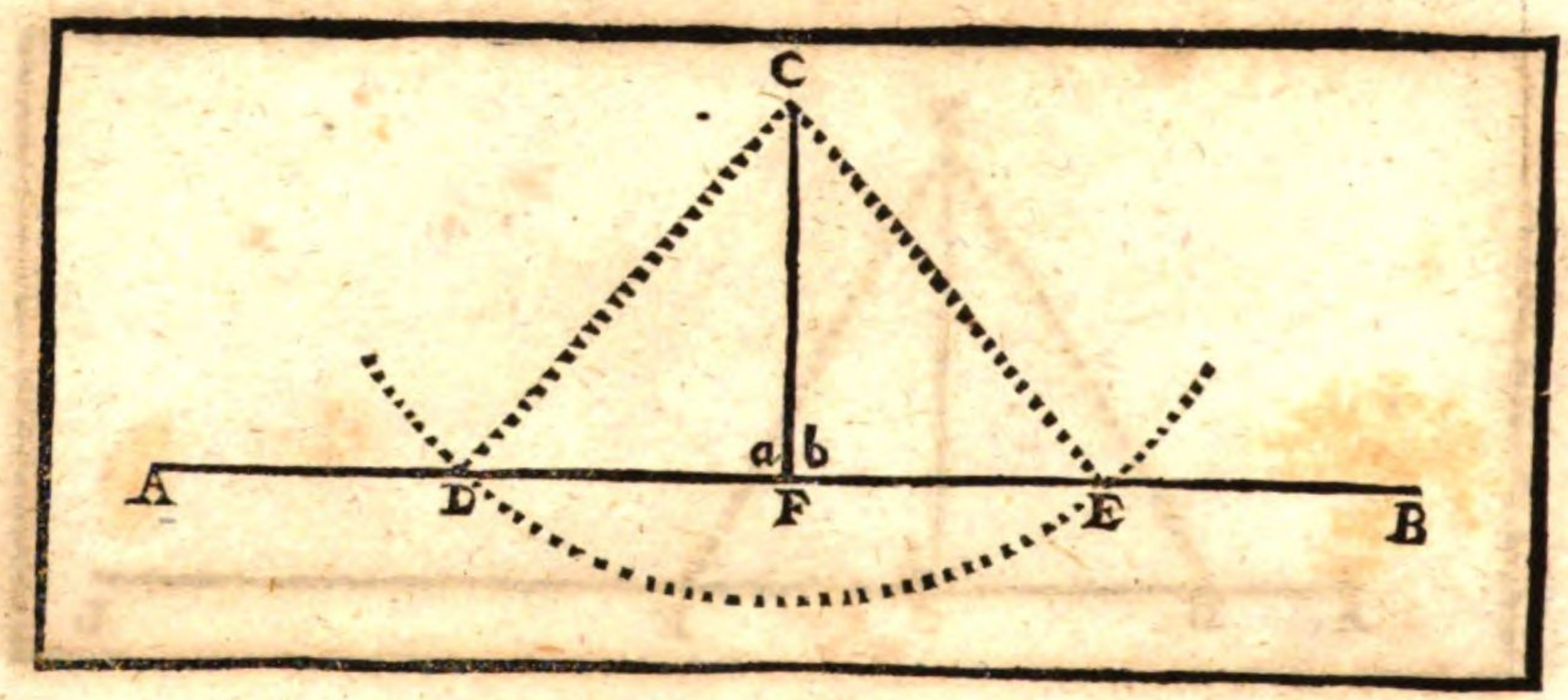
Auff einer geraden Linie (AB) auß einem gegebenen Puncten (C) eine bleyrechte Linie (CF) auffzurichten.

Handgriff.

Mache CD ⌐, CE. d. 3. I.
Auff der Weite DE mache den gleichseitigen △ DFE. d. 1. I.
Ziehe durch die Puncten F und C die gerade Linie FC,
welche die verlangte bleyrechte Linie seyn werde.

Beweiß.

In dem △ DCF ist CD ⌐, CE in dem △ ECF, d. d. Hand.
und DF ist ⌐, EF. d. 1. I.
die Seiten CF ist auch beyden △ gemein.
Dahero wird der gantze △ DCF ⌐ seyn, dem gantzen △ ECF. d. 8. I.
und folgends auch der ∠ a ⌐, dem ∠ b.
Deßwegen ist CF eine bleyrechte Linie. d. 10. def. I.
Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

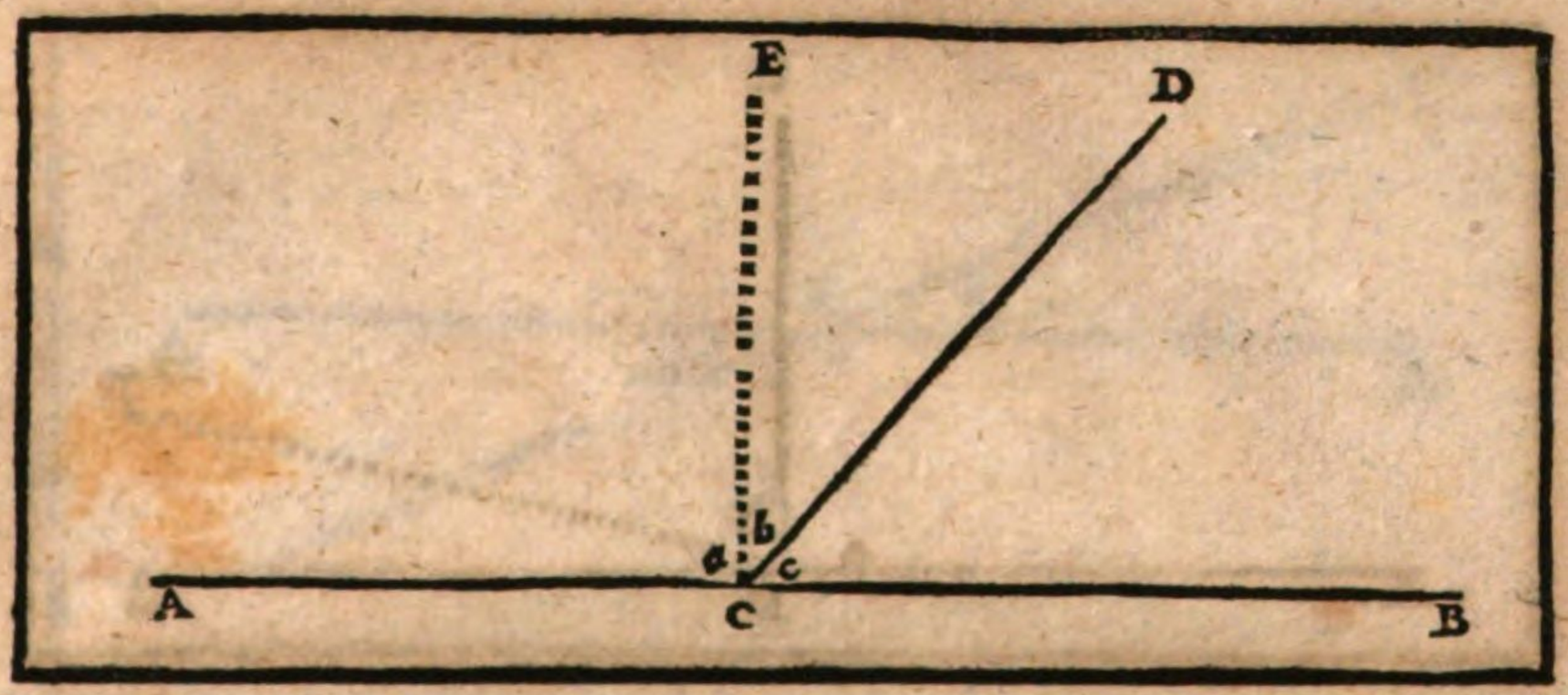
Auß einem gegebenen Puncten (C), welcher aufferhalb einer gegebenen geraden Linie (AB) ist, eine bleyrechte Linie (CF) auff solche (AB) herunter zu lassen.

Handgriff.

Auß dem Punct C schreibe nach Gebühr einen Circkel-Bogen, welcher die vorgegebene AB durchschneide in zweyen Puncten, als wie in D und E.
Zertheile DE in mitten entzwey im Puncten F. d. 10. I.
Ziehe die gerade Linie CF, welche die verlangte bleyrechte Linie seyn werde.

Beweiß.

Ziehe vorhero die Puncten CD. und CE. mit geraden Linien zusammen; nunmehro
In dem △ DFC ist DF ⊓, EF in dem △ EFC, d. d. Hand.
und DC ist ⊓, EC. d. 15. def. 1.
auch die Linie FC ist beyden △ gemein.
Darum wird der gantze △ DFC ⊓ seyn, dem gantzen △ EFC, d. 8. I.
und folgends der ∠ a ⊓, dem ∠ b.
Deßwegen ist die gerade Linie FC die bleyrechte Linie d. 10. def. X.
auff der gegebenen Linie AB.
Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (DC) auff einer andern geraden Linie (AB) ſtehet: ſo machet ſolche Linie (CD) zween Winckeln (a + b und c), welche, entweder zween rechte Winckeln, oder beyde zuſammen genommen, zween rechten gleich ſeynd.

Beweiß.

Wenn die gerade Linie CD auff AB ſtehet, und beyde Winckeln a + b, und c einander gleich machet: ſo iſt klar, daß beyde Winckel rechte Winckeln ſeynd. d. 10. def. 1.

Solte aber die gerade Linie CD zween ungleiche Winckeln machen, nemlich den ∠ a + b ⌐, als den ∠ c.

So erhöhe aus dem Punct C die bleyrechte CE. d. 1. 1.

Dieweilen nun denen zweyen ∠ b, und c ⌐ iſt, der Rechte ∠ b + c. nemlich die Theile ſeinem Gantzen.

Wenn man unterdeſſen, beyderſeits hinzuſetzet den rechten ∠ a.

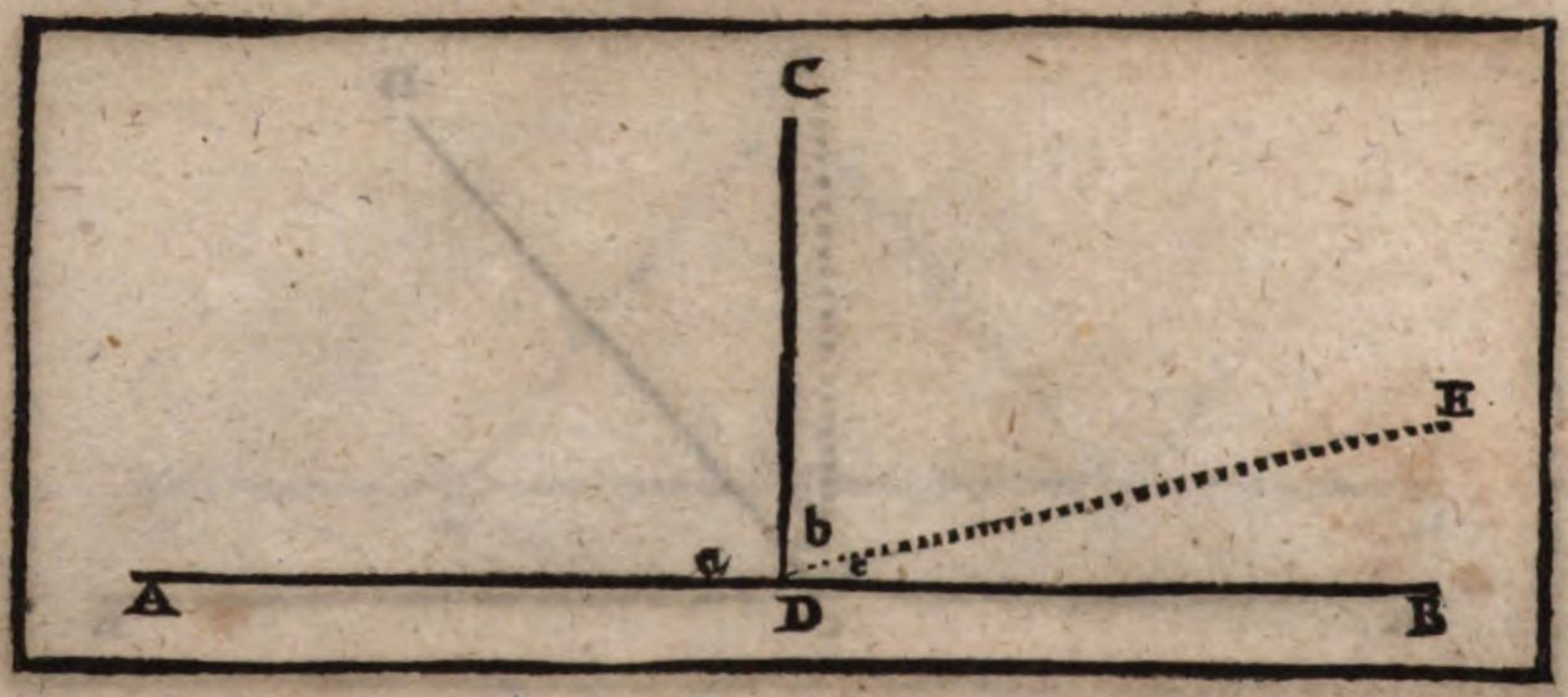
So werden ſo wohl die drey ∠ c, b, a ⌐ ſeyn, zweyen rechten ∠; als die zwey ∠ b + c und a.

Dann es iſt klar, daß die drey Winckel, c, b, a eben denſelben Raum, welchen die zween ∠ a, b + c, oder die zween ∠ a + b, c einnehmen, begreiffen.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Wann der eine Winckel c ein rechter iſt, ſo wird auch der andere Winckel a + b ein rechter ſeyn; wann er aber ein ſpitziger iſt: ſo werde der andere ein ſtumpffer Winckel ſeyn.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann auß einem Punct (D) in eine gegebene gerade Linie (DC) zwo gerade Linien (DA, DB:) nicht auff eine Seiten gezogen seynd, und hernachmahln die zween Winckeln (a und b + c) zween rechten Winckeln gleich groß gemacht haben: so werden sothane zwo Linien (DA, DB) schnur geradt ligen (das ist, die Linie ADB wird eine gerade Linie seyn.)

Beweiß.

Gesetzt, es wären die Linien AD, und DB nicht eine schnurgerade Linie: so seye dann eine solche eine andere, als wie DE, welche mit AD eine schnurgerade Linie machen solte.

Darauff folget, weilen die gerade Linie CD auff der vermeinten schnurgeraden Linie ADE stehet,
Daß die zwey ∠ a und b ⊓ seyn, zween rechten Winckeln. d. 13. 1.

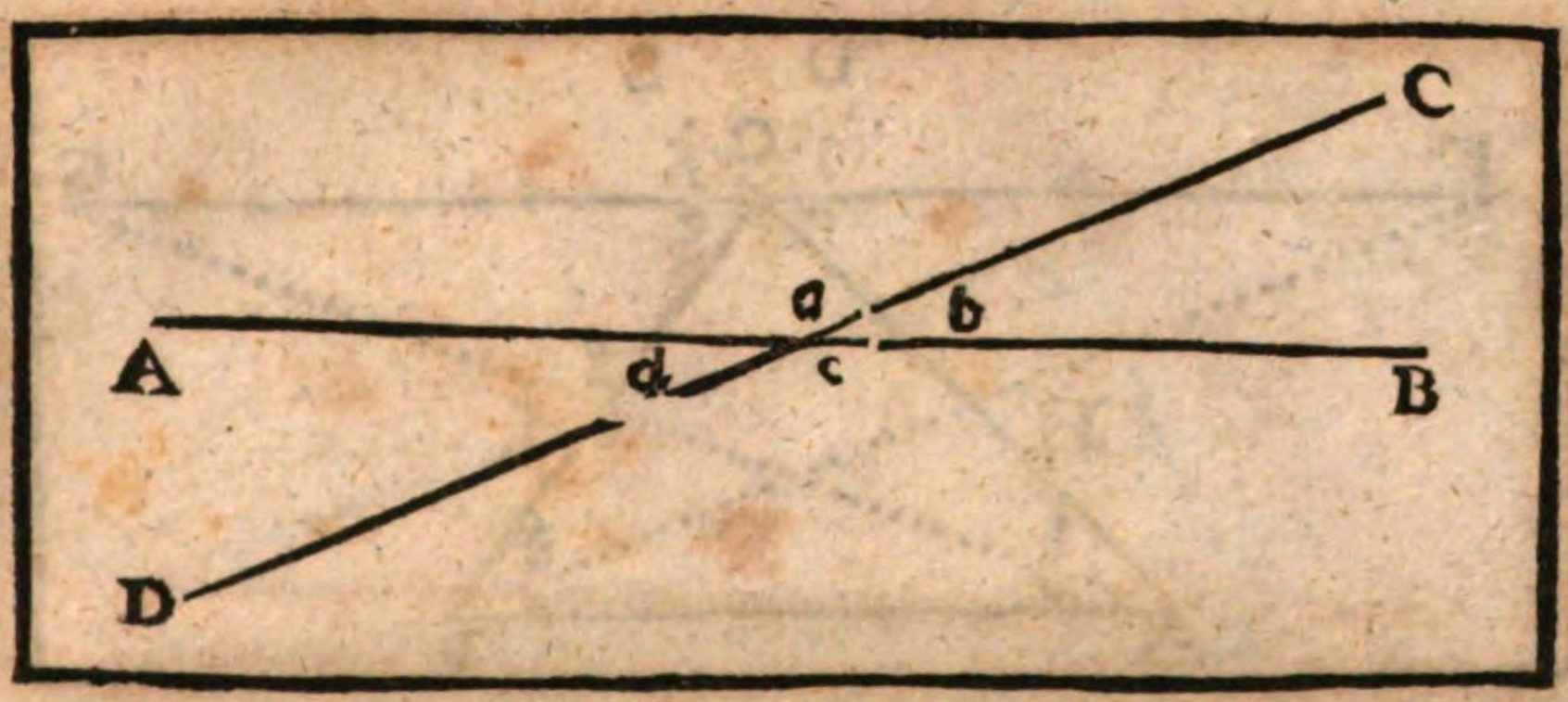
Nach der Vorgab aber seynd die ∠ a, und b + c auch ⊓, zween rechten Winckeln.

Wann man nun beyderseits den gemeinen ∠ a abziehet, so wird überbleiben der ∠ b ⊓, dem ∠ b + c.

Welches nicht möglich ist, daß nemlich ein Theil seinem gantzen gleich seye.

Darumben ist zu sagen, daß die Linie ADB allein dieselbe schnurgerade Linie seyn müsse. d. 9. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn zwo gerade Linien (AB, DC) sich einander durchschneiden, so werden sie die zween Winckeln (a und c, oder b und d), welche bey dem Punct der Durchschneidung gegen einander über stehen, einander gleich machen.

Beweiß.

Dieweilen CD auf AB stehet, so werden die zween ∠ a und b ⊓ seyn, zween rechten ∠. d. 13. 1.

Ebnermassen, weilen die Linie AB auff der Linie DC stehet, so werden die zween ∠ b und c ⊓ seyn, zween rechten ∠. d. 13. 1.

Wenn man unterdessen beyderseits den gemeinen ∠ b darvon ziehet; So wird überbleiben der ∠ a ⊓, dem ∠ c. d. 3. ax.

Nach solchem Beweiß wird auch der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ d.

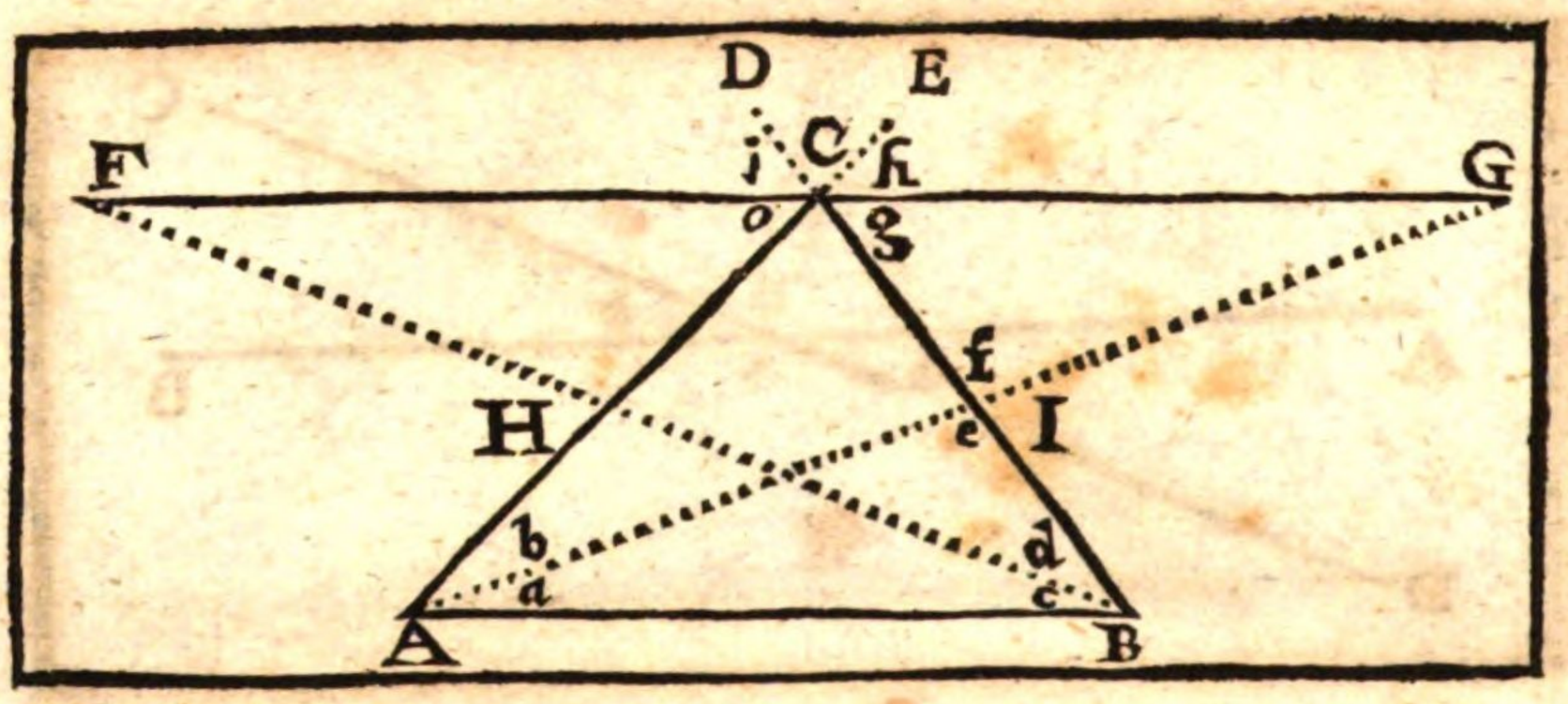
Welches zu beweisen war.

Folge. I.

Wenn zwo gerade Linien sich einander durchschneiden, so werden die vier ∠ umb den Durchschneids-Puncten, gleich vier rechten ∠ seyn.

II.

Alle Winckeln, so viel ihrer auf einem Punct mögen gezogen werden, machen sämmentlich nicht mehr, als nur vier rechte Winckeln.



Die XVI. Borgab.

Betrachtung.

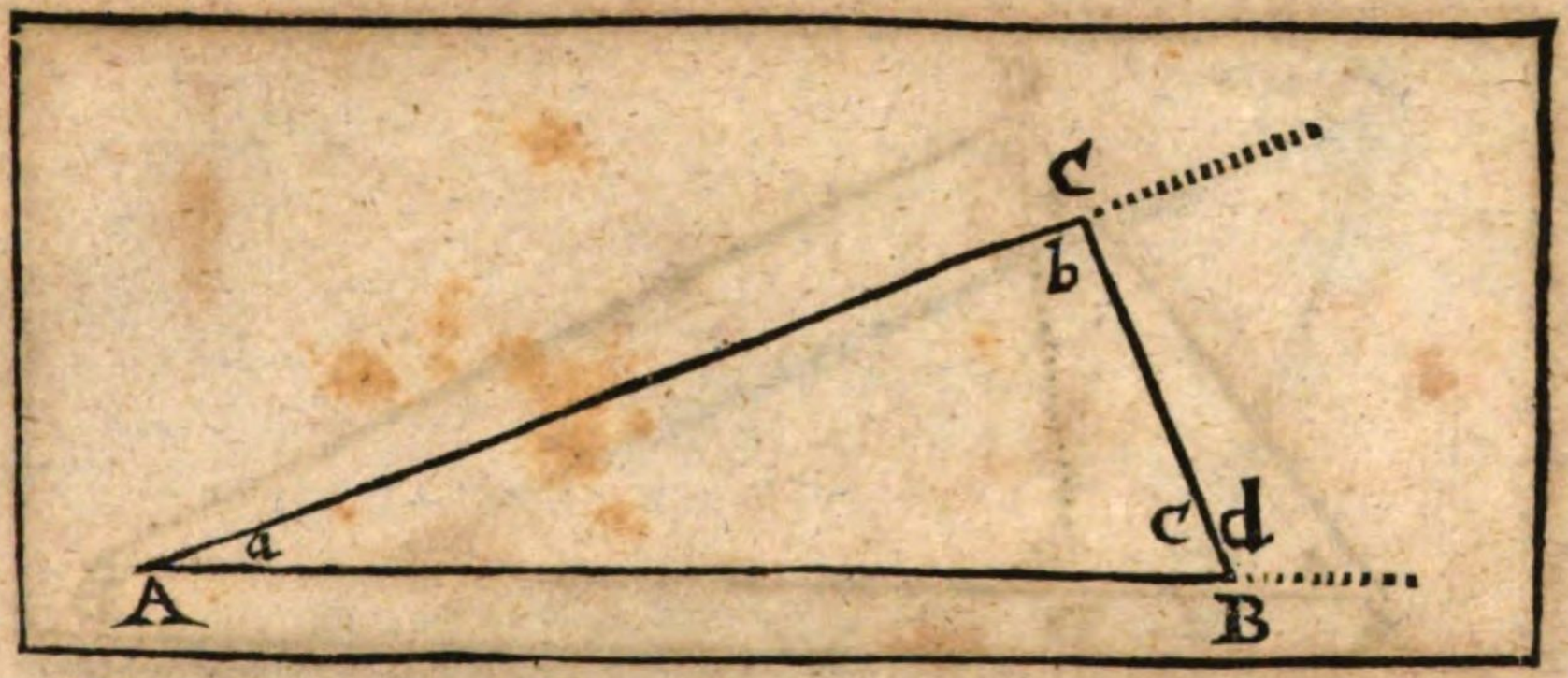
Wann eine Seiten (AC oder BC) eines Triangels (ABC) verlängert wird, (als wie in E oder D): so wird der außwendige Winckel (h + g, oder i + o) grösser seyn, als ein jeder von denen zween inwendigen Winckeln (b + a, oder d + c, die dargegen über stehen.

Zubereitung.

Zertheile so wol BC, als AC gerad entzwey in I und H. d. 10. 1.
Ziehe AIG, und BHF durch I und H so weit hinauß,
Biß IG ⊓ seye, AI; und HF ⊓, HB.
Hänge CG, CF zusammen.

Beweiß.

In denen zwey △ AIB, GIC ist BI ⊓, der CI. d. d. Zub.
und AI ⊓, IG · auch der ∠ e ist ⊓, dem ∠ f. d. 15. 1.
Dahero ist der gantze △ AIB ⊓, dem gantzen △ GIC, d. 4. 1.
und also folgends der ∠ c + d ⊓, dem ∠ g.
auff solche Weise ist in denen △ BAH, FHC der ∠ b + a ⊓, dem ∠ o.
Unterdessen ist der ∠ g + h ⊏ als sein Theil, nemlich als der ∠ g, d. 9. ax.
oder als der ∠ h, welcher sonsten ⊓ ist, dem ∠ o. oder b + a d. 15. 1.
Dahero wird auch der ∠ g + h ⊏ seyn, als der ∠ c + d, und die vor.
oder, als der ∠ a + b.
Welches zu beweisen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

In einem jeden Triangel (ABC) seynd zween Winckel, man nehme zusammen welche man wolle (als wie b und c), kleiner als zween rechte Winckeln.

Zubereitung.

Verlängere die Seiten AB, und AC.

Beweiß.

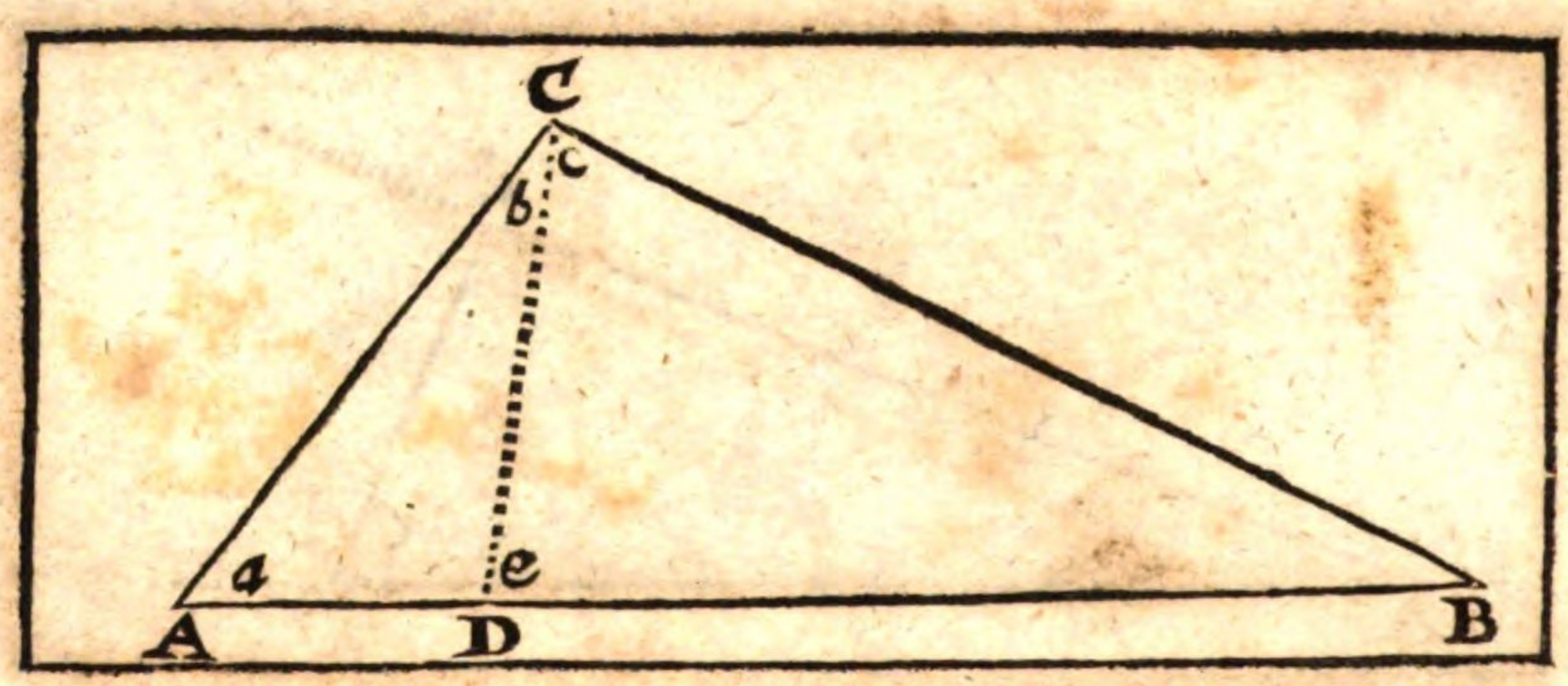
Der äuserliche ∠ d ist ⌜, als der innerliche ∠ b. d. 16. 1.
Setze beyderseits hinzu den gemeinen ∠ c.
So werden die zween ∠ d und c ⌜ seyn,
als die zweeu ∠ b und c. d. 4. ax.
Die zween ∠ d und c aber seynd ⌐, zween rechten ∠ d. 13. 1.
Darum werden die zween ∠ b und c ⌝ seyn, als zween Rechte ∠.
Welches zu beweisen ware.

Folge. I.

Wann in einem △ ein Rechter, oder stumpffer Winckel ist,
So werden die zween übrige, spitzige, oder scharffe ∠ seyn.

II.

In denen drey gleichseitigen △ seynd alle drey Winckel spitzig.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

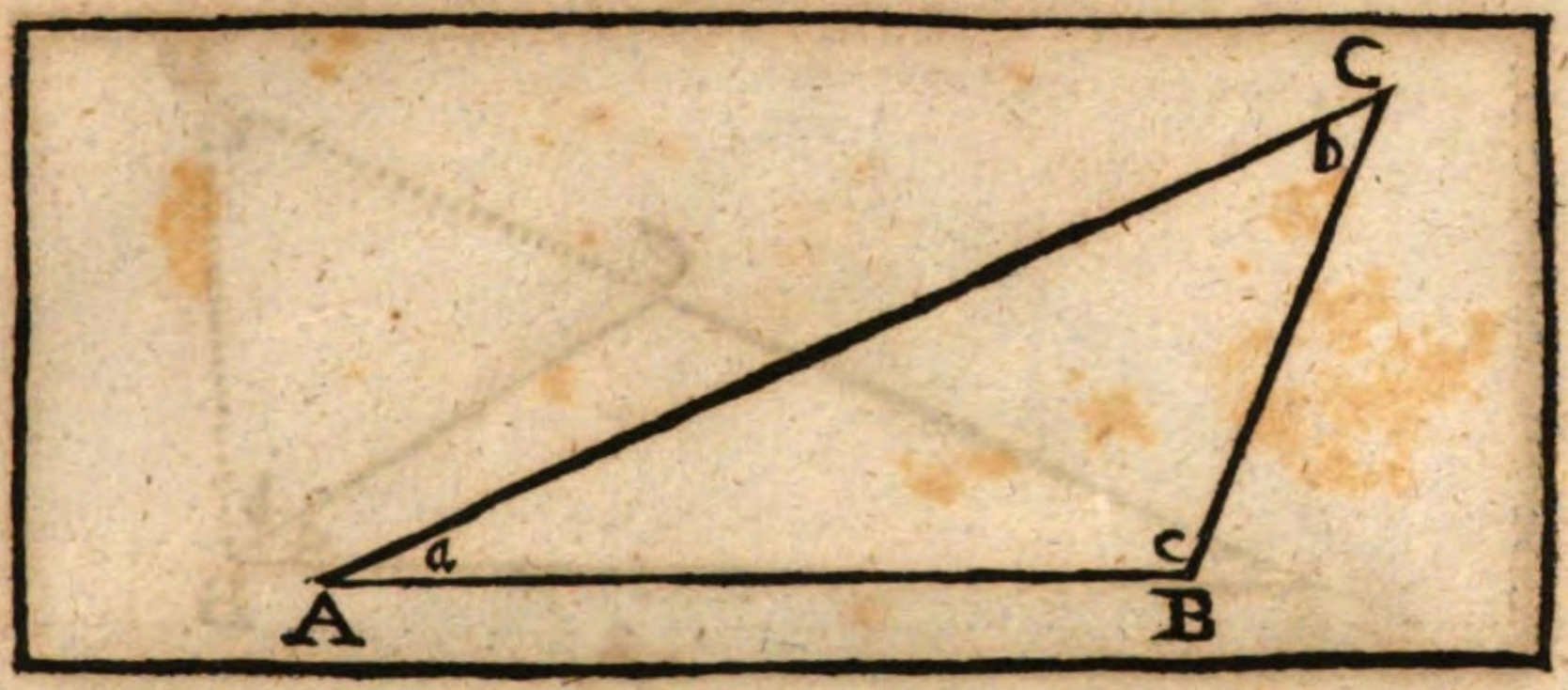
In einem jedwedern Triangel (ABC) unterspannet die längere Seite (AB) den grössern Winckel (b + c)

Beweiß.

Wenn man es nicht glaubet, sondern saget daß die kürtzere Seiten BC einen grössern ∠ a unterspanne.
So mache von B aus, das Stück BD ⌐, der Seite BC. d. 3. 1.
und ziehe DC. zusammen.
Weilen in dem △ CBD die Seite BD ⌐ ist, der Seiten CB, d. d. Zub.
so wird der ∠ e ⌐ seyn, dem ∠ c. d. 5. 1.
Der ∠ e aber, als ein außwendiger ∠, ist ⌐,
als der inwendige ∠ a allein.
Darum wird auch der Winckel c ⌐ seyn, als der ∠ a. d. 16. 1.
und folgends der gantze ∠ b + c noch viel ⌐, als der ∠ a. d. 9. ax.
Darauß man schliesset, daß also die kürtzere Seite BC
nicht von einem grössern, sondern von einem kleinern Winckel
unterspannet werde.
Das ist, der grössere ∠ b + c unterspannet die längere Seiten AB,
und der kleinere ∠ a die kürtzere CB.
Welches zu beweisen ware.

Folge.

In einem ungleichseitigen Triangel seynd alle drey Winckel
einander ungleich.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

In einem Triangel (ABC) unterspannet der grössere Winckel (C) die längere Seiten (AC).

Beweiß.

Solst du es aber nicht glauben, sondern sagen, daß die Seiten AC nicht länger, als AB, sondern derselben gleich seye.

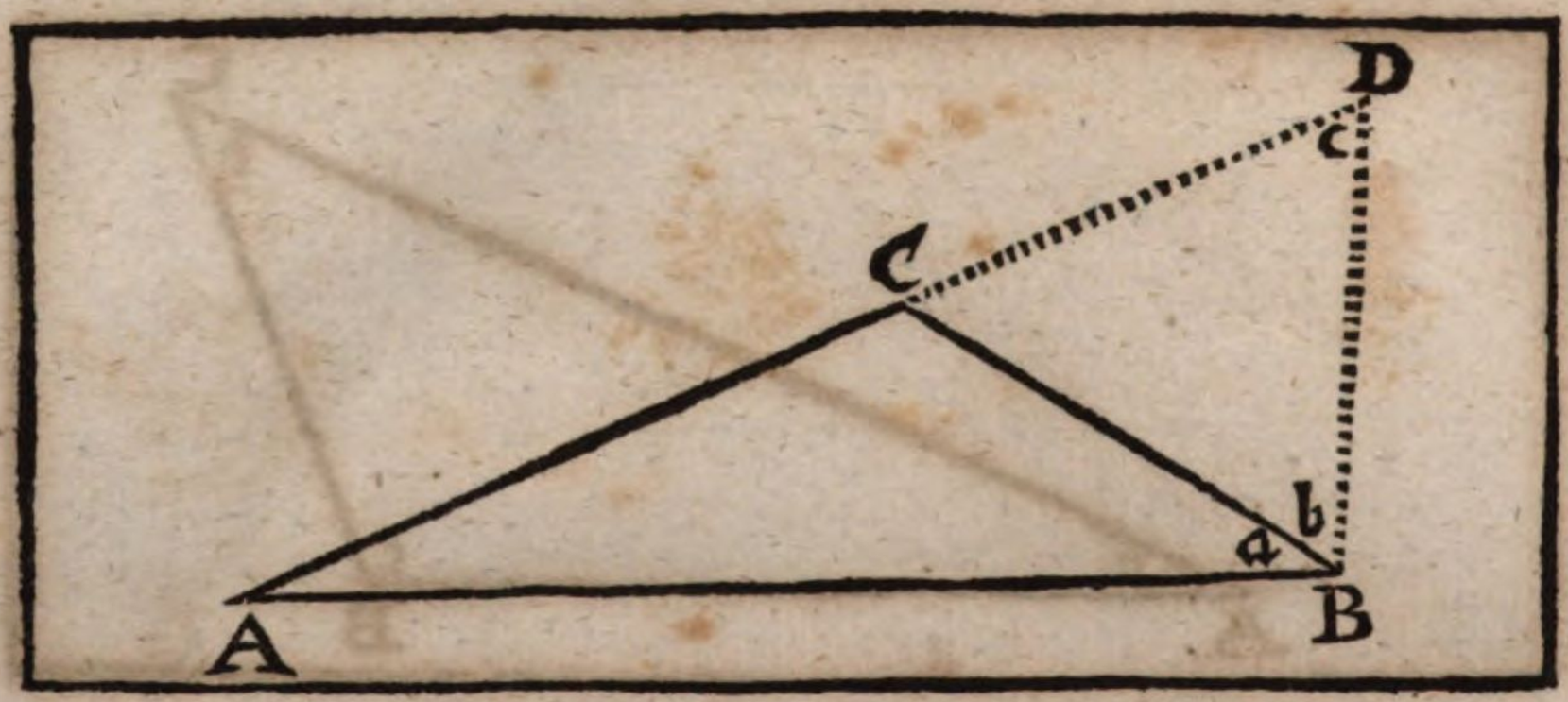
So folget stracks darauff, daß auch der ∠ c ⌐ seye, dem ∠ b. d. 5. 1.
so nicht seyn kan.

Dann der ∠ c gleich anfangs der grössere gegeben worden ist.

Solst du nun sagen, daß AC ⌐ wäre, als AB,
so folget, daß der ∠ c auch ⌐ wäre, als der ∠ b, d. 18. 1.
Welches eben wider die Vorgab streittet.

Dahero muß nothwendig die Seiten AC, welche den grössern ∠ c unterspannet, die längere Seiten in dem △ ABC seyn.

Welches zu beweisen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

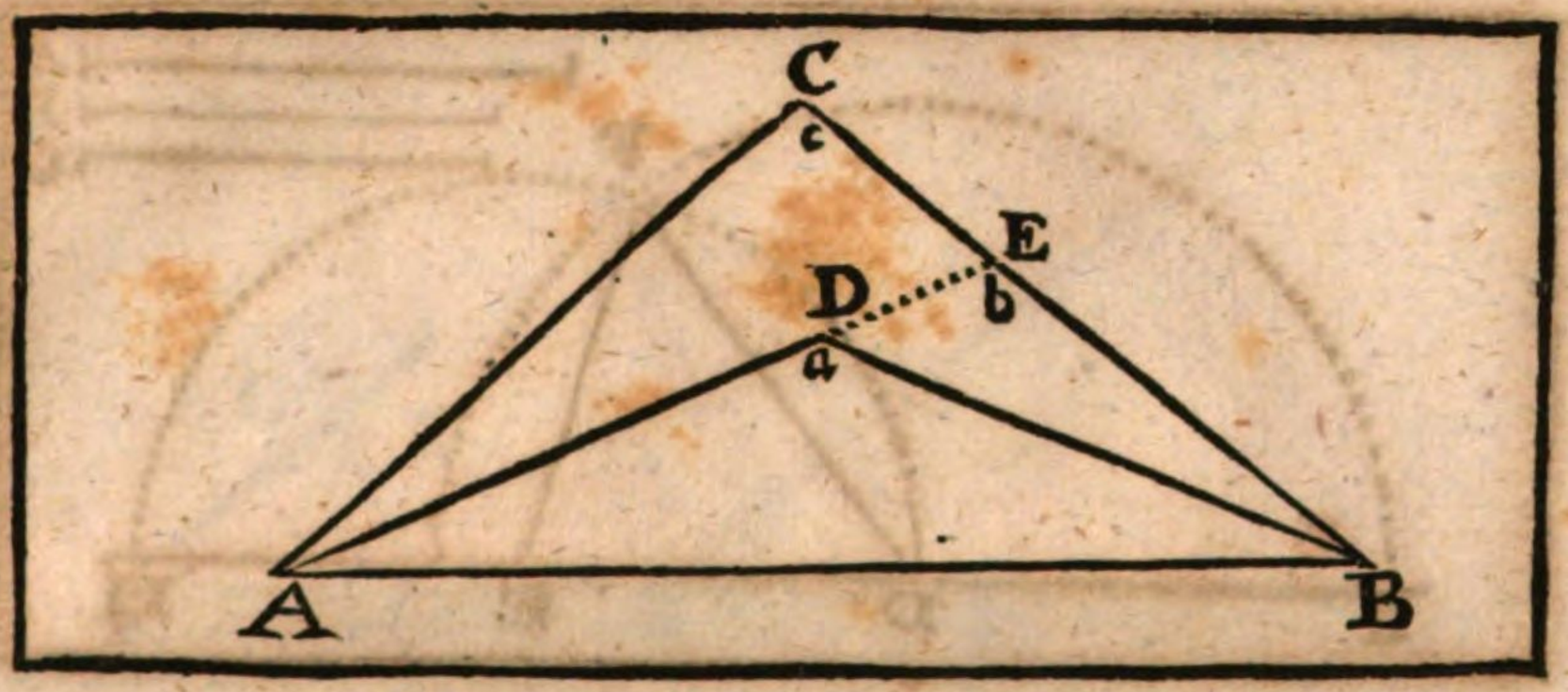
Eines jedwedern Triangels (ACB) zwo Seiten zusammen genommen, (als wie AC + CB) seynd grösser, als die dritte (AB) allein.

Zubereitung.

Verlängere AC, biß daß CD ⊓ seye, der Seiten CB.
ziehe DB zusammen.

Beweiß.

In dem △ BCD ist die Seiten CD ⊓, der Seiten CB. d. d. Zub.
Darumb wird der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ c. d. 5. 1.
Der ∠ b + a aber ist ⌐, als der ∠ b. d. 9. ax.
Folget, daß auch der ∠ b + a ⌐ seye, als der ∠ c.
Ein gröfferer Winckel aber unterspannet eine längere Seiten. d. 19. 1.
und ein kleinerer Winckel eine kleinere Seiten.
Darumb wird die Seiten AD ⌐ seyn, als die Seiten AB.
Die Seiten AD aber ist ⊓, denen zwo Seiten AC und CB. d. d. Zub.
Deßwegen werden die zwo Seiten zusammen genommen
⌐ seyn, als die dritte AB.
Welches zu beweisen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn auß beyden Enden einer Seiten (AB) eines Triangels (ABC), zwo Linien (AD, BD) innerlich gezogen werden, also, daß sie einen Triangel (ABD) machen: so werden solche zwo Linien (AD, und BD) kürtzer seyn, als die zwo Seiten (AC und CB) deß Triangels (ABC); der Winckel aber (a), so diese zwo kürtzern Seiten machen, wird grösser seyn, als der Winckel (c) deß Triangels (ABC).

Zubereitung.

Verlängere AD in die Seiten deß △ ACB, nemlich in E.

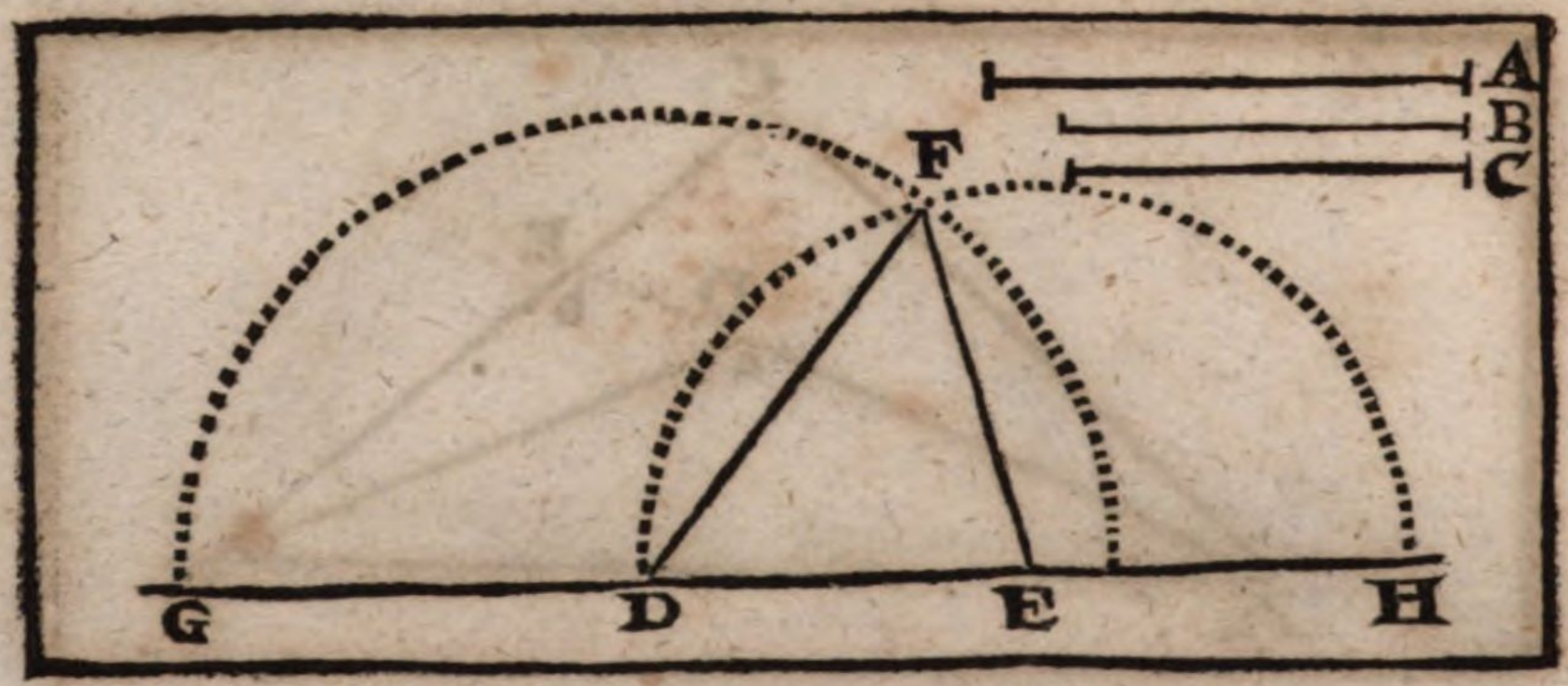
Beweiß.

I.

In dem △ AEC seynd die zwo Seiten AC, und CE ⌜, als AE. d. 20. 1.
setze hinzu beyderseits die gemeine Seiten EB.
So werden AC, und CE + EB, das ist CB, ⌜ seyn, als AE + EB. d. 4. ax.
Eben in dem △ BDE werden die zwo Seiten DE und EB ⌜ seyn, als DB. d. 20. 1.
setze hinzu beyderseits die gemeine AD,
So werden EB, und ED + AD, das ist AE ⌜ seyn, als DB + AD.
AC, und CB seynd aber bewiesen worden ⌜, als AE + EB. d. d. Vor.
Darum werden AC, und CB noch viel ⌜ seyn, als AD, und DB.

II.

Der äusserliche ∠ a ist ⌜, als der innerliche ∠ b. d. 16. 1.
Dieser ∠ b aber, als ein äusserlicher, ist auch ⌜, als der innerliche ∠ c. d. d. selbe.
Dahero wird der ∠ a noch viel ⌜, als der ∠ c seyn.
Welches zu beweisen ware.



Die XXII. Vorgab.

Handgriff.

Auß drey gegebenen geraden Linien (GD, DE, EH), welche gleich seynd drey andern gegebenen geraden Linien (A, B, C,) einen Triangel (DEF) zu machen; es müssen aber allzeit zwo Linien zusammen genommen, länger als die dritte seyn.

Handgriff.

Denen gegebenen A, B, C nemme nach einander gleich die Linien GD, DE, FH geradt in einer Linie fort. d. 3. 1.

Auß D mit der Weite GD, schreibe einen Circkel GF. d. 3. post.

Item auß E mit der Weite EH schreibe einen andern Circkel, welcher den ersten durchschneidet in F.

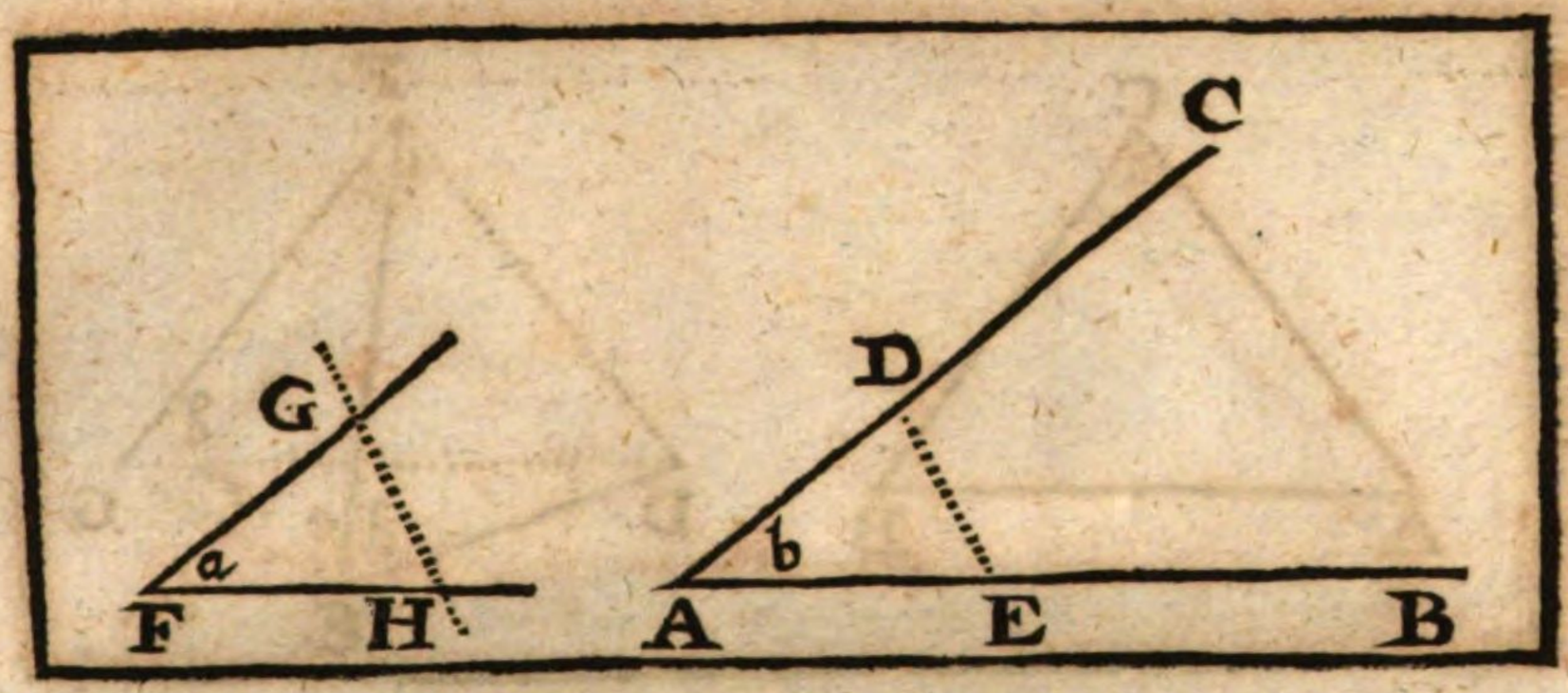
Ziehe zusammen FD, und FE, so ist der △ DEF gemacht.

Beweiß.

In dem △ FDE ist die Seiten DF ⊓ der DG, oder der Linie A
Die Seiten FE ist ⊓ der EH, oder der Linie C. } d. 6 Hand. d. 15. def. 1.
und letzlich DE ist ⊓ gemacht worden, der Linie B.

Dahero ist der △ DEF auß denen vorgegebenen drey Linien verfertiget worden.

Welches zu machen ware.



Die XXIII. Vorgab.

Handgriff.

Auß einem gegebenen Punct (A) auff einer gegebenen geraden Linie (AB) einen geradliniſchen Winckel (b) zu machen, welcher einem vorgegebenen Winckel (a) gleich groß ſeye.

Handgriff.

Ziehe überzwergs nach Gefähr die gerade Linie GH, welche die beyde Seiten deß ∠ a durchſchneide in denen Puncten GH.

Mache AE ⊓, der FH. d. 3. I.

Hernachmahlen auff AE mache den △ AED ⊓, dem △ FHG, d. 22. I.
alſo, daß die Seiten AD ⊓ ſeye, der Seiten FG,
und ED ⊓, der GH.

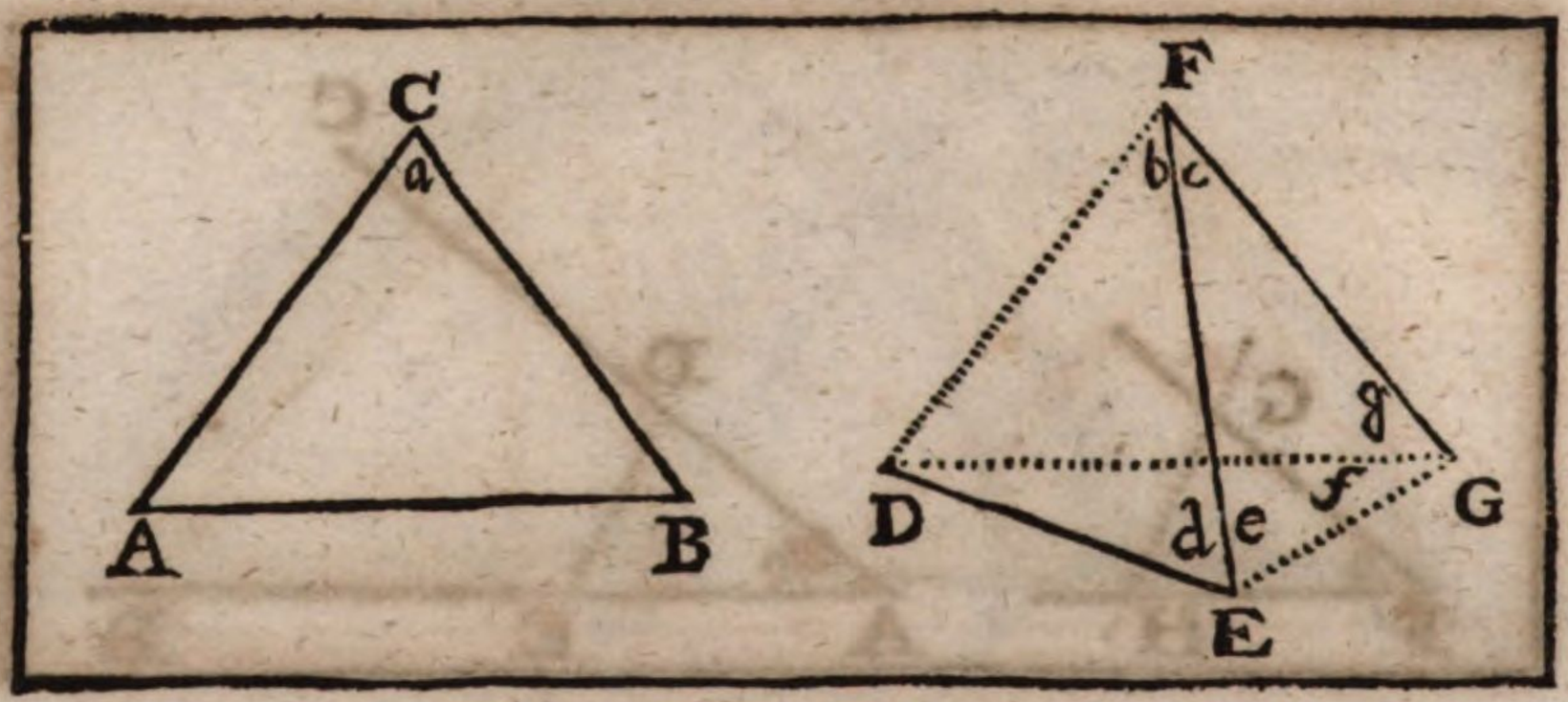
So wird der ∠ b ⊓ gemacht worden ſeyn, dem ∠ a.

Beweiß.

Es iſt klar aus vorgemachtem Handgriff, weilen alle drey Seiten AE, ED, DA ⊓ ſeynd gemacht worden denen drey Seiten FH, HG, GF.

Daß der △ AED ⊓ ſeye dem △ FHG. d. 8. I.
und folgends der ∠ b ⊓ dem ∠ a.

Welches zu machen ware.



Die XXIV. Vorgab.

Betrachtung.

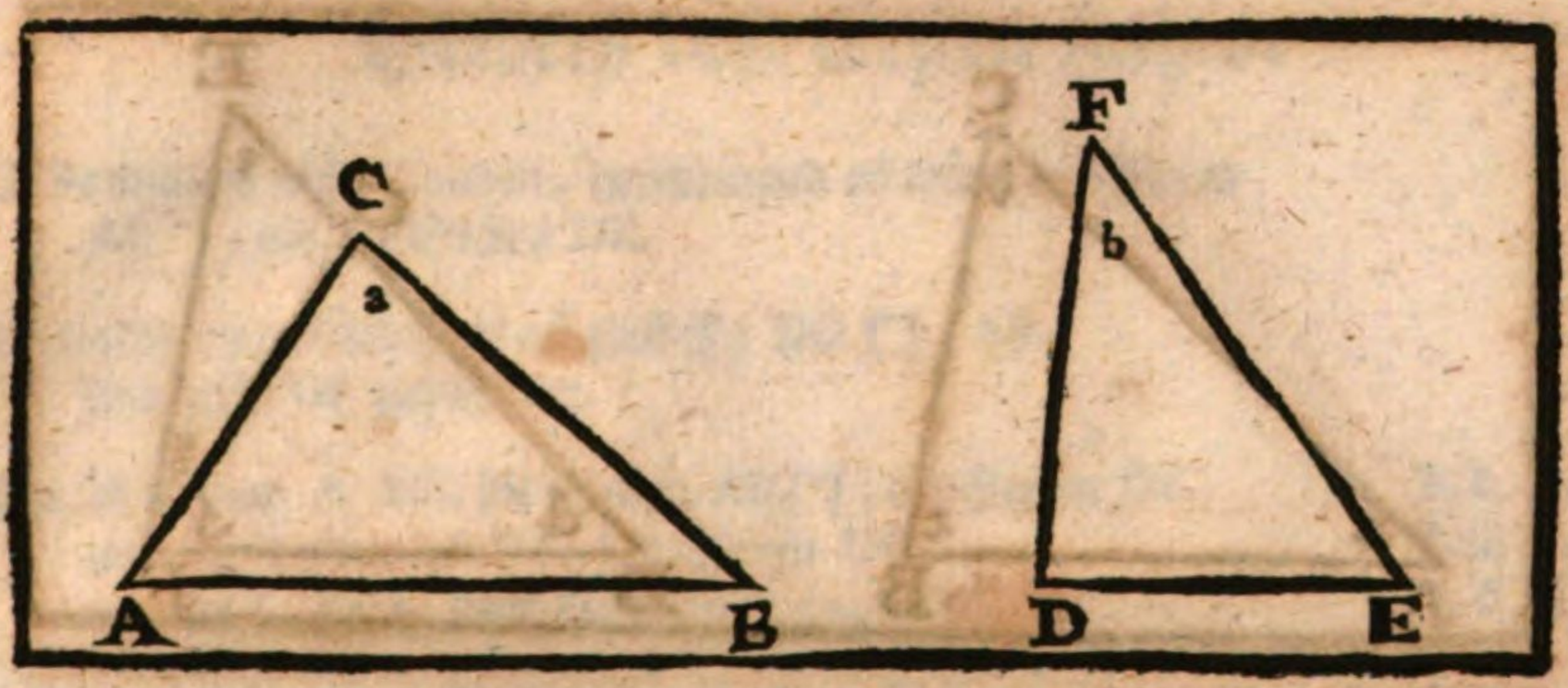
Wenn ein Triangel (ABC) zwo Seiten (AC und BC) gleich hat andern zwo Seiten (DF und EF) eines andern Triangels (DEF, das ist, AC ⊓, DF; und BC ⊓, EF) der eine Winckel aber (a) grösser ist als der andere (b): so wird auch die eine Basis (AB) länger seyn, als die andere (DE).

Zubereitung.

Auß dem Punct F, auff der Linie DF, mache den ∠ b + c ⊓, dem ∠ a. d. 23. I.
Die Seiten FG aber ⊓, der Seiten FE, oder CB,
So wird folgends die Basis DG ⊓ seyn, der Basis AB d. 4. I.
Ziehe unterdessen zusammen DG, und EG.

Beweiß.

Wegen deren gleichen Seiten EF, und GF
wird der ∠ g + f ⊓ seyn, dem ∠ e. d. 5. I.
Der gantze ∠ d + e aber ist Γ, als der ∠ e. d. 9. ax.
Darum wird der ∠ d + e auch Γ seyn, als der ∠ g + f:
Und so fort wird der ∠ d + e noch viel Γ seyn, als der ∠ f allein.
Darauß folget, daß die Linie DG (welche ⊓ ist, der Basis AB) d. d. Zub.
auch grösser seye, als die Basis DE. d. 19. I.
Welches zu beweisen ware.



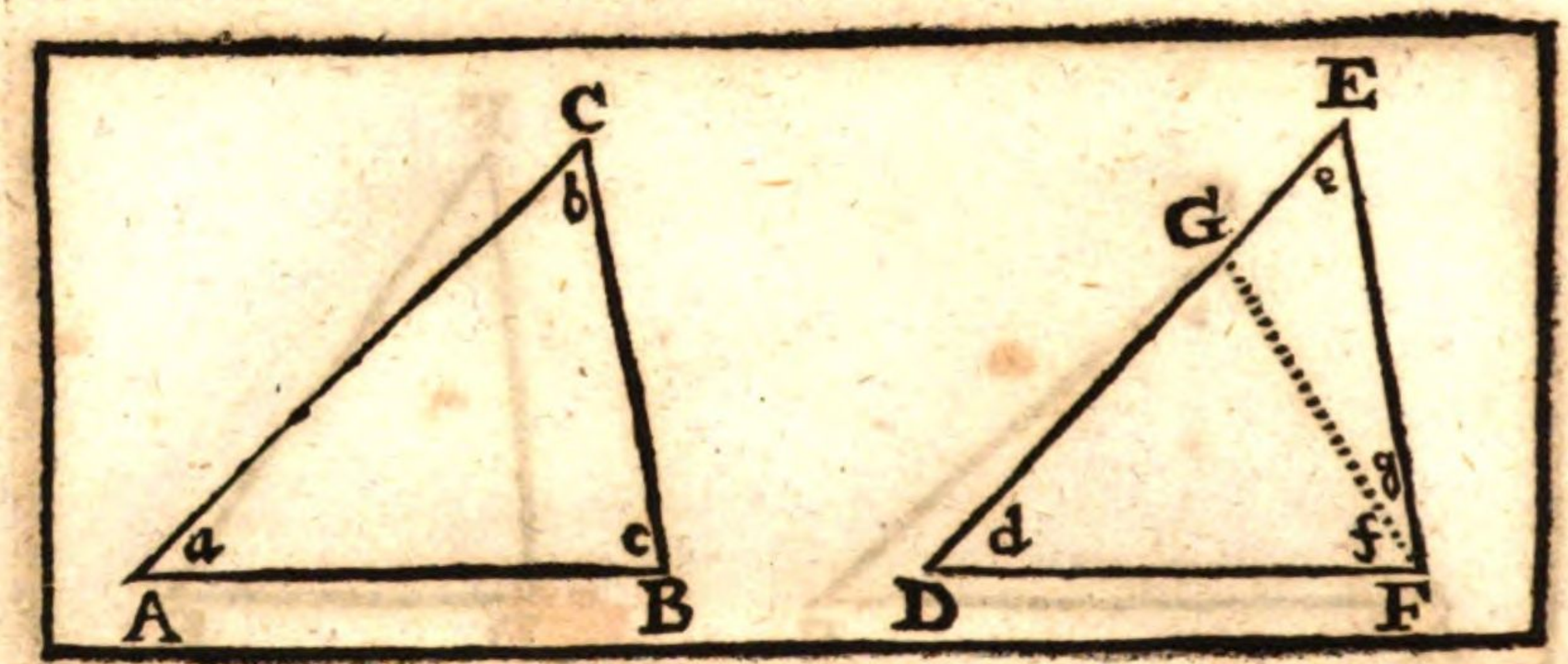
Die XXV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ein Triangel (ABC) zwo Seiten (CA, CB) zweyen andern Seiten (DF, FE) eines andern Triangels (DEF), eine jede der andern insonderheit gleich hat (nemlich AC ⌐, DF; und CB ⌐ FE), die eine Basis (AB) aber länger ist, als die andere Basis (DE): so wird auch der eine Winckel (a), welcher von der längern Basis (AB) unterspannet ist, grösser seyn, als der andere Winckel (b), welcher von der kürtzern Basis (DE) unterspannet ist.

Beweiß.

Gesetzt man sage, daß der ∠ a nicht ⌐ seye, als der ∠ b,
So muß er entweders ihme ⌐, oder kleiner seyn.
Solte er nun ⌐ seyn, dem ∠ b,
so folgete, daß die Basis AB ⌐ wäre, der Basis DE, d. 4. I.
Welches aber wider die Vorgab streitet.
Solte aber der ∠ a ¬ seyn, als der ∠ b,
so würde auch die Basis AB ¬ seyn, als die Basis DE, d. 24. I.
Welches eben wider die Vorgab streitet.
Dahero muß noch nothwendig der ∠ a ⌐ seyn,
als der ∠ b.
Welches zu beweisen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Triangel (ABC) zween Winckel (a und c) andern zweyen Winckeln (d und f + g) in einem andern Triangel (DEF), ein Winckel dem andern insonderheit, gleich seynd, und auch eine Seiten eines Triangels gleich ist einer Seiten deß andern, sothane Seiten mögen hernachmahlen zwischen denen gleichen Winckeln liegen, oder von einem unter denselben gleichen Winckeln unterspannet seyn: so werden auch die übrige zwo Seiten eines Triangels denen zwo übrigen Seiten deß andern Triangels, und auch der dritte übrige Winckel eines, dem dritten übrigen Winckel deß andern, und so fort der gantze Triangel (ABC) dem gantzen Triangel (DEF) gleich seyn.

Gegenwärtige Vorgab hat zween Fähle. In dem ersten können die gleiche Seiten zwischen denen zweyen gleichen Winckeln liegen: und in dem anderten können sie nicht zwischen denen gleichen zwey Winckeln liegen, sondern nur von einem dergleichen Winckeln unterspannet seyn.

Seye dahero der △ ABC, dessen ∠ a und c ⊓ seynd, denen ∠ d und g + f in dem △ DEF;

Und die Seiten AB, so zwischen denen gleichen ∠ a und c liget, seye ⊓, der Seiten DF, welche eben zwischen denen gleichen ∠ d und f + g liget.

Demnach sagt man, daß auch die übrige zwo Seiten AC, und CB ⊓ seyn, denen übrigen zwo Seiten DE, und EF, und der ∠ b ⊓, dem ∠ e.

Beweiß

Beweiß deß Ersten Fahls.

Wolte man es nicht glauben, vermeinend es wäre die Seiten AC ⌉, als die Seiten DE.

So mache dann (wann es möglich ist) DG ⌈⌉, AC. und ziehe GF zusammen.

Nun ist in dem △ ABC die Seiten AB ⌈⌉, der Seiten DF. d. d. Vorg.
und die Seiten AC ⌈⌉, der Seiten DG. d. d. Zub.
und der ∠ a ⌈⌉, dem ∠ d. d. d. Vorg.

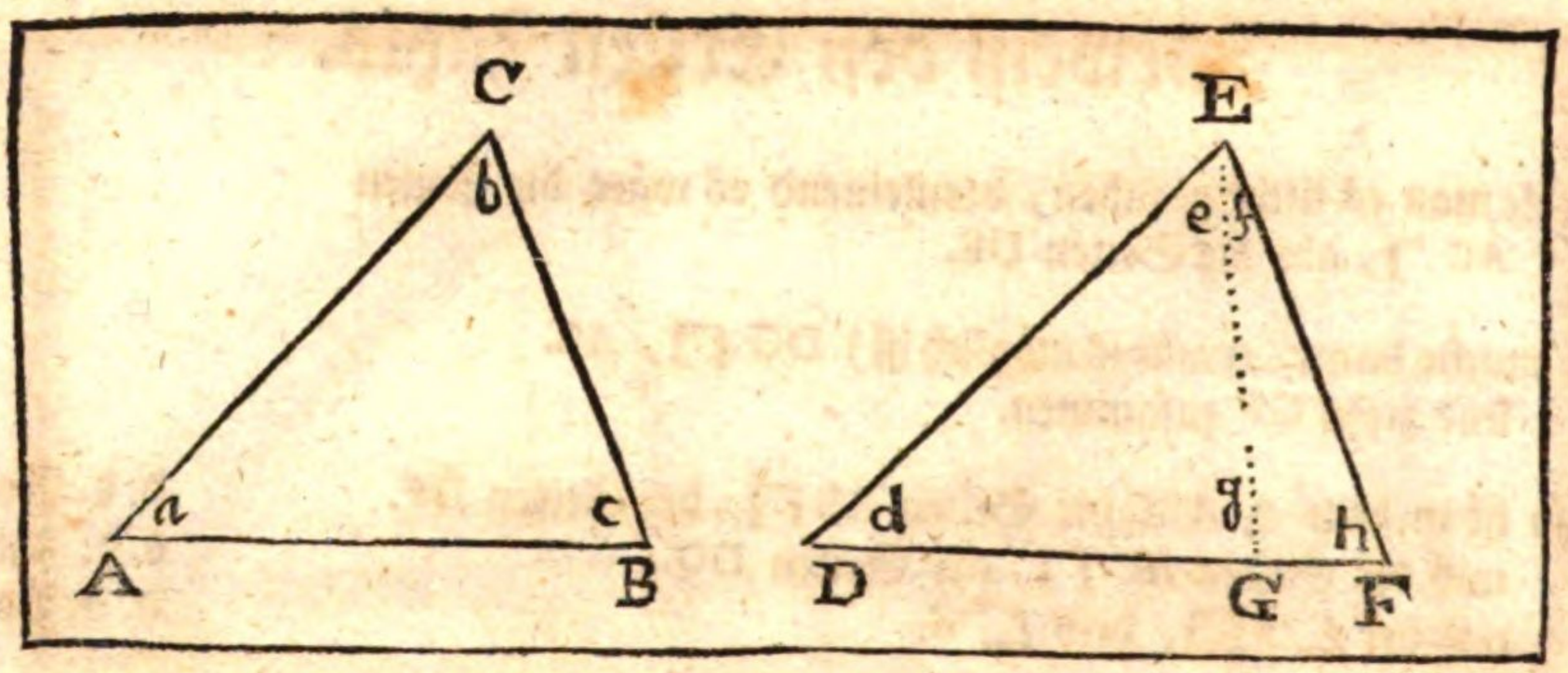
Dahero auch der ∠ c ⌈⌉ seyn werde, dem ∠ f. d. 4. I.
der ∠ c aber ist anfangs gesetzt worden ⌈⌉, dem ∠ g + f.

Deßwegen unmöglich ist, daß der ∠ c zugleich dem Theil f. und dem gantzen g + f auff einmal gleich seyn solte.

Darauß man schliesset, daß die Seiten AC nicht kürtzer, als DE seye: Grösser kan sie auch nicht seyn, sonsten man eben in dergleichen Unmöglichkeit fahlete.

Dahero schliesset man, daß gestalt solcher Sachen, die beyde Seiten eines Triangels denen beyden Seiten deß andern, und letzlich der dritte Winckel eines, dem dritten Winckel deß andern gleich, und so fort der gantze Triangel ABC gleich dem gantzen Triangel DEF seye. d. 8. I.

Welches zum ersten zu beweisen ware.



In dem anderten Fall.

Seye die Seiten AC, so von dem ∠ c unterspannet wird, gleich der Seiten DE, welche auch von dem gleichen ∠ h unterspannet ist, (und wie vorgehends) seye auch der ∠ a ⌐ dem ∠ d.

So sage ich, daß auch die zwo übrige Seiten CB und AB ⌐ seyn werden, denen zwo übrigen Seiten FF, und DF. und der ∠ b ⌐, dem ∠ e + f.

Solte man es nicht gestehen, sondern einwenden, es wäre AB ¬, als DF.

So mache, (wan es möglich ist) DG ⌐, AB.

Beweiß.

Dieweilen die zwo Seiten AC, und AB ⌐ seyn, denen zwo Seiten DE, uud DG: und der ∠ a ⌐, dem ∠ d.	d. d. Vorg. / d. d. Zub.
So wird auch der ∠ c ⌐ seyn dem ∠ g.	d. 4. 1.
Der ∠ c aber ist anfangs ⌐ gesetzet worden, dem ∠ h.	d. d. Vorg.
Dahero der ∠ g auch ⌐ ist, dem ∠ h, nemlich	d. 1. ax.
Der äusserliche den innerlichen, so nicht seyn kan.	d. 16. 1.

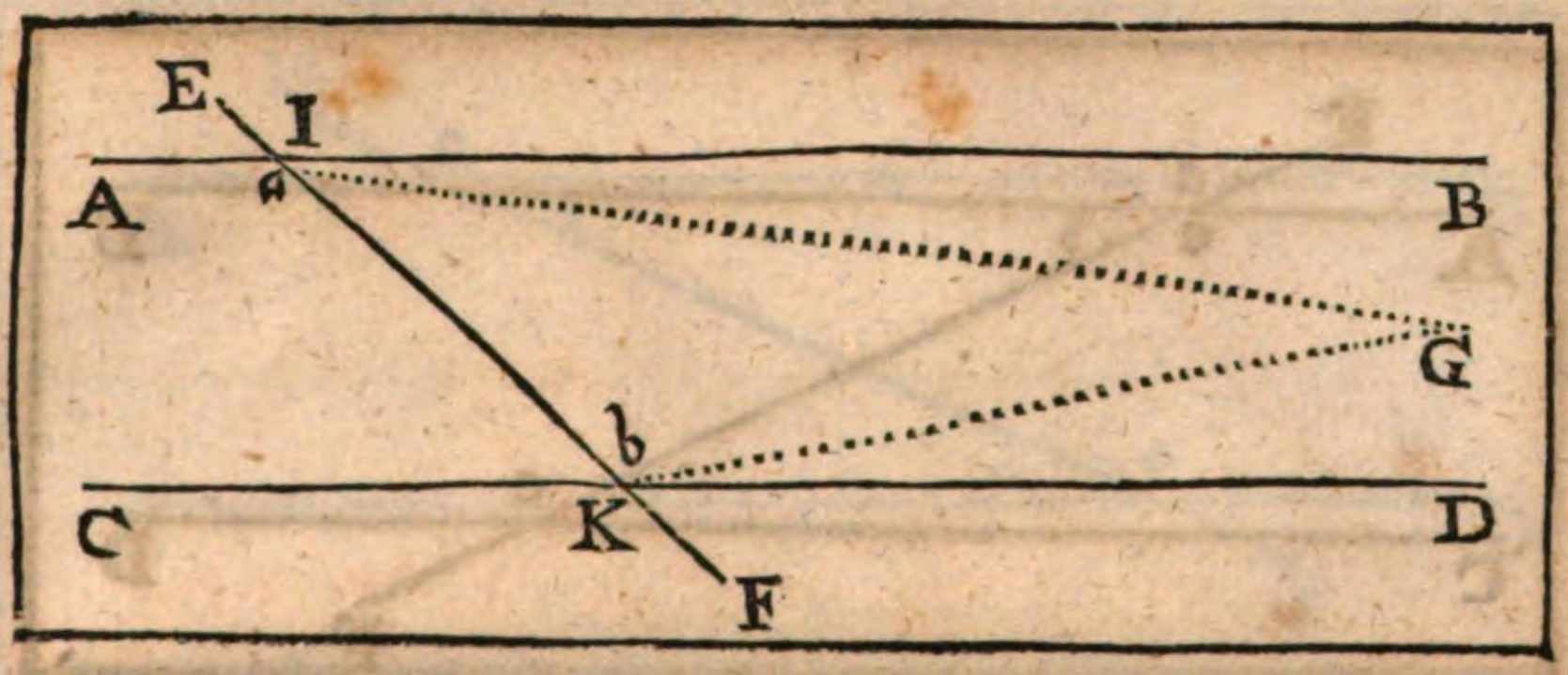
Darumb ist die Seiten AB nicht ¬, als die Seiten DF.

Sie kan auch nicht ⌐ seyn, als DF. sonsten käme man in die erste Unmöglichkeit hinein.

Darauß ist dann zu schliessen, daß die zwo Seiten AB und CB ⌐ seynd denen zwo Seiten DF und EF, auch der ∠ b ⌐, dem ∠ e + f.

Und also der gantze △ ABC ⌐, dem gantzen △ DEF.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (EF) über zwo andere gerade Linien (AB, CD) überzwerg gezogen wird, und die Winckeln (a und b) umwexlender Weise einander gleich machet: so werden solche zwo Linien (AB, CD) einander Parallel, oder gleichlauffend seyn.

Beweiß.

Gesetzt, man sagete, daß die Linie AB nicht = wäre der Linie CD.
so müssen sie nothwendig einmal zusammen kommen. d. II. ax. I.

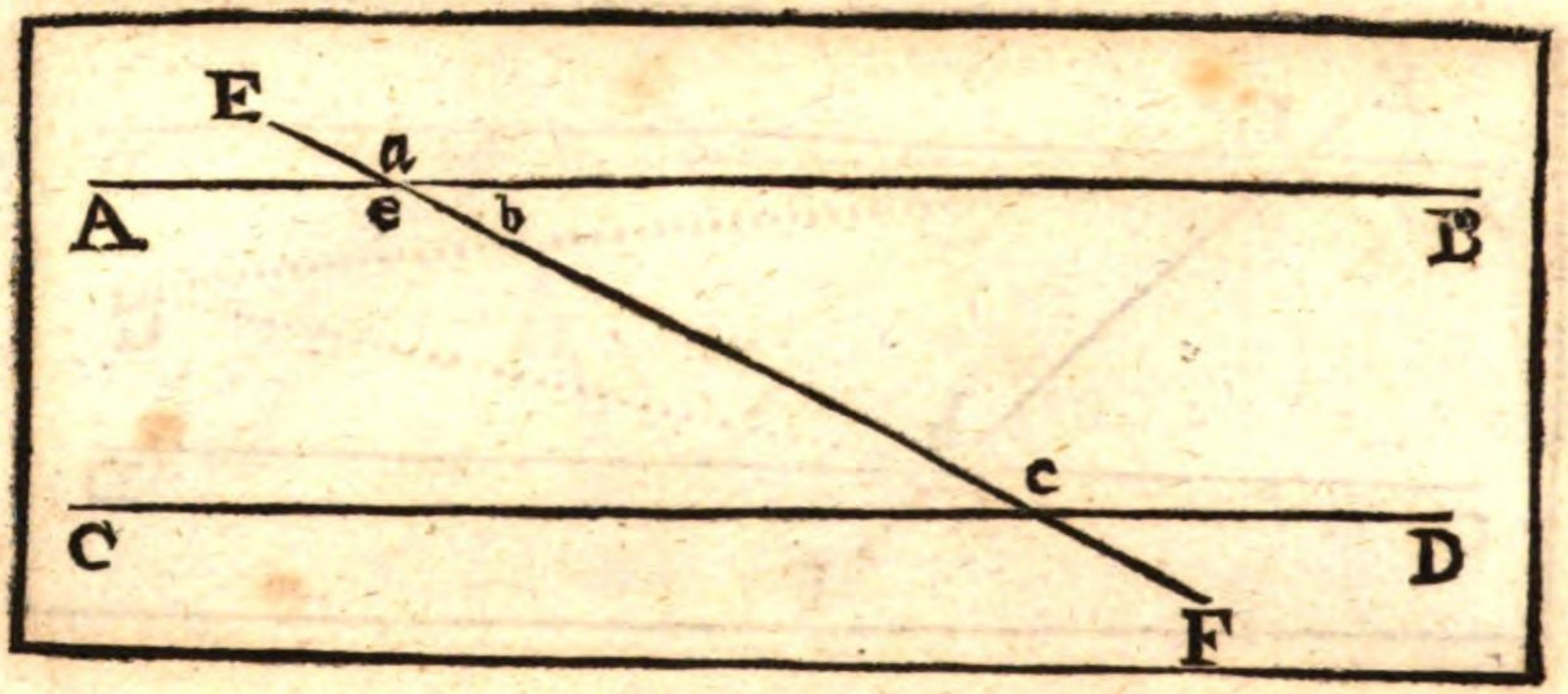
Seye dann ein solcher Punct, daran sie zusammen kommen mögten,
(wann es möglich ist) in G.

So erwächset darauß (weilen sie gerade Linien seynd)
ein △ IGK, dessen außwendiger ∠ a ⌜ seyn wird, als
der inwendige ∠ b. d. 16. I.
Der ∠ b aber ist ⌐ gesetzt worden dem ∠ a. d. d. Vorg.

Folgete, daß der ∠ b auff einmahln ⌐, und ¬ wäre,
als der ∠ a: welches nicht möglich ist.

Dahero ist es eine Warheit, daß, wann über zwo gerade Linien eine andere überzwerg gezogen wird, und die Winckeln umwexlender Weise einander gleich machet, solche Linien niemahlen in einem Punct zusammen kommen, sondern jederzeit einander Parallel, oder gleich weit lauffen werden.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn über zwo gerade Linien (AB, und CD) eine andere gerade Linie (EF) überzwerg gezogen wird, und den äussern Winckel (a) gleich machet dem innern (c), so ihme auff derselben Seite entgegen stehet; oder die zween innerliche Winckeln (b und c), so auff einer Seiten gegen einander stehen, zweyen rechten Winckeln gleich machet: so werden solche zwo Linien einander Parallel seyn.

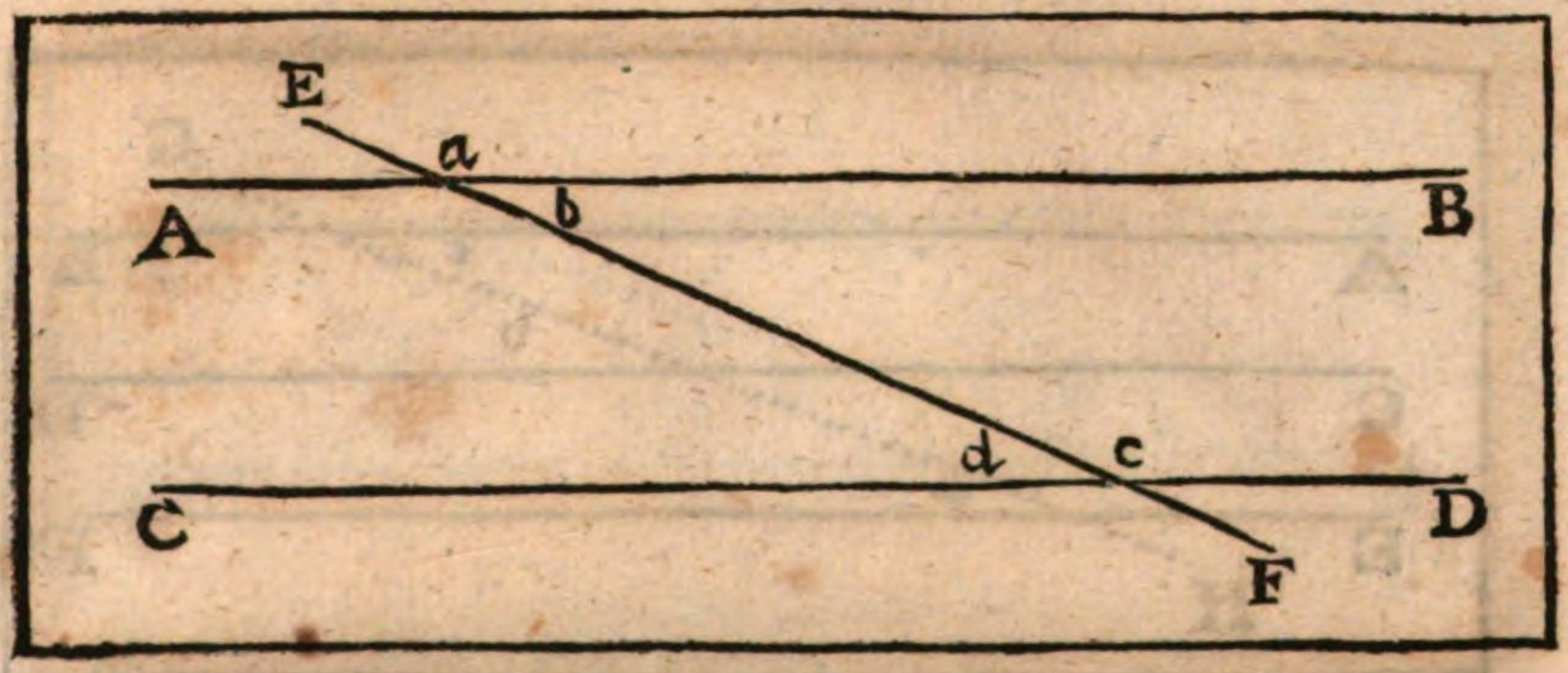
Beweiß.

I.

Der ∠ c ist ⊓, dem ∠ a. d. d. Vorg.
der ∠ a aber ist ⊓, dem ∠ c. d. 15. 1.
Darumb wird auch der unwexlende ∠ c ⊓ seyn, dem ∠ e. d. 1. ax.
und folgends die Linie AB = seyn, der Linie CD. d. 27. 1.

II.

Die ∠ a und b seynd ⊓, zween rechten Winckeln. d. 13. 1.
Der ∠ b, und ∠ c seynd auch ⊓, zween Rechten Winckeln. d. d. Vorg.
Wenn man nun beyderseits den gemeinen ∠ b darvon ziehet,
so wird verbleiben der ∠ a ⊓, dem ∠ c. d. 3. ax.
Dahero wird durch den bewiesenen ersten Theil dieser Vorgab
(weilen der ∠ a ⊓ ist dem ∠ c)
Die Linie AB = seyn, der Linie CD.
Welches zu beweisen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn über zwo gerade Parallel-Linien (AB und CD) eine andere gerade Linie (EF) überzwerg gezogen wird: so machet sie erstlich die zween Winckel (b und d) umwexlender Weise einander gleich; alsdann auch die zween innerliche Winckel (b und c), so auff einer Seiten gegen einander stehen, gleich zweyen rechten; letzlich den äussern Winckel (a) gleich, dem innern (c), der ihme auff derselben Seiten entgegen stehet.

Beweiß.

I.

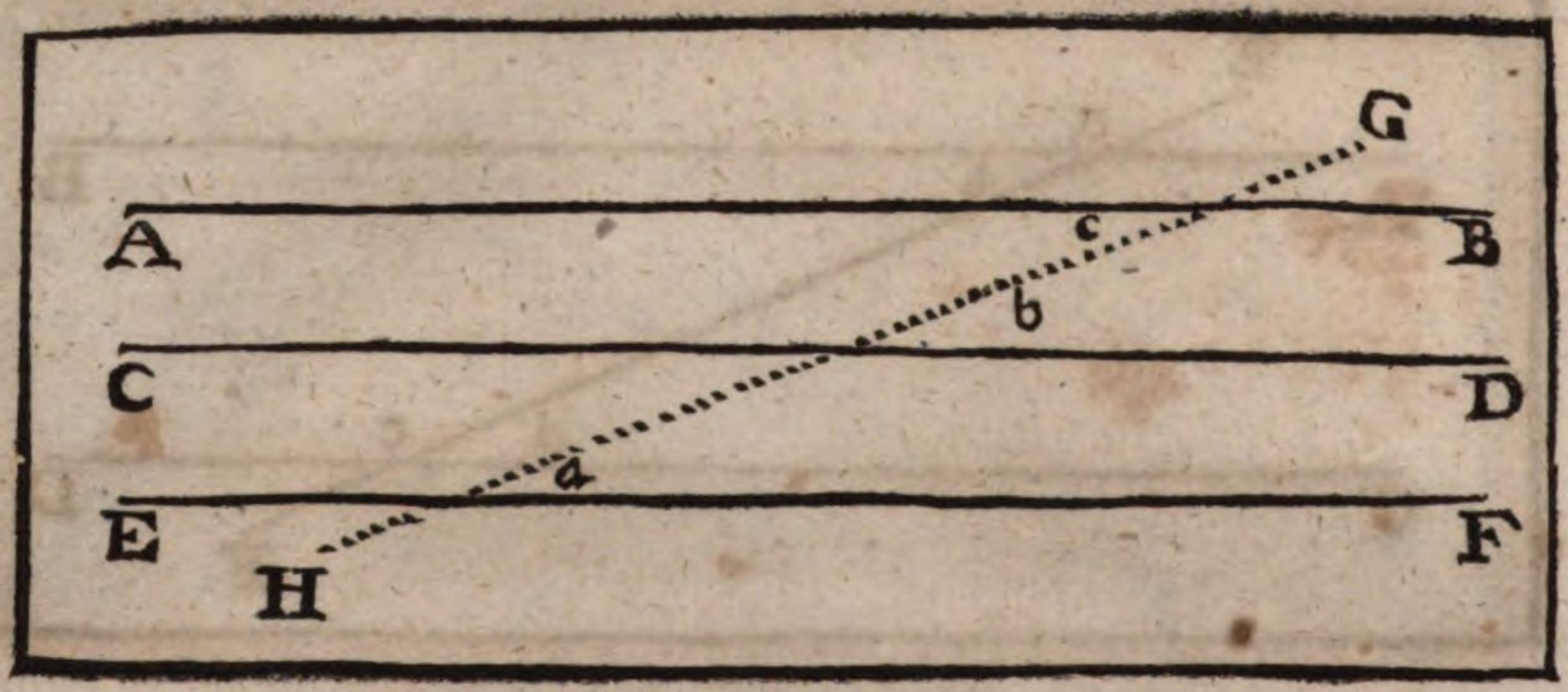
Weilen AB ═ gegeben ist, der CD. d. d. Vorg.
So muß nothwendig der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ d. d. 27. I.
Sonsten kommeten sie in einem Punct zusammen. II. ax. I.

II.

Der ∠ b ist ⊓, dem ∠ d. d. d. I. Theil.
setze hinzu beyderseits den gemeinen ∠ c.
So werden die ∠ b und c ⊓ seyn, denen zween ∠ d + c.
Die zween ∠ d + c seynd aber ⊓, zween rechten ∠. d. 13. I.
Darum werden auch die zween ∠ b und c ⊓ seyn, zween rechten ∠.

III.

Die zween ∠ b und c seynd ⊓, zweyen rechten ∠. d. d. 2. Theil.
Item die zween ∠ a und b seynd ⊓, zweyen rechten ∠. d. 13. I.
Wenn man beyderseits den gemeinen ∠ b abziehet,
So wird überbleiben der ∠ a ⊓, dem ∠ c.
Welches zu beweisen ware.



Die XXX. Vorgab.

Betrachtung.

Die gerade Linien (AB und EF), welche einer andern geraden Linie (CD) Parallel seynd; diese seynd auch unter einander Parallel.

Zubereitung.

Ziehe überzwerg die gerade Linie GH.

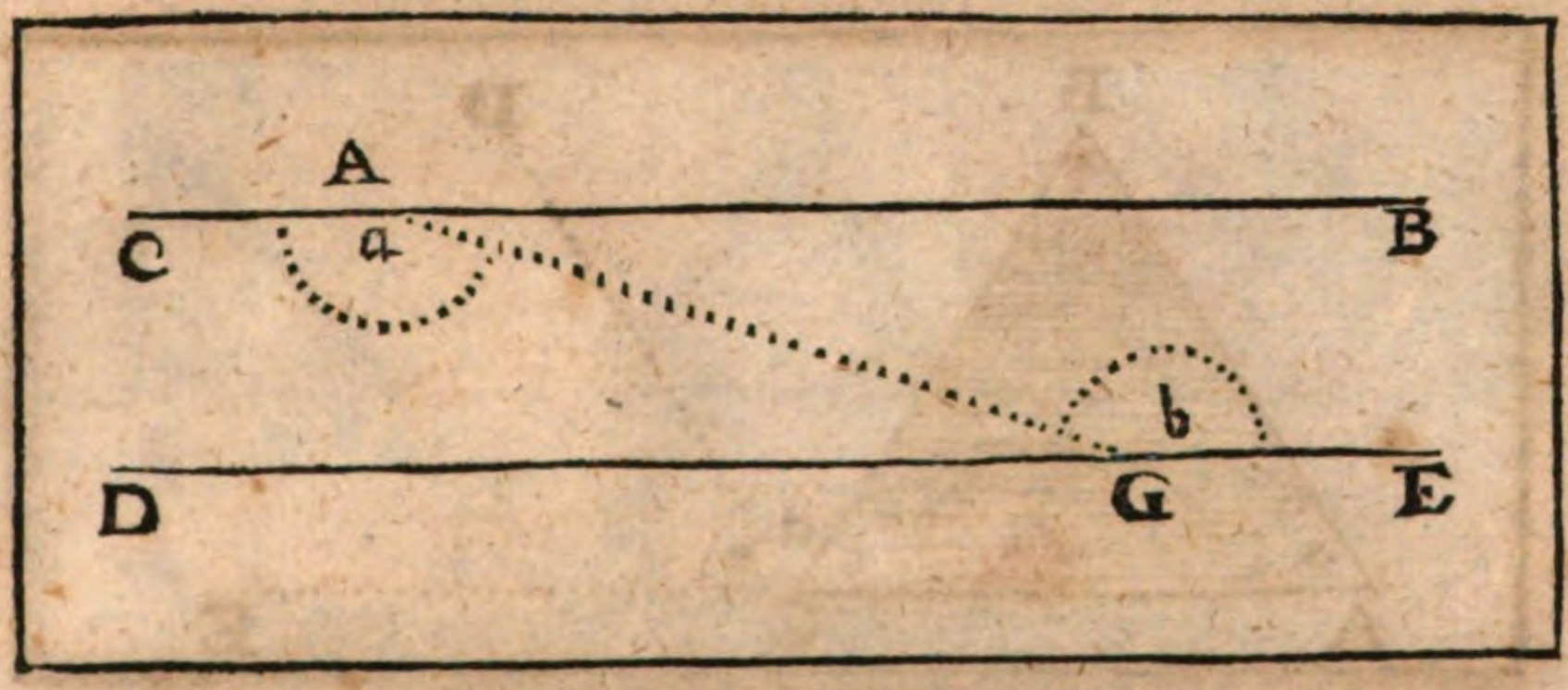
Beweiß.

Dieweilen AB ═ ist, der Linie CD. d. d. Vorg.
so wird der ∠ c ⊓ seyn, dem ∠ b. d. 29. 1.

Item, weilen EF ═ ist, der Linie CD, d. d. Vorg.
so wird auch der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ b. d. 29. 1.
und dahero wird auch der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ c. d. 1. ax.

Worauf folget, daß die Linie AB ═ seye, der Linie EF. d. 27. 1.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXI. Vorgab.

Handgriff.

Auß einem gegebenen Puncten (A) eine gerade Linie (CB) zu ziehen, welche einer gegebenen geraden Linie (DE) Parallel lauffe.

Handgriff.

Ziehe auß dem Punct A eine gerade Linie AG, welche mit der gegebenen DE einen ∠ b nach Gefallen mache.

Hernach mache den ∠ a □, dem ∠ b. d. 23. 1.

Und ziehe dardurch die gerade Linie CAB,

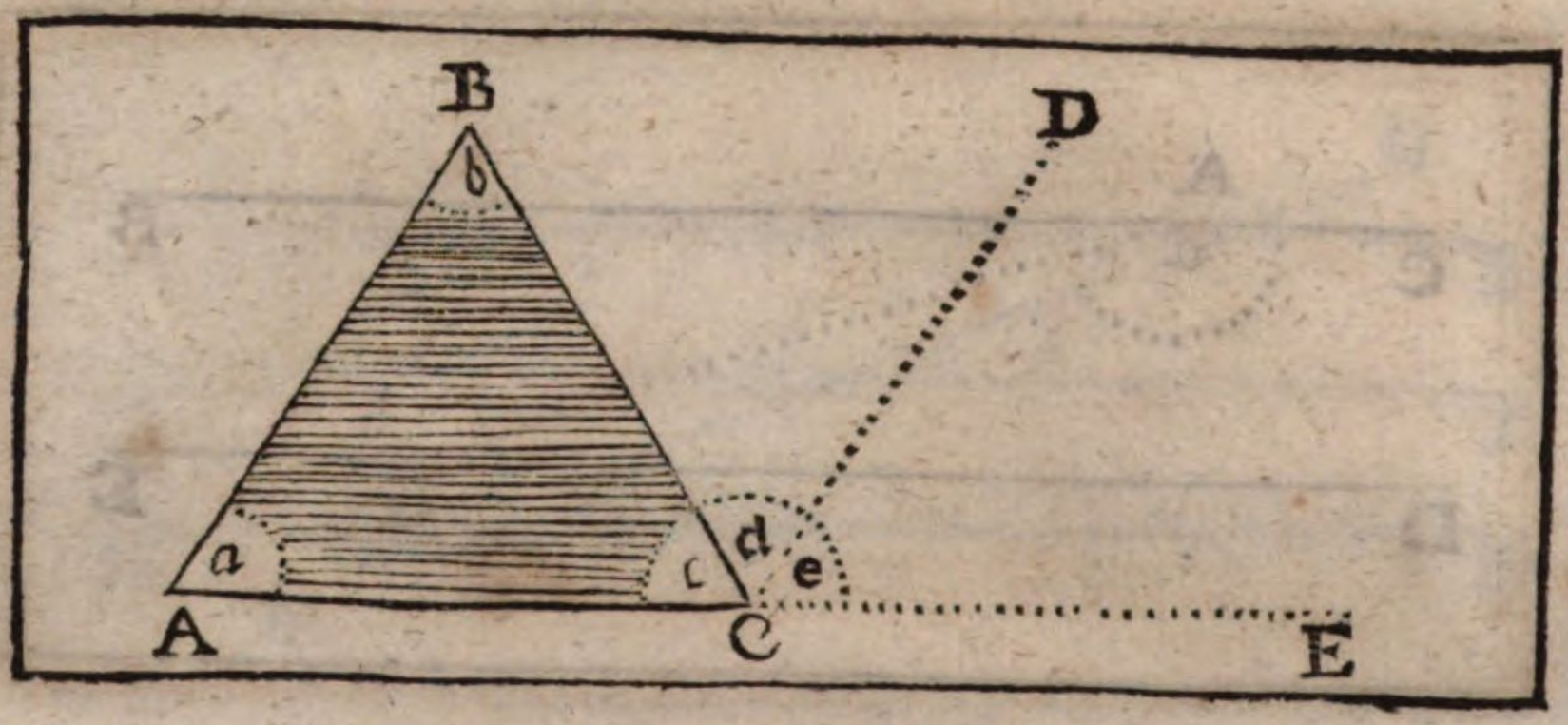
Welche mit der gegebenen Linie DE Parallel lauffen werde.

Beweiß.

Dieweilen die zween ∠ a und b umwexlender Weise einander gleich seynd gemacht worden.

So folget, daß die gerade Linie CB = lauffe, der Linie DE, d. 27. 1.

Welches zu machen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann nach Gefallen eine Seiten (AC) eines Triangels (ABC) verlängert wird (gleich wie in E) so wird der äussere Winckel (d + e) gleich seyn denen zween Winckeln (b und a) welche innerhalb deß Triangels diesem entgegen stehen; und in einem jedwedern Triangel seynd die drey innere Winckel (a, b, c,) sammentlich, gleich zween Rechten.

Zubereitung.

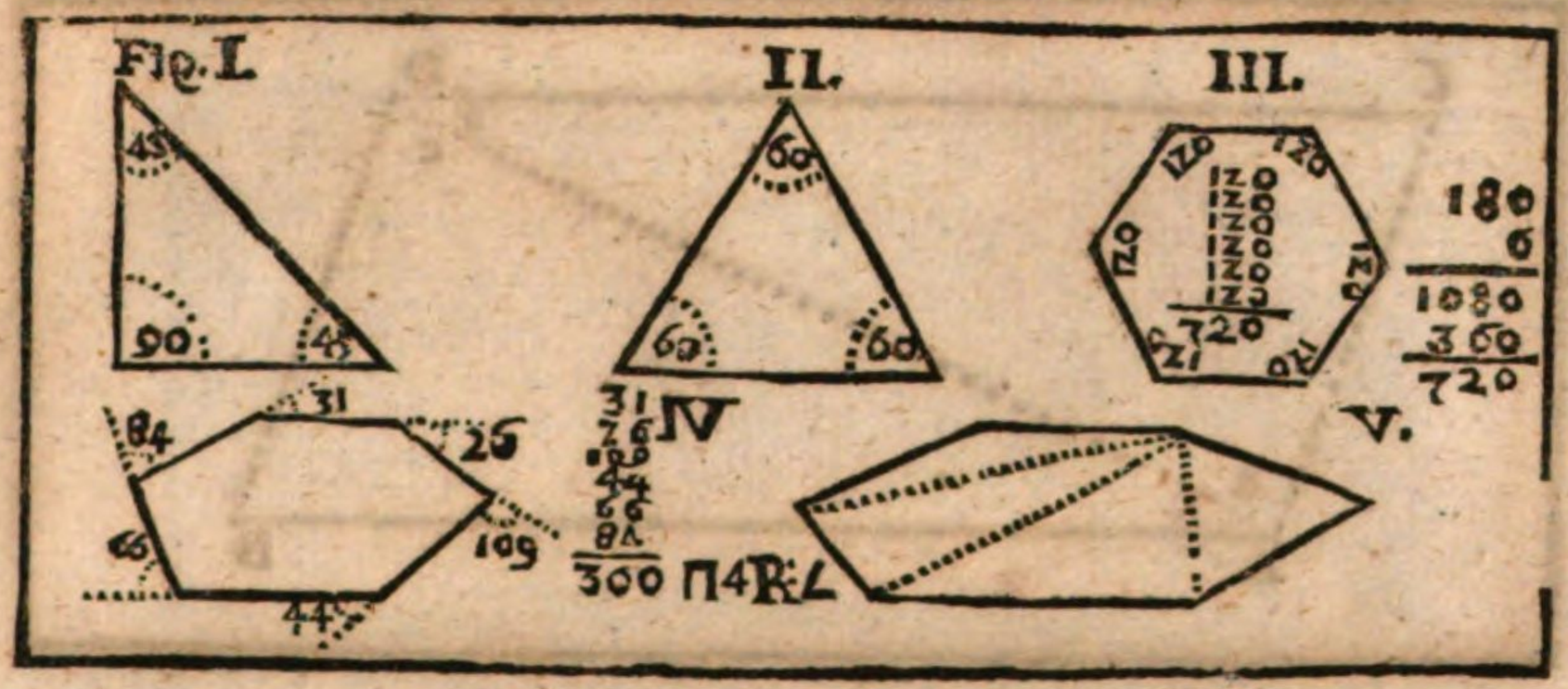
Ziehe auß C die gerade Linie CD, d. 31. I.
Welche = lauffe der Seiten AB.

Beweiß.

Dieweilen die gerade Linie BC über die zwo Parallel-Linien
AB, und CD überzwerg ist gezogen worden, so wird dardurch
der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ d. d. 29. I.
Abermahln, indeme wiederumb über die zwo Parallel-Linien
AB, und CD die gerade Linie, ACE gehet,
So wird auch der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ e. d. 29. I.
Dahero werden dann beyde ∠ b und a ⊓ seyn, dem äussern
∠ d + e.

II.

Der ∠ d + e ist ⊓, denen zween ∠ a und b. d. d. Vorg.
setze beyderseits hinzu den gemeinen ∠ c.
So werden die drey ∠ a, b, c ⊓ seyn, denen ∠ d + e und c.
Die ∠ d + e und c seynd aber ⊓ zween rechten ∠. d. 13. I.
Folget, daß auch die drey ∠ a, b, c zusammen, ⊓ seynd,
zween rechten Winckeln.
Welches zu beweisen ware.



Folge.

I.

Drey Winckeln sammentlich in einem △, seynd ⊓, denen drey ∠ sammentlich in einem andern △.

Und wenn zween ∠ eines △ ⊓ seynd, zween ∠ eines andern △: So wird auch der übrige ∠ ⊓ seyn, dem übrigen dritten ∠ deß andern △.

II.

In einem Rechtwincklichten △, welcher zwo gleiche Seiten hat, werden die andern zween Winckel halb Rechte seyn, das ist, ein jeder von diesen wird 45. Grad halten, Fig. I.

III.

In einem gleichseitigen △ geltet ein jeder Winckel $\frac{1}{3}$ von zween Rechten, daß ist 60. Grad. Fig. II.

Anmerkung.

I.

In einer geradlinischen Figur machen alle innerliche Winckeln sammentlich zweymaln so diel Rechte ∠ (weniger vier Rechte) als die Figur Seiten hat. Fig. III.

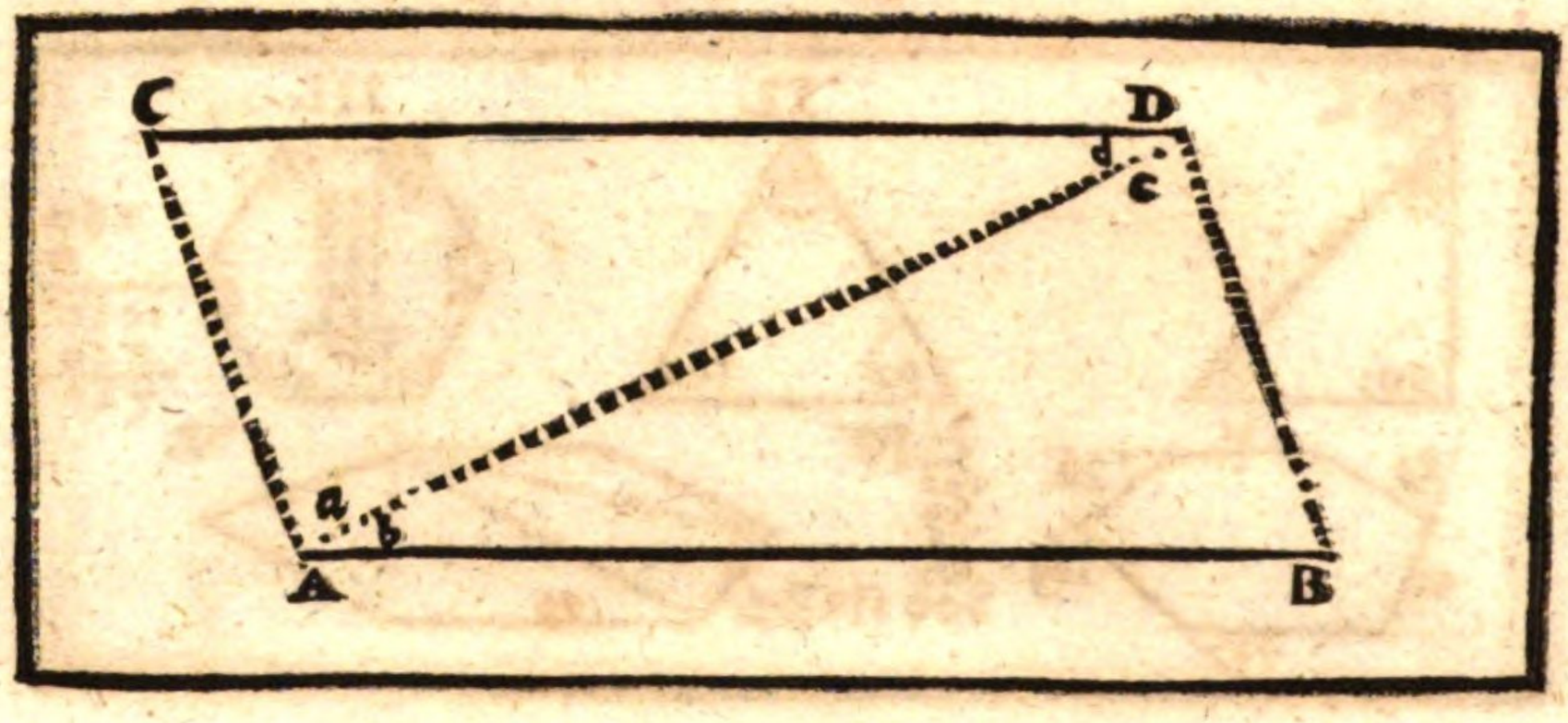
II.

Alle äussere Winckeln einer geradlinischen Figur machen sammentlich nicht mehr, als nur vier rechte Winckel. Fig. IV.

III.

Eine geradlinische Figur wird auß einem innern Winckel in so viel △, weniger zwey, als die Figur Seiten hat, abgetheilet:

Und die Winckeln sammentlich deren △ machen eben so viel, als alle Winckeln sammentlich der gegebenen Figur. Fig. V.



Die XXXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwo gerade Linien (AB, CD), welche andere zwo gerade Linien AC, BD), welche einander gleich und Parallel seynd, an beyde Seiten zusammen hängen, so seynd dieselbe auch einander gleich, und Parallel. (das ist, AB wird gleich, und Parallel seyn, der Linie CD.

Zubereitung.

Ziehe die beyde überzwerg stehende Ende A, D, derer Parallel-Linien AC, BD mit einer geraden AD zusammen.

Beweiß.

Weilen die gerade Linie AD überzwerg über die zwo Parallel-Linien AC, BD stehet:

So wird in dem △ ACD der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ c in dem △ ABD. d. 29. I.
Die Seiten AC ist auch ⊓ gesetzt worden, der Seiten BD. d. d. Vorg.
und die Seiten AD ist beyden △ gemein.
Dahero wird auch die Basis CD ⊓ seyn, der Basis AB, d. 4. I.
und der ∠ d ⊓, dem ∠ b.
Diese ∠ d und b aber stehen gegen einander umwexlender Weise.
Deßwegen wird auch die Linie CD = seyn, der Linie AB. d. 27. I.
Welches zu beweisen ware.

Die XXXIV. Vorgab.

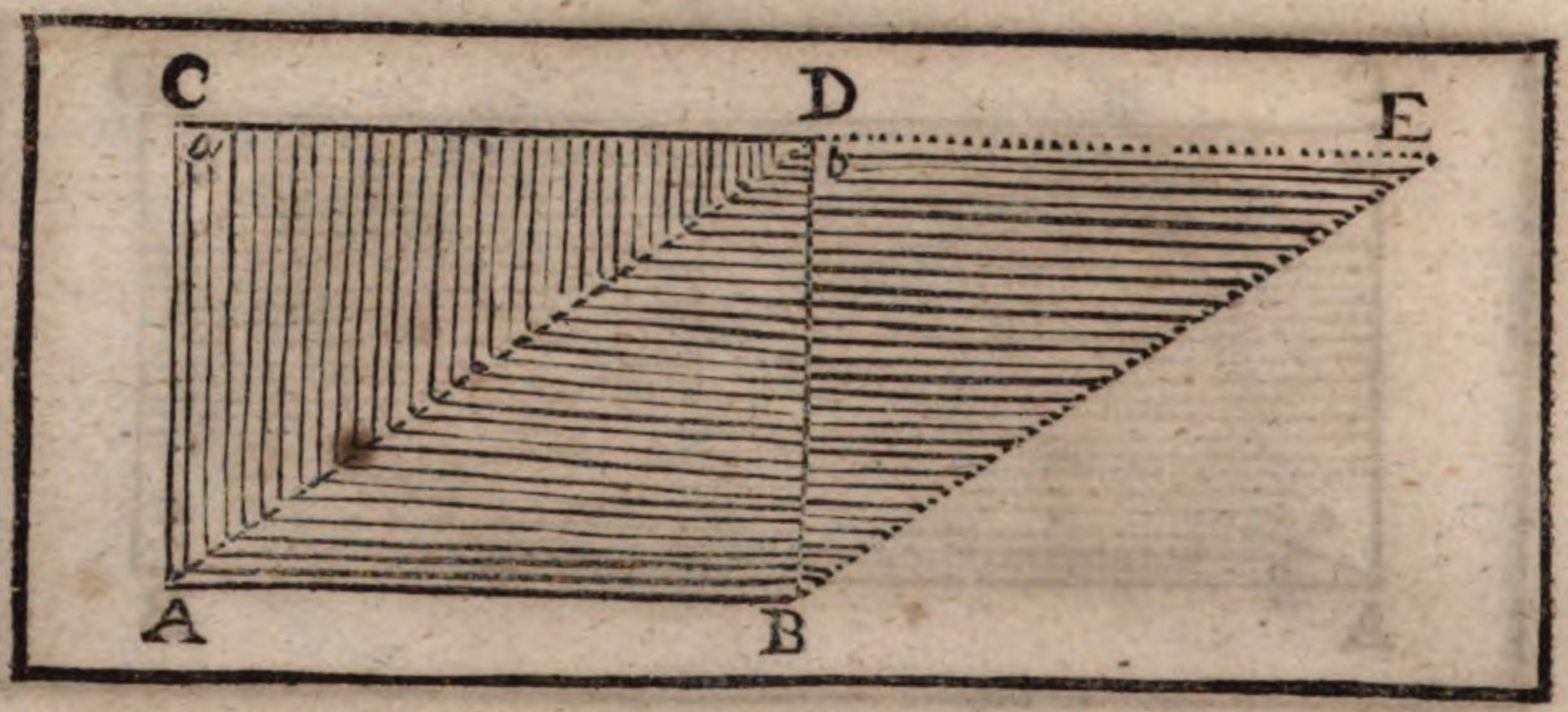
Betrachtung.

In allen Parallelogrammen seynd die Seiten AB, CD, und AC, BD), so gegen einander über stehen, und auch die Winckel über Ecke (a + b und d + c, oder e und f) einander gleich; und schneidet der Diameter (AD) ein jedes Parallelogram in zwey gleiche Theile, oder Triangeln.

Beweiß.

Dieweilen AB = ist der CD, und AC = der BD: d. 35. def. 1.
so wird der ∠ d ⊓ seyn, dem ∠ b.
und der ∠ c ⊓, dem ∠ a. d. 29. 1.
Nemlich die Winckel umwexlender Weise,
Dahero wird in denen △ ACD, und ABD,
(weilen der ∠ a ⊓ ist, dem ∠ c, und der ∠ d ⊓, dem ∠ b, d. d. Vor.
und die Seiten AD beyden △ gemein)
auch der dritte ∠ e ⊓ seyn, dem vierten ∠ f. d. 26. 1.
Und folgends die Seiten DC, CA ⊓ seyn, denen Seiten AB, BD.
Welches das erste zu beweisen ware.
Hernach, weilen der gantze △ ACD ⊓ ist, dem gantzen △ ABD. d. d. Vor.
so schliesset man billich darauß, daß der gezogene Diameter AD,
das Parallelogram ABCD gleich entzwey geschnitten habe.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXV. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallelogramen (CB, AE), so auff einerley Basis (AB,) und zwischen zweyen Parallel-Linien (AB, CE) stehen, die seynd einander gleich.

Mercke, daß man in dieser Vorgab nicht verstehe, als wann die zwey Parallelogrammen gleiche Winckeln, und Seiten hätten, sondern man saget nur, daß sie gleiche Inhalt begreiffen.

Dreyerley Fähle, wegen unterschiedlicher Stellung, können sich hierinnen begeben.

I. Wann das andere ▭ mit einer Seiten ED hart an die Seiten CD deß ersten ▭ stosset.

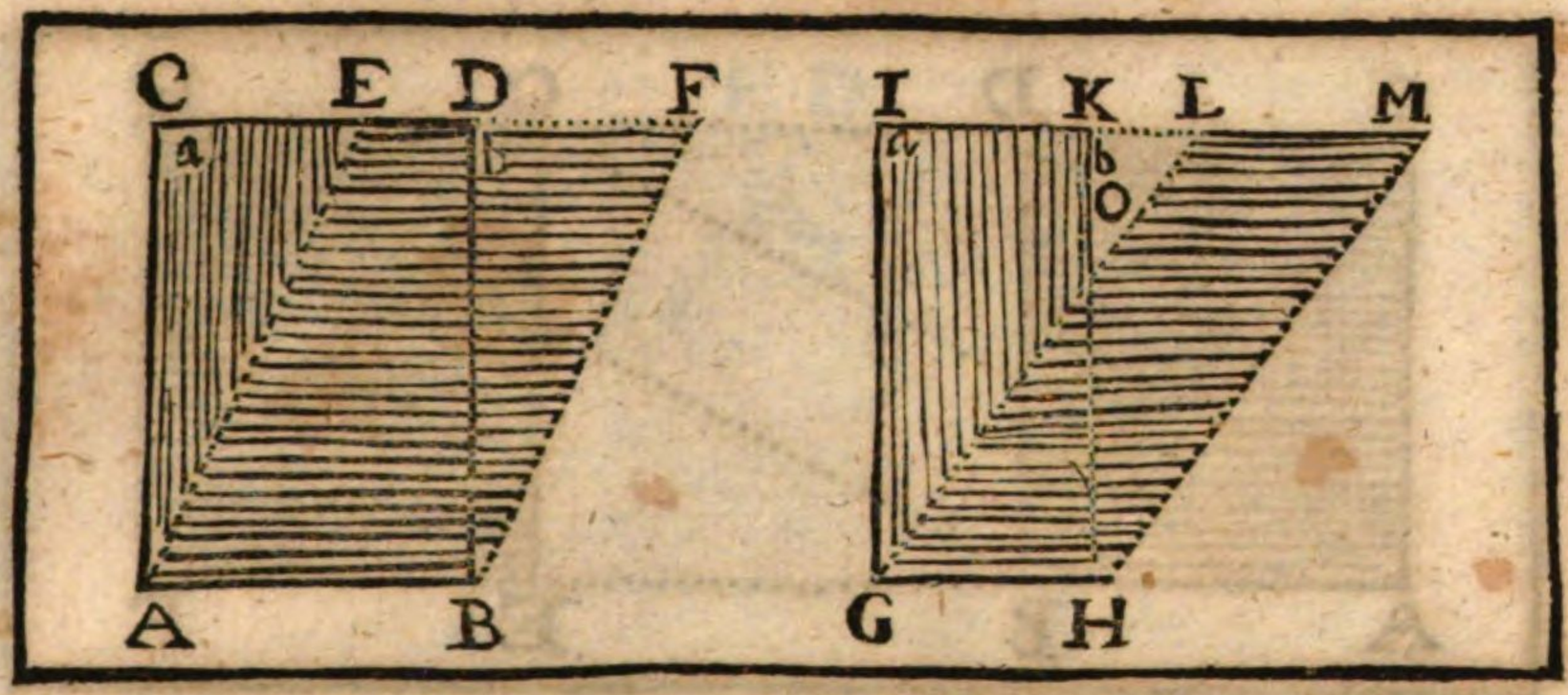
Beweiß.

Betrachte die drey △ ACD, BDE, und ADB.

Hernach sage, weilen die Seiten DE ∩ ist, der Seiten AB, d. 34. I.
AB aber ∩ ist der Seiten CD. d. 34. I.
so wird auch die Seiten DE ∩ seyn, der Seiten CD. d. 1. ax.

Unterdessen ist die Seiten BD ∩, der Seiten AC. d. 34. I.
Und der äussere ∠ b ∩, dem innern ∠ a. (dann AB ═ ist, der CD) { d. 35. def. I. und 29. I.

Deßwegen wird der △ BDE ∩ seyn, dem △ ACD. d. 4. I.
Setze hinzu beyderseits den gemeinen △ ADB,
So werden die zwey ▭ ADEB, und ACDB darauß entstehen,
Welche auch einander ∩ seyn werden. d. 2. ax.
Welches zu beweisen ware.



II.

Wenn das andere ▭ mit einer Seiten FE in der Seiten CD deß ersten lieget.

Beweiß.

Die Seiten CD ist ⌐, der Seiten AB; und AB ist ⌐ der EF. d. 34. I.
Folget, daß auch CD ⌐ seye der EF. d. 1. ax.
Ziehe darvon ab beyderseits die gemeine Linie ED.
so wird überbleiben CE ⌐ DF. d. 3. ax.
Wiederumb ist die Seiten AC ⌐, der Seiten BD, d. 34. I.
und der ∠a ⌐ dem ∠b. d. 29. I. und 35. def. I.

Darumb wird der △ ACE ⌐ seyn, dem △ BDF. d. 4. I.
Setze hinzu beyderseits das gemeine Trapezium ABDE.
So wird das ▭ ABCD ⌐ seyn, dem ▭ ABFE.

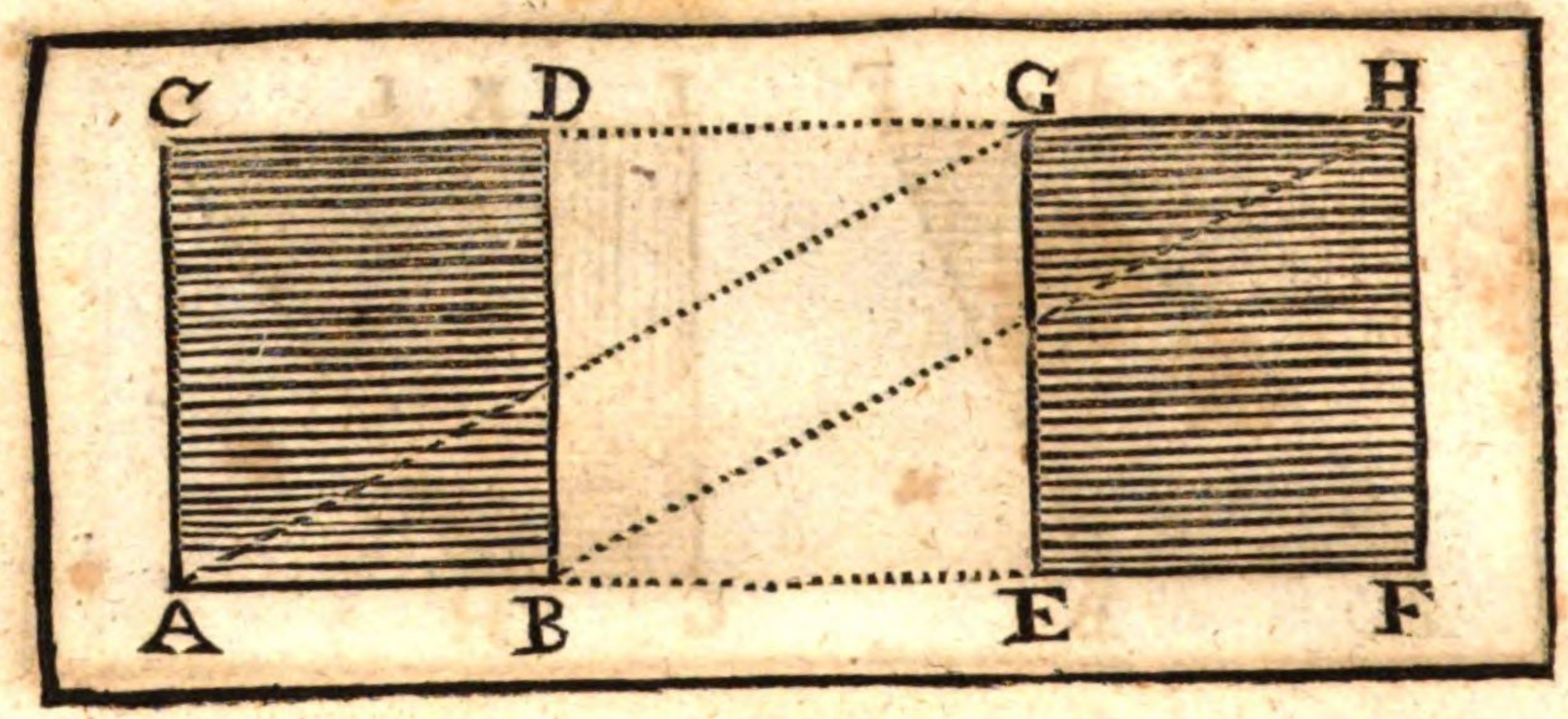
III.

Wenn das andere ▭ mit einer Seiten LM völlig ausser der ersten Seiten IK lieget.

Beweiß.

Wie schon in dem vorhergehenden bewiesen worden ist, wird IK ⌐ seyn der LM.
Setze nun beyderseits hinzu die Linie KL.
So wird die gantze Linie IL ⌐ seyn, der gantzen Linie KM. d. 2. ax.
Unterdessen ist IG ⌐ der KH, und der ∠a ⌐, dem ∠b. d. 34. I. d. 29. I.

Folget dahero, daß der △ GIL ⌐ seye, dem △ HKM. d. 4. I.
Ziehe nun beyderseits ab den gemeinen △ KOL.
So wird überbleiben das Trapezium GOKI ⌐ dem Trapezium HOLM.
Setze unterdessen beyderseits hinzu den gemeinen △ GOH,
So wird endlich das ▭ GHIK ⌐ seyn, dem ▭ GHLM.
Welches zu machen ware.



Die XXXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallelogrammen (CB, GF) so gleiche Baſes (AB, EF) haben, und zwiſchen einerley Parallel-Linien (AF, CH) ligen: die haben einen gleichgroſſen Inhalt.

Zubereitung.

Ziehe AG, BH mit geraden Linien zuſammen, ſo entſtehet das □ ABGH.

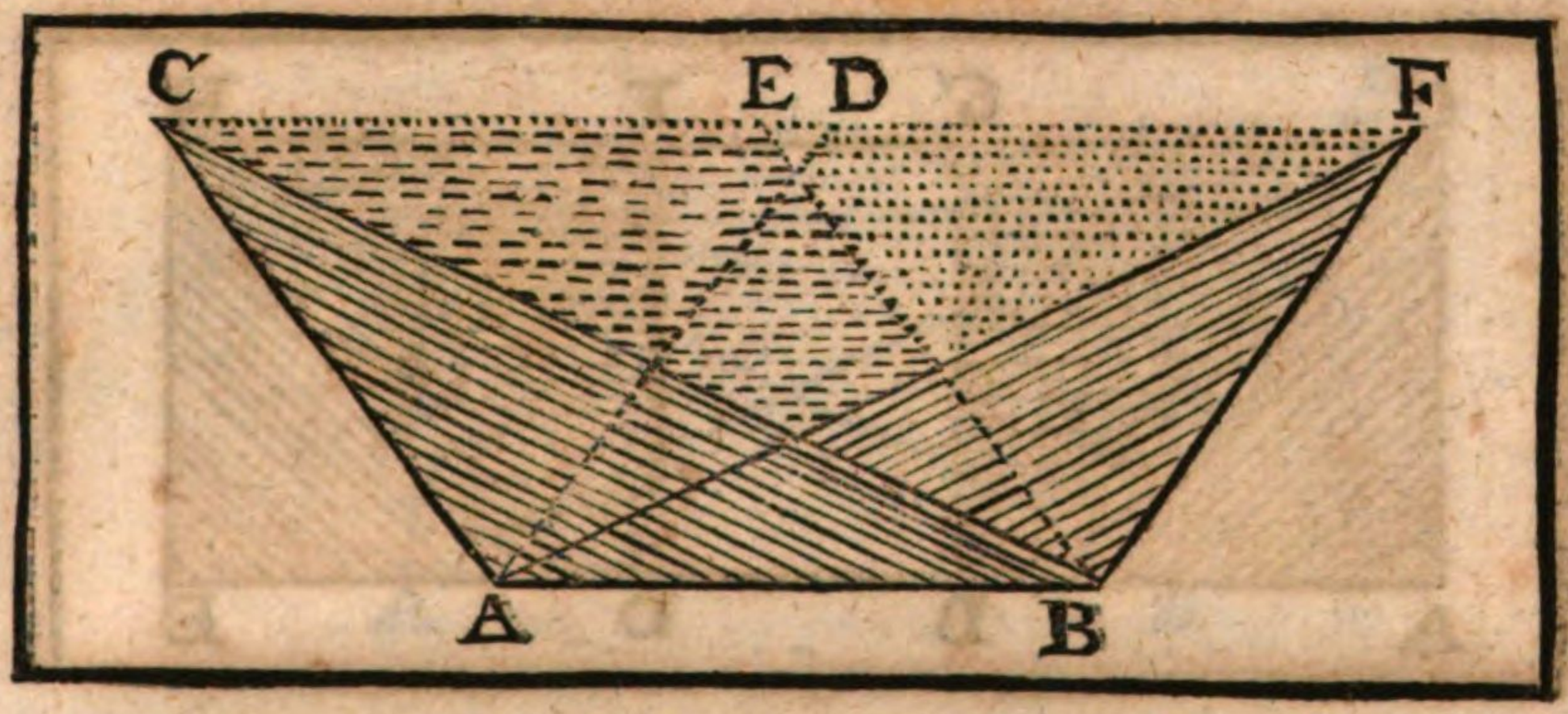
Beweiß.

Das □ ABCD iſt ⌐, dem □ ABHG, d. 35. I.

Das □ ABHG aber iſt ⌐, dem □ EFHG, d. 35. I.

Dahero wird auch das □ ABCD ⌐ ſeyn, dem □ EFGH. d. I. ax.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Alle Triangel (als wie ACB, und ABF), welche auff einerley Basis (AB) und in einerley Parallel-Linien (AB, CF) stehen; die seynd einander gleich (oder so ein Ding), sie begreiffen einen gleichen Inhalt.

Zubereitung.

Ziehe auß B die Linie BE, welche = laufft mit AC,

Und AD, welche = lauffe mit BF. 6. 31. 1.

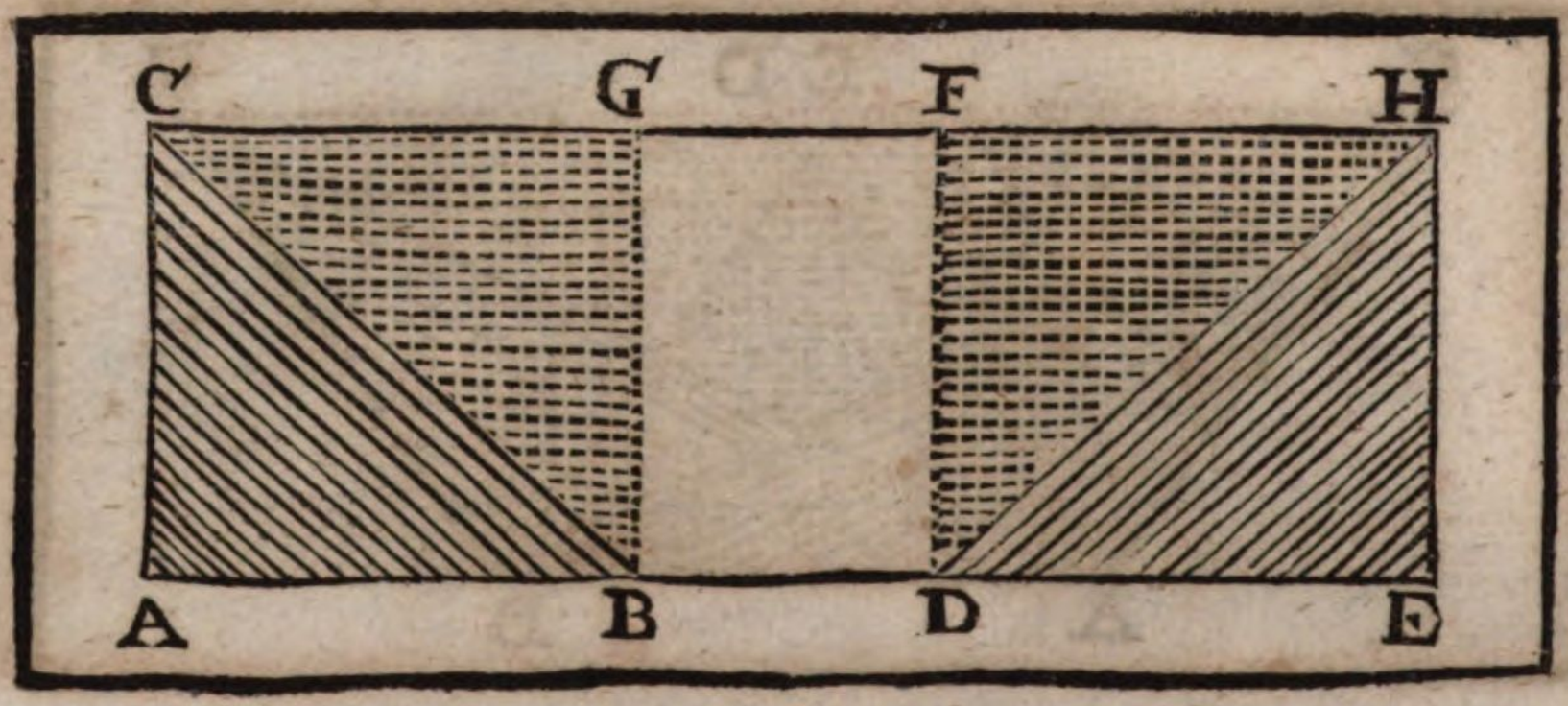
Beweiß.

Das ▭ ABCE ist ⊓, dem ▭ ABDF. 6. 35. 1.

Die △ ABC, und ABF seynd aber gerade die Helffte deren beyden gleichen ▭ ABCE, und ABDF. 6. 34. 1.

Darum wird der △ ABC ⊓ seyn, dem △ ABF. 6. 7. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Alle Triangel (als wie ACB, DEH), so auff gleichen Bases (AB, DE), und zwischen einerley Parallel-Linien (AE, CH) stehen, die seynd einander gleich.

Zubereitung.

Auß dem Punct B, ziehe die gerade Linie BG ═, AC. d. 31. I.

Und auß dem Punct D, die Linie DF ═ EH.

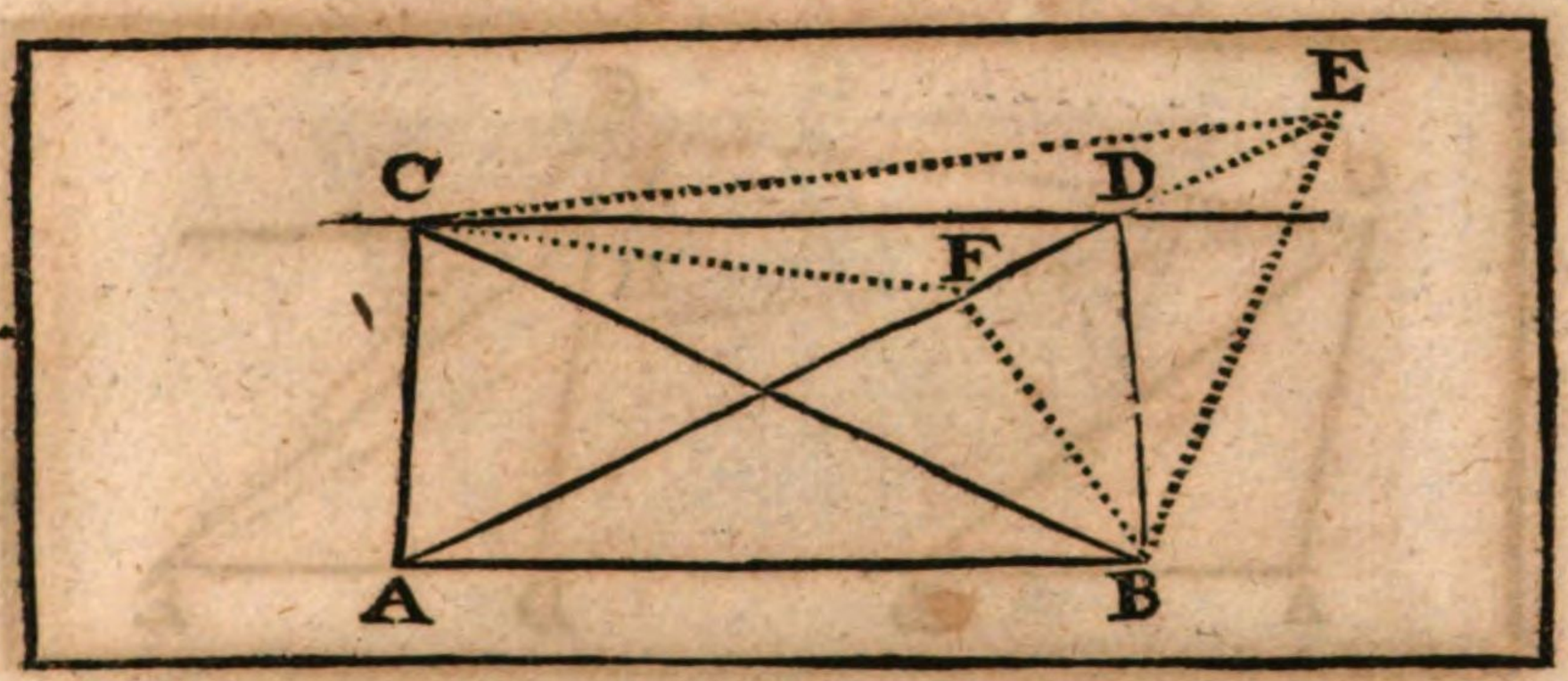
Beweiß.

Das ▭ ABCG, ist ⊓, dem ▭ DEFH, d. 36. I.

Ihre Helffte aber seynd die △ ABC, und DEH. d. 34. I.

Dahero wird auch der △ ABC ⊓ seyn, dem △ DEH. d. 7. ax.

Welches zu beweisen ware.



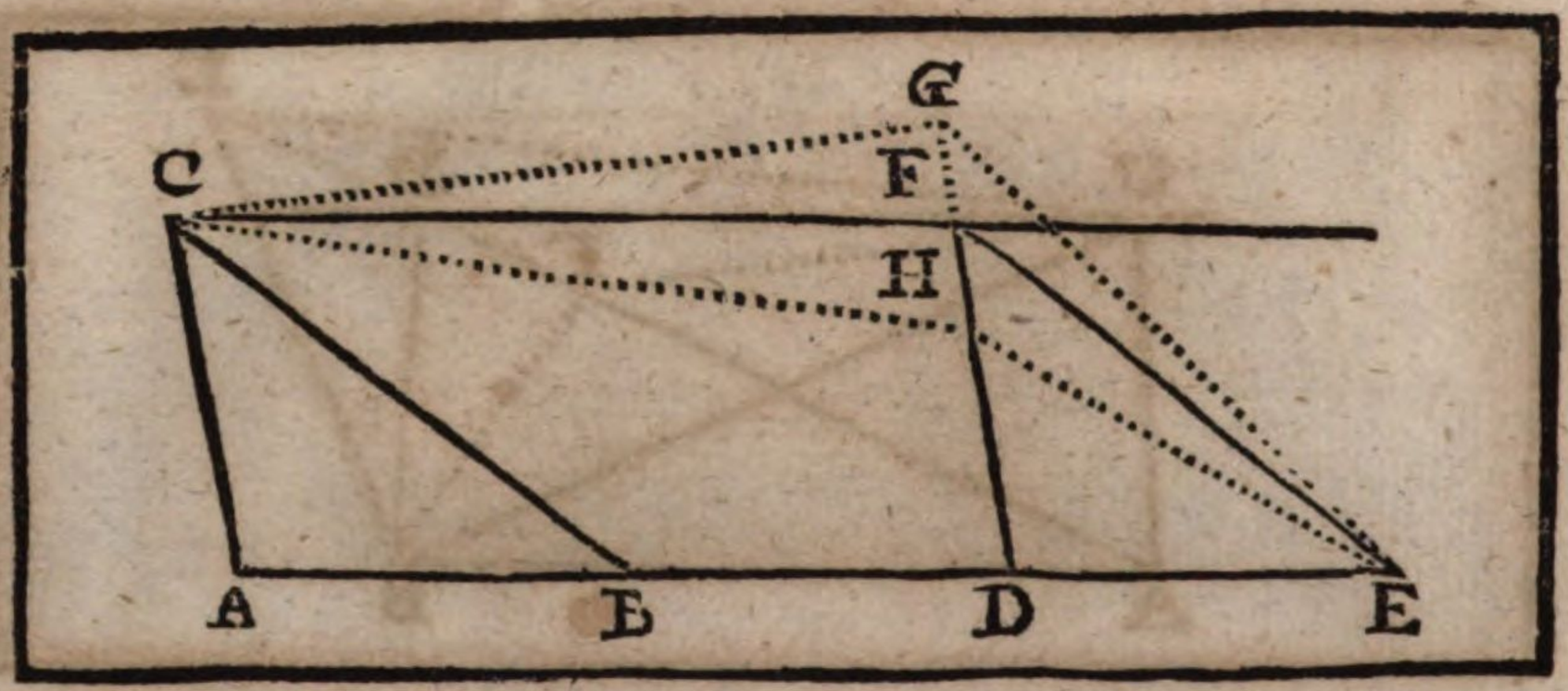
Die XXXX. Vorgab.

Betrachtung.

Die Triangeln gleiches Inhalts (ABC, ABD) welche auff einerley Basis (AB), und auff einerley Seiten hinaußwerts stehen: die stehen zwischen einerley Parallel-Linien (das ist CD wird Parallel lauffen mit AB).

Beweiß.

Gesetzt es wäre CD nicht = AB, sondern es wäre eine andere gerade Linie, gleich wie CE (wann es doch möglich ist) = der Linie AB.
So verlängere AD biß an die vermeinte = Linie in dem Punct E, und ziehe B und E zusammen.
Demnach wird der △ ACB ⊓, seyn dem △ AEB. d. 37. 1.
Dem △ ACB aber ist ⊓ gesetzt worden, der △ ADB, d. d. Vorg.
Folget, daß der △ ADB, auch gleich wäre, dem △ AEB. d. 1. ax.
Nemlich ein Theil ⊓, seinem gantzen.
Welches wider die Vernunfft streitet. d. 9. ax.
Darumb ist nicht CE, sondern die CD ist noch = der AB.
Solte man weiter setzen, daß die gerade CF = wäre, der Linie AB
so würde es eben wider die Vernunfft herauß kommen:
daß nemlich das gantze ⊓ wäre, einem von seinen Theilen.
Dahero ist es beständig wahr, daß CD = seye der AB.
Welches zu beweisen ware.



Die XL. Vorgab.

Betrachtung.

Die Triangeln gleiches Inhalts (ABC, DEF), so auff gleichen Bases (AB, DE) und auff einerley Seiten hinaußwerts stehen: die stehen auch in einerley Parallel-Linien (das ist CF wird Parallel seyn der AE).

Beweiß.

Solte CF nicht = der AB seyn, sondern eine andere, als wie CG (wann es möglich ist)

So verlängere DF in die vermeinte Parallel im Puncten G, und ziehe GE zusammen.

Darauff folget, daß der △ ABC ⊓ seye dem △ DGE, d. 38. I.
Der △ ABC aber ist ⊓ gesetzt worden, dem △ FDE. d. d. Vorg.

Darumb wird auch der △ DEF ⊓ seyn müssen dem △ DEG. d. 1. ax.
Welches wider die Vernunfft ist, daß ein Theil ⊓ seye, seinem Gantzen.

Dahero saget man noch, daß CF allein = seye, der AE.

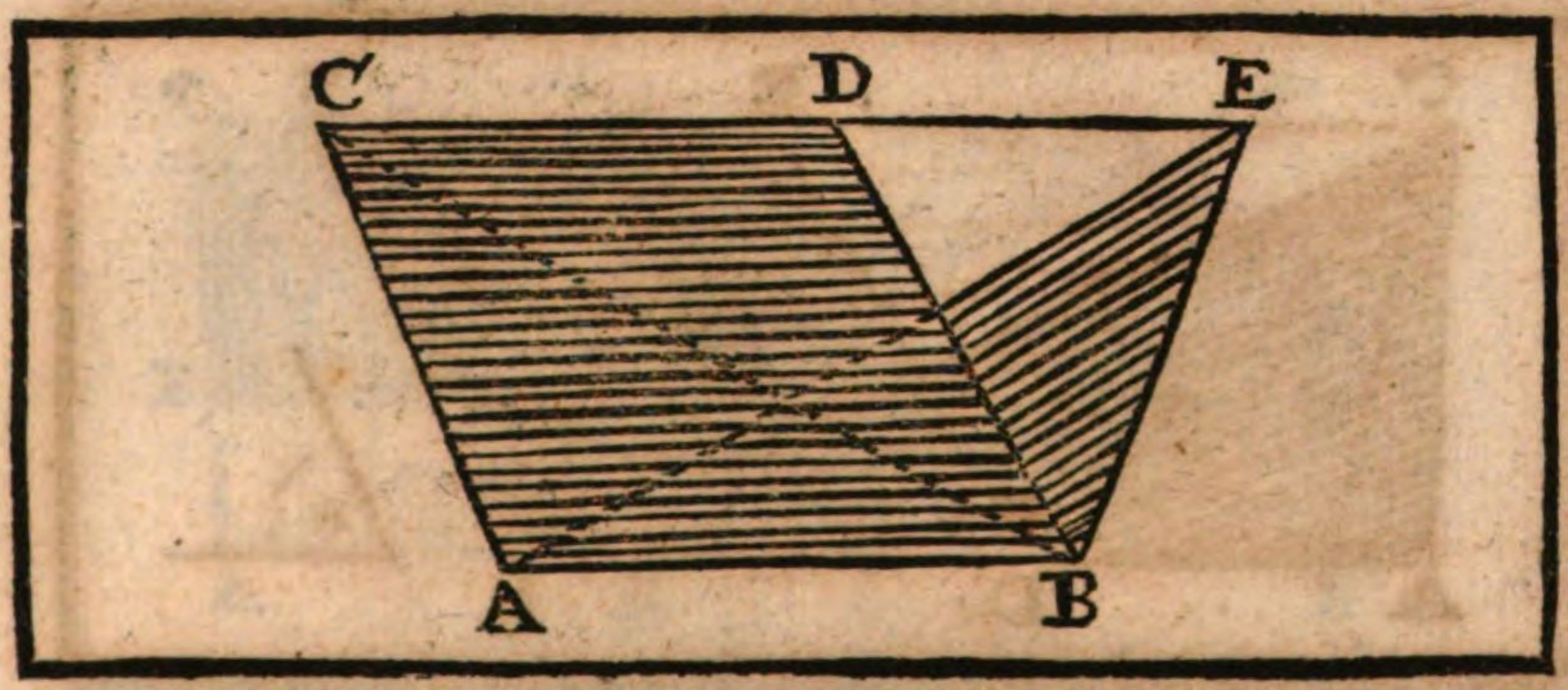
Würde aber ein anderer einwerffen, daß CH = wäre, der AE.

So kommete eben selbe Unmöglichkeit herauß, nemlich,

Daß ein gantzes ⊓ wäre, einem von seinen Theilen,

Also ist es eine unfehlbare Warheit, daß die Linie CF allein der Linie AB = seye.

Welches zu beweisen ware.



Die XLI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn ein Parallelogram (ABCD) mit einem Triangel (ABE) eine gemeine Basis (AB) hat, und zwischen einerley Parallel-Linien (AB, CE) stehen: so wird das Parallelogram noch einmal, oder doppelt so groß seyn, als der Triangel.

Zubereitung.

Ziehe den Diameter CB.

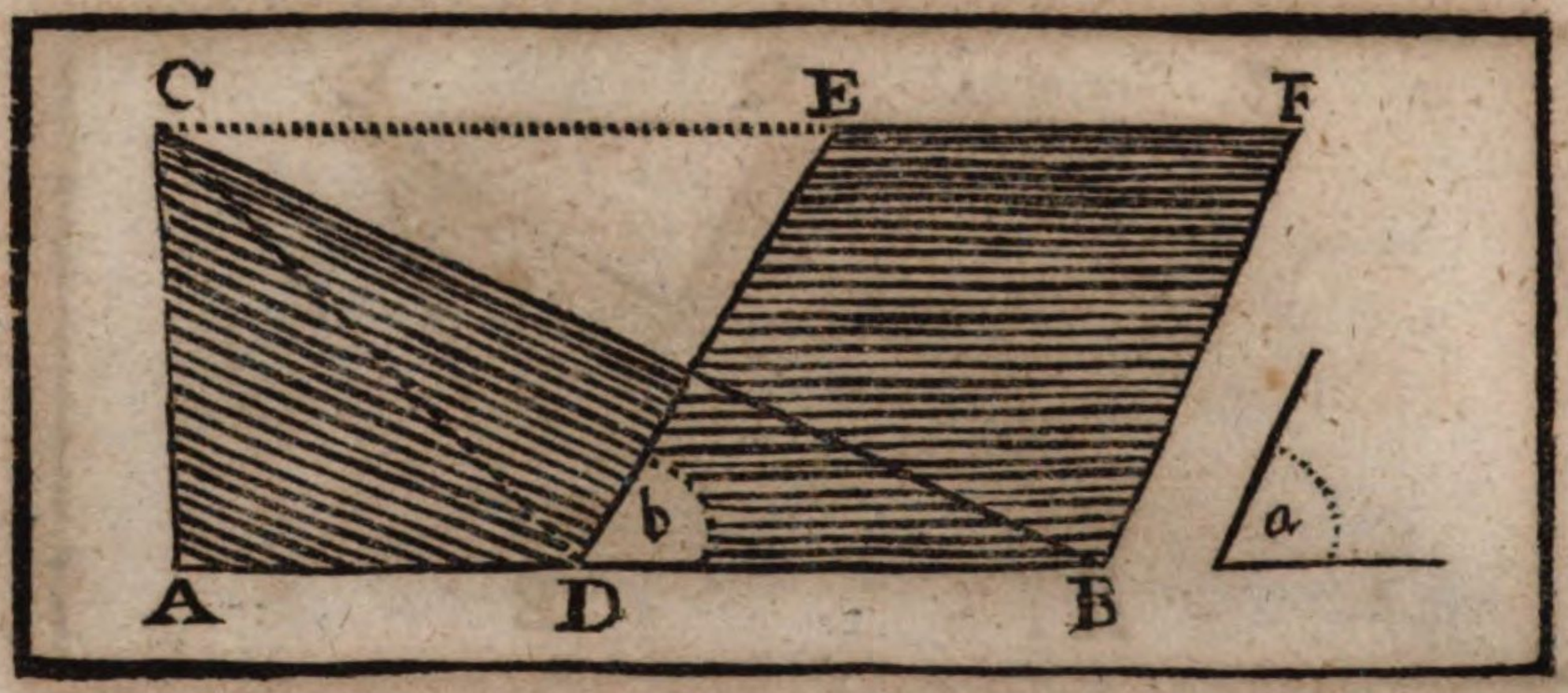
Beweiß.

Der △ ABE ist ⊓, dem △ ABC. d. 37. I.

Daß ▭ ABCD aber ist doppelt, oder noch einmahln so groß als der △ ABC. d. 34. I.

Folget, daß auch das ▭ ABCD doppelt, oder noch einmahln so groß seye, als der △ ABE.

Welches zu beweisen ware.



Die XLII. Vorgab.

Handgriff.

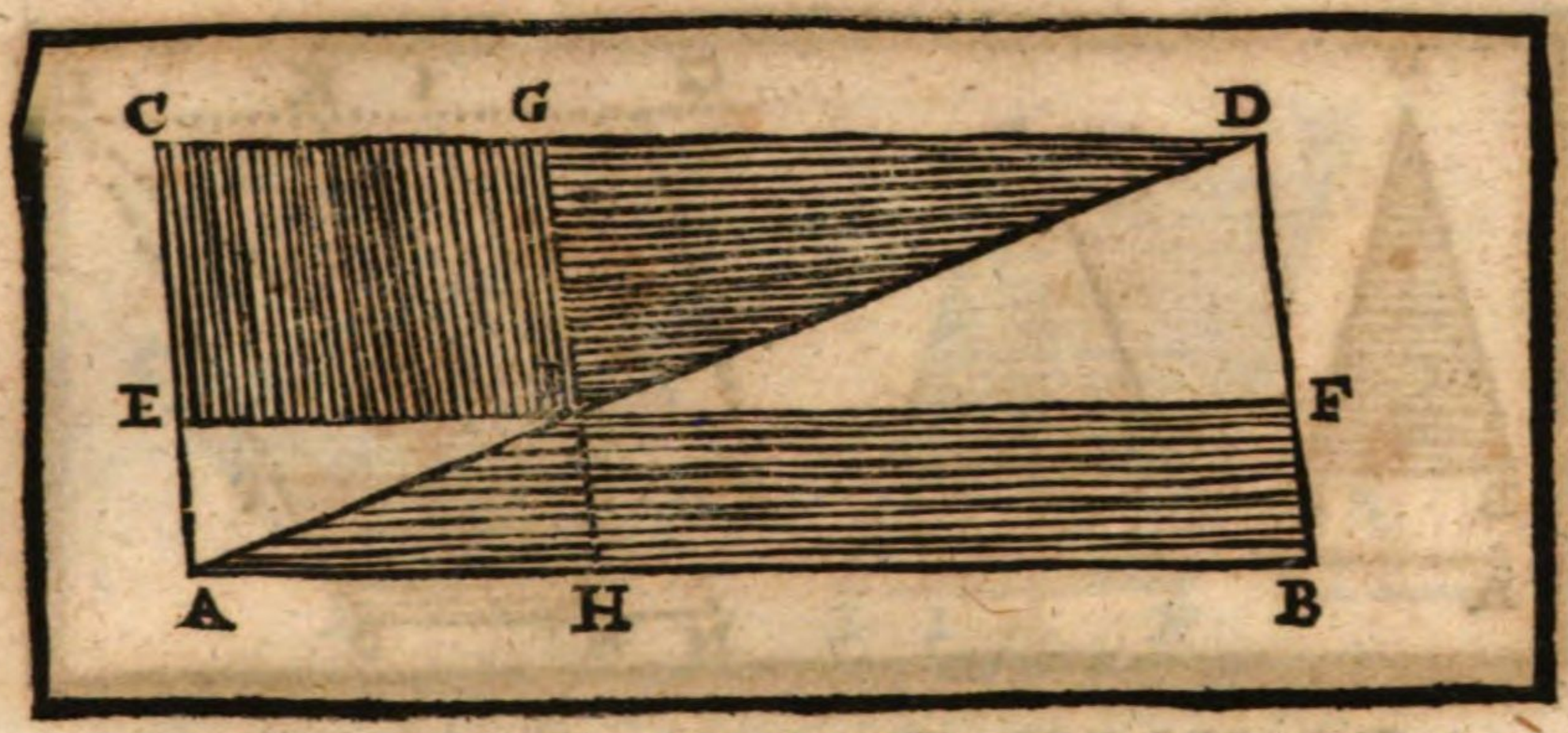
Einem vorgegebenen Triangel (ABC) ein gleiches Parallelogram (DBEF) zu machen, alſo, daß ein Winckel (b) gleich ſeye, einem andern vorgegebenen geradliniſchen Winckel (a).

Handgriff.

Zertheile die Baſis AB mitten entzwey in D. d. 10. I.
Ziehe CD zuſammen.
Auß C ziehe CF = der Baſis AB. d. 31. I.
Mache auß dem Punct D mit der Linie DE.
den ∠ b ⊓, dem ∠ a. d. 23. I.
Ziehe auß B die Linie BF = der Linie DE. d. 31. I.
So wird das gemachte ▭ DBEF ⊓ ſeyn, dem △ ABC.
und den ∠ b ⊓ haben, dem vorgegebenen ∠ a.

Beweiß.

Der △ ACD iſt ⊓, dem △ DCB. d. 38. I.
Dahero wird der △ DCB gerad die Helffte von dem △ ABC ſeyn. d. d. Hand.
Unterdeſſen iſt derſelbe △ DCB auch gerad die Helffte von dem ▭ DEFB. und 41. I.
Dahero wird der gantze △ ABC ⊓ ſeyn, dem gemachten ▭ DEFB. d. 6. ax.
Deſſen ∠ b auch ⊓ iſt, dem gegebenen ∠ a. d. d. Hand.
Welches zu machen ware.



Die XLIII. Vorgab.

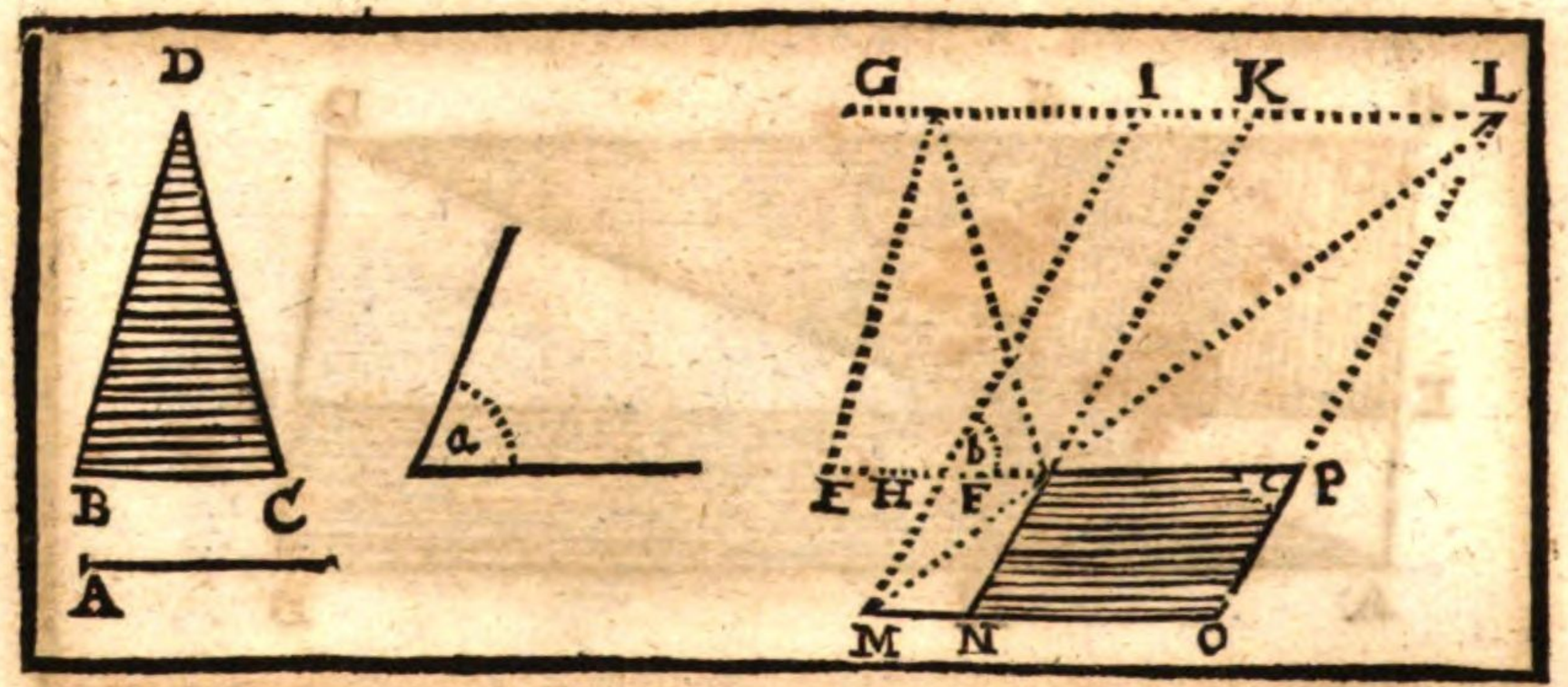
Betrachtung.

In allen Parallelogramen (als wie ABCD) seynd die Complementen, oder Außfüllungen (als wie HBIF, EICG) einander gleich.

Beweiß.

Weilen der Diameter AD das ▭ ABCD gerad entzwey theilet. d. 34. 1.
so wird der △ ACD ⊓ seyn, dem △ ABD.
Eben auff solche Art, indeme die ▭ HE und FG gerade entzwey
durch ihre Diametern AI, und ID geschnitten werden.
So wird der △ AEI ⊓ seyn, dem △ AHI, und
der △ IGD ⊓, dem △ IFD.
Wann man nun von denen zwey grossen und gleichen △ ACD
und ABD beyderseits, erstlich die zwey gleiche △ AEI
und AHI; alsdann auch die zwey gleiche △ IGD, und IFD,
abziehet.
So ist klar, daß über bleiben werde die Außfüllung EIGC ⊓,
der Außfüllung HBFI.

Welches zu beweisen ware.



Die XLIV. Vorgab. Handgriff.

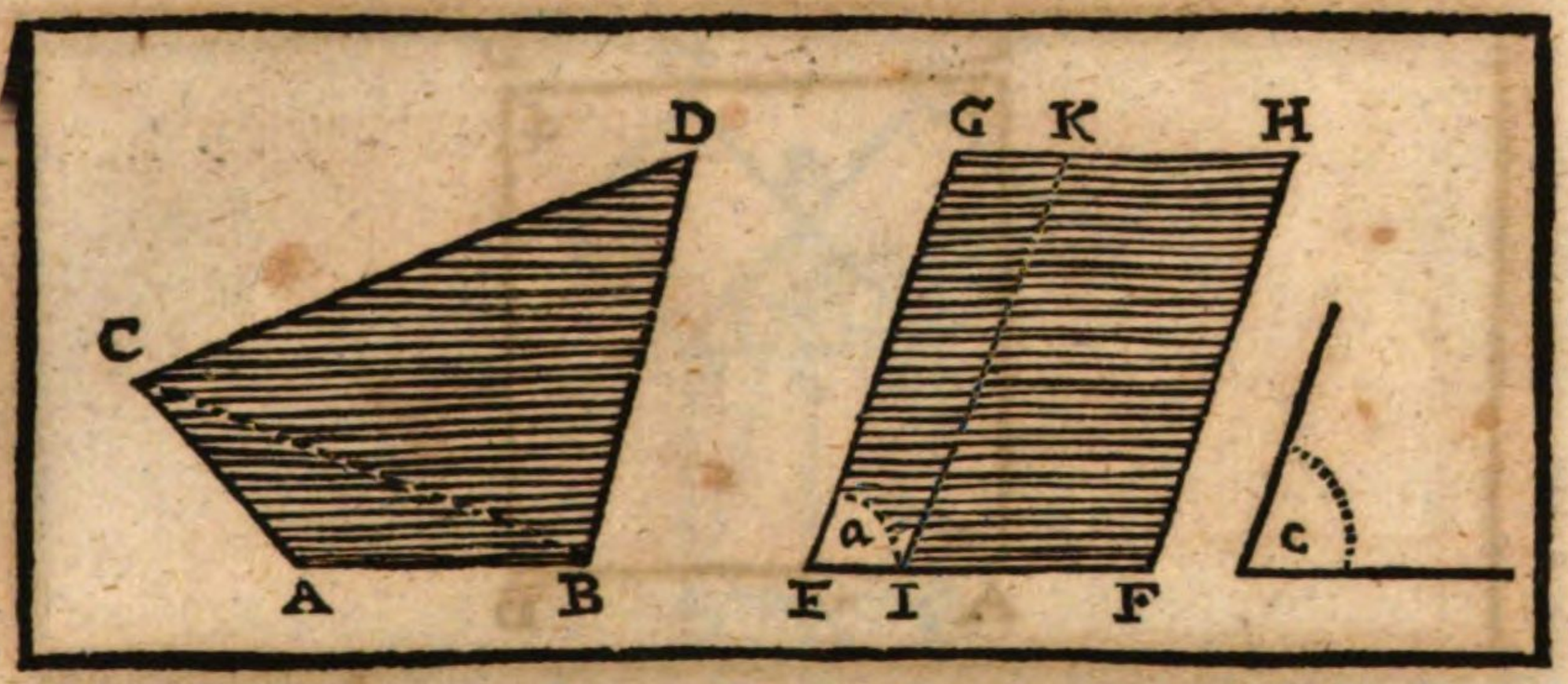
Auff einer vorgegebenen geraden Linie (A) ein Parallelogram (NPOF) gleich groß einem vorgegebenen Triangel (BCD) zu machen, welches auch einen Winckel (c) gleich einem andern fürgegebenen geradlinischen Winckel (a) habe.

Handgriff.

Mache den △ EFG ⊓, dem △ BCD. b. 22. I.
Das ▭ HFIK mache ⊓, dem △ EFG,
Welches den ∠ b ⊓ habe, dem vorgegebenen ∠ a. b. 42. I.
Verlängere FF, und mache FP ⊓, der Linie A.
Auß P ziehe die Linie PL = der FK, b. 31. I.
Welche die verlängte GIK im Punct L durchschneide.
Auß dem Punct L, und durch den Punct F ziehe den Diameter
LF, biß er die verlängte IH durchschneide in dem Punct M.
Auß dem Punct M ziehe die Linie MO = der Linie HP, b. 31. I.
Welche die verlängte LP durchschneide im Punct O.
Unterdessen verlängere KF biß in Punct N.
So wird das ▭ NOFP ⊓ gemacht worden seyn,
Dem △ EFG, oder dem gleichen △ BDC,
und der ∠ c ⊓, dem ∠ a;
und die Linie FP ⊓ der Linie A.

Beweiß.

Die Außfüllung FO ist ⊓, der Außfüllung FI. b. 43. I.
Das ▭, oder Außfüllung FI ist ⊓ gemacht worden, b. d. Hand.
dem △ EFG, oder BCD.
Darumb wird die Außfüllung, oder ▭ FO ⊓ seyn,
dem vorgegebenen △ BCD.
So hat es auch die Seite FP, und NO ⊓, der Linie A, und den
∠ c ⊓ dem ∠ a. b. d. Hand.
(dann der ∠ c ist ⊓ dem ∠ b, b. 29. I.
und der ∠ b ist ⊓ gemacht worden, dem ∠ a.
Welches zu machen ware.



Die XLV. Vorgab.

Handgriff.

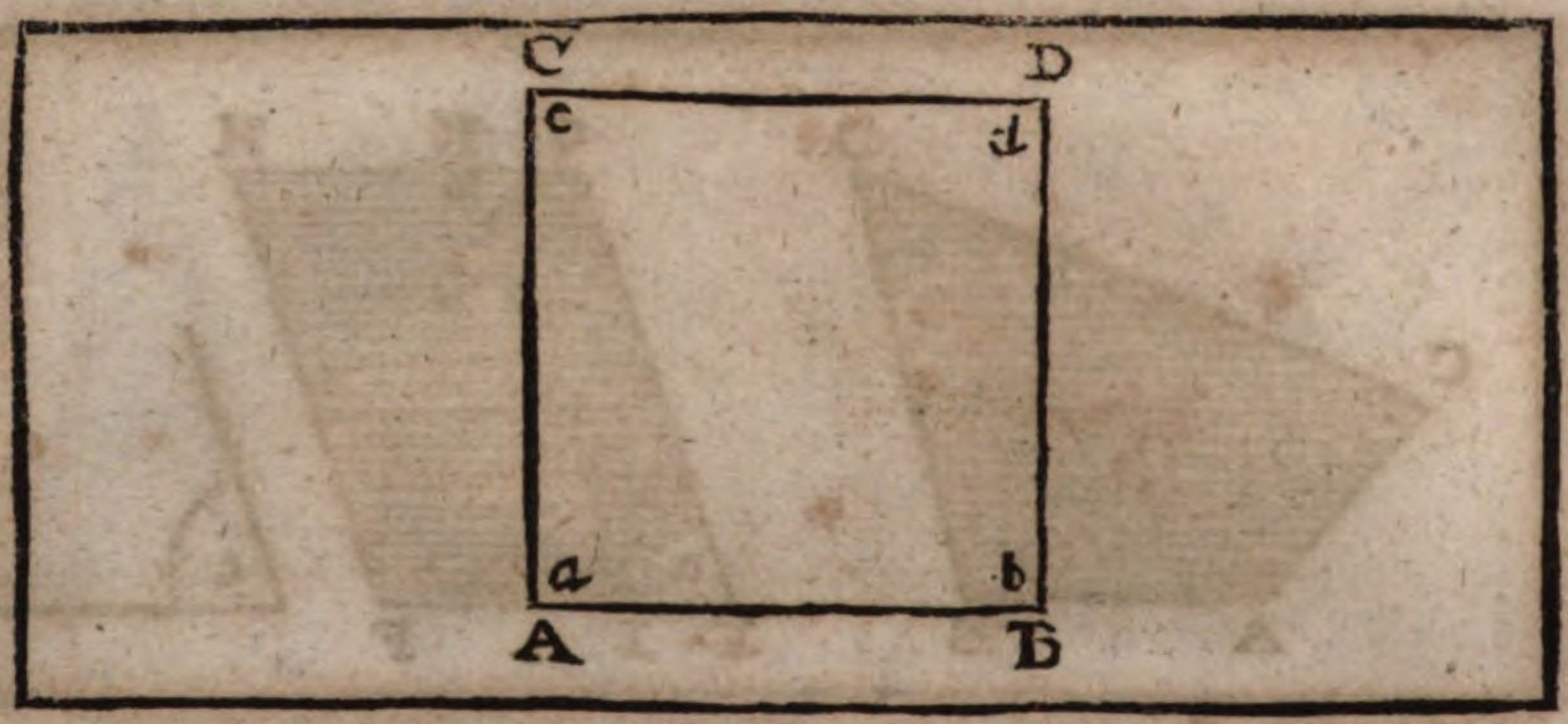
Ein Parallelogram (GF) zu machen, welches einer andern vorgegebenen geradlinischen Figur (ABDC) gleich seye, und einen Winckel (a) gleich einem andern vorgegebenen geradlinischen Winckel (c) habe.

Handgriff.

Zertheile die geradlinische Figur in lauter △.
nemlich in den △ ABC, und BCD.
Mache das ▭ GI ⊓, dem △ ABC, d. 42. 1.
Welches den ∠ a ⊓ habe, dem vorgegebenen ∠ c.
Verlängere EI, und mache auff IK das ▭ KF ⊓, dem △ BCD, d. 44. 1.
So wird das grosse ▭ EGHF darauß entspringen,
Welches ⊓ ist der vorgegebenen Figur ABCD.

Beweiß.

Das ▭ GEIK ist ⊓, dem △ ABC,
und das ▭ KIFH ist ⊓, dem △ BCD. } d. d. Hand.
Die zwey △ ABC, und BCD machen aber die Figur ABCD:
und die zwey ▭ GI, KF machen auch das grosse und einige ▭ EFGH.
Dahero folget, daß das ▭ EH ⊓ seye, der vorgegebenen geradlinischen Figur ABCD.
so ist auch der ∠ a ⊓, gemacht worden dem ∠ c. d. d. Hand.
Welches zu machen ware.



Die XLVI. Vorgab. Handgriff.

Auff einer gegebenen geraden Linie (AB) ein Quadrat, oder gleiches Vier-Eck (ABCD) zu machen.

Handgriff.

An beyden Enden A und B erhöhe zwo ⊥ AC, und BD, welche gleich lang seyn müssen, der Linie AB. — d. II. I.
Ziehe zusammen die Puncten CD mit einer geraden Linie.
so ist das □ ABCD verfertiget.

Beweiß.

Die ∠ a, und b seynd zween rechte ∠. — d. d. Hand.
darum ist AC = der BD. — d. 28.
Die Linie AC ist ⊓ der Linie BD. — d. d. Hand.
Dahero wird die Linie CD = seyn, der Linie AB, — d. 33. I.
und folgends wird AD ein ▭ seyn. — d. 35 def. I.
Weilen aber die zwo Seiten CA, BD ⊓ seynd gemacht worden der dritten Seiten AB.
und auch CD, ohne das ⊓ ist der Seiten AB. — d. 34. I.
So wird dann AD ein gleichseitiges ▭ seyn,
Unterdessen seynd die ∠ a und b zwey Rechte, — d. d. Hand.
Dahero werden auch die überstehende zwey ∠ c und d zwey Rechte seyn. — d. 34. I.
Und deßwegen wird AD ein □ oder Vier-Eck seyn, — d. 29. def. I.
Welches zu machen ware.

Anmerckung. I.

Ein jedes ▭, welches umb einen rechten ∠ zwey gleich lange Seiten hat, ist ein □.

II.

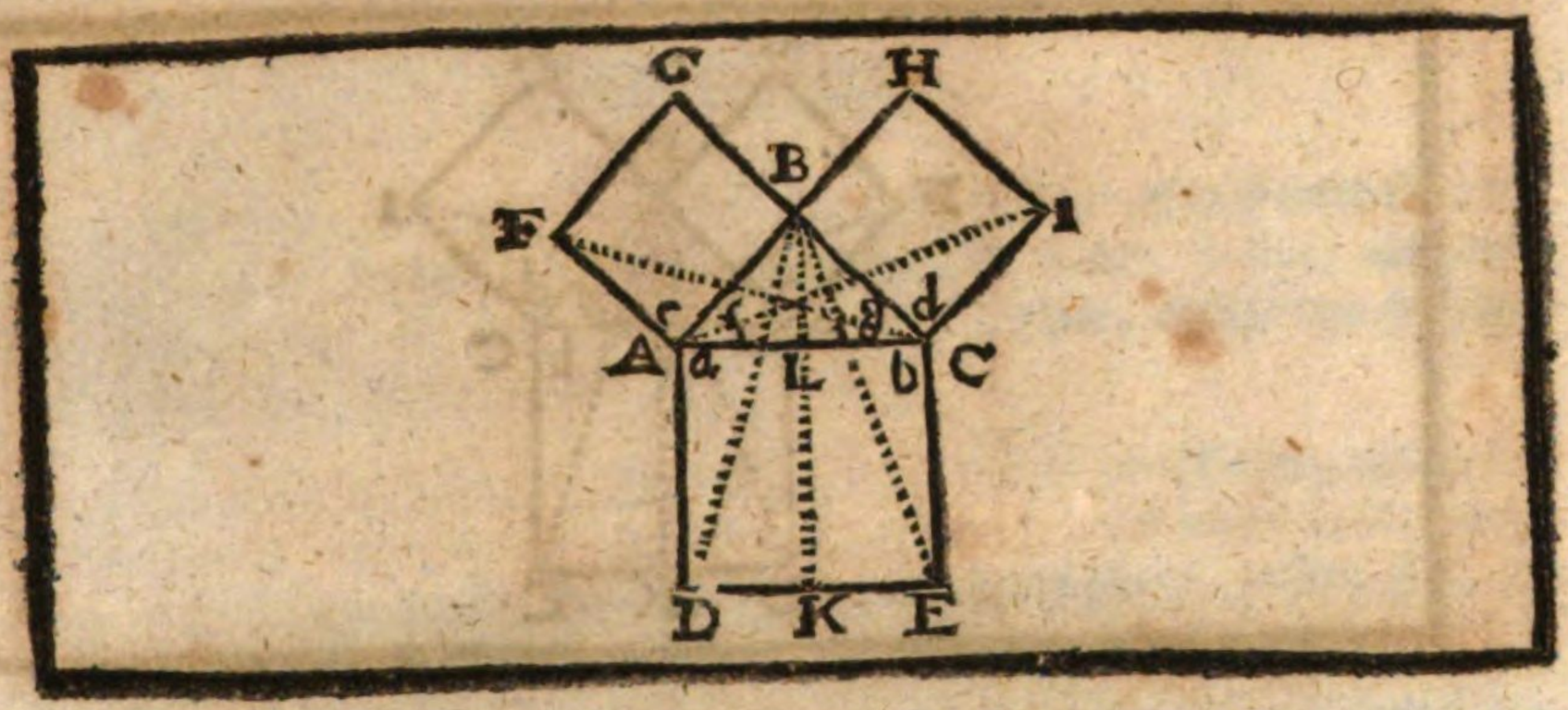
In einem jeden ▭, welches einen Rechten ∠ hat, werden auch die übrige dreye ∠ Rechte seyn.

III.

Auff gleich geraden Linien, seynd die darauff gemachte □ einander gleich groß.

IV.

Gleich grosse □, das ist, welche einen gleichen Inhalt begreiffen, stehen auff gleich geraden Linien.



Die XLVII. Vorgab.

Betrachtung.

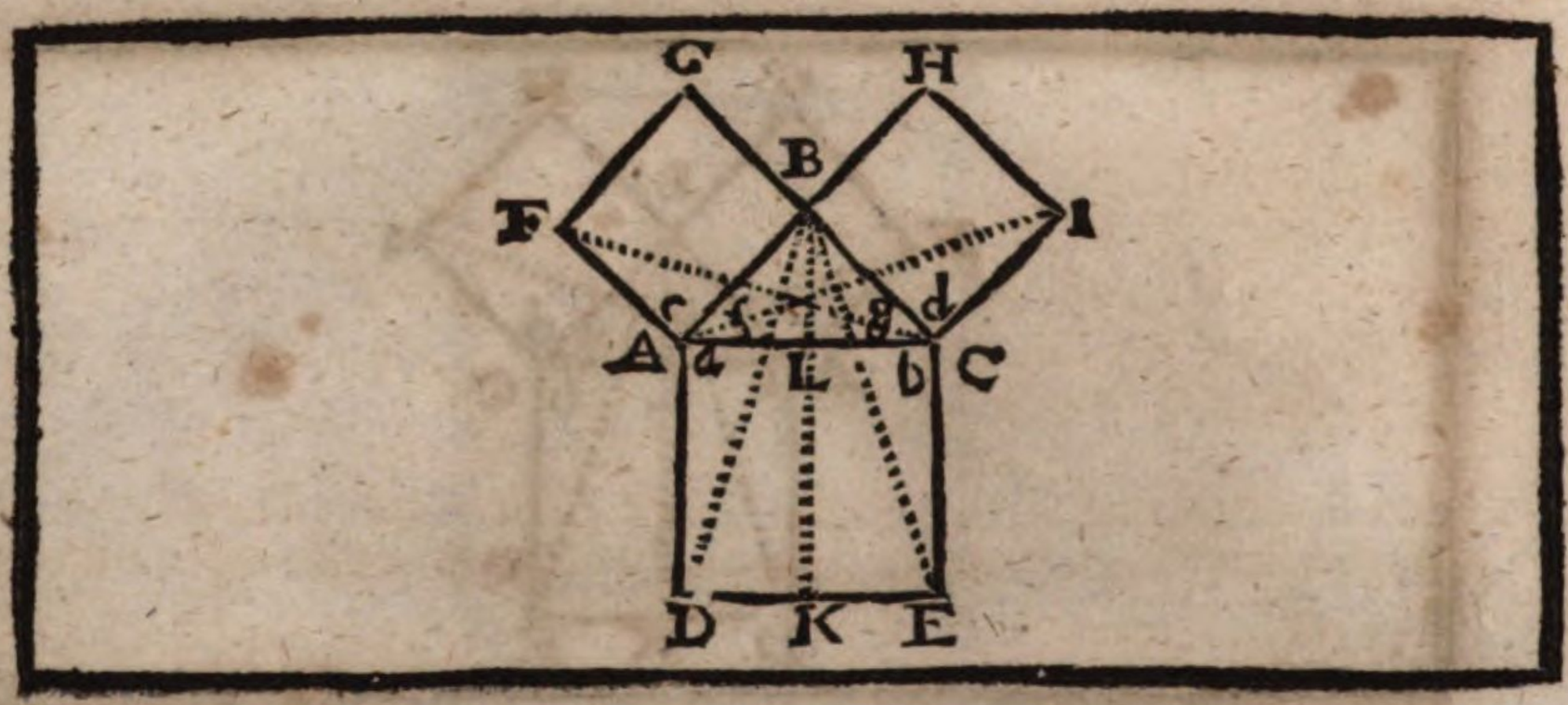
In dem Rechtwinckiichten Triangel (als wie ABC) ist das Quadrat (AE) auf der Seiten (AC), welche den Rechten Winkel (ABC) unterspannet; gleich so groß, als die zwey Quadraten (CH, und AG), welche auf denen zwey andern Seiten (AB, BC), so den rechten Winckel beschliessen, gemacht werden.

Zubereitung.

Auß dem Punct B ziehe die gerade Linie BK ═, der AD oder CE. d. 31. I.
Ziehe zusammen mit geraden Linien AI, CF, DB, und EB.

Beweiß.

Der ∠ b ist ⊓, dem ∠ d.
(dann wegen deren □, AE, CH, beyde ∠ rechte seynd.)
Setze beyderseits hinzu den gemeinen ∠ g.
So wird auch der ∠ b + g ⊓ seyn, dem ∠ d + g.
Nunmehro ist in denen zwey △ ECB, und ACI
erstlich der ∠ b + g ⊓, dem ∠ d + g.
Und die zwo Seiten EC, CB ⊓, denen zwo Seiten AC, CI.
(dann AE und CH, wie vorgemeldet, □ seynd)
Dahero wird der △ ECB ⊓ seyn, dem △ ACI d. 4. I.
Unterdessen ist das □ KLCE doppelt deß △ ECB. d. 41. I.
Und auch das □ BHIC ist doppelt deß △ ACI. d. d. selbe.



Folget, daß auch das ▭ KLCE seye ⊓ dem □ BHIC. d. 6. ax.

Ferner, weilen der ∠ c ⊓ ist, dem ∠ a. d. 29. def. 1.
setze zu diesen beyderseits hinzu den gemeinen ∠ f.

So wird auch der ∠ c + f ⊓ seyn dem ∠ a + f.

Nun betrachte die zwey △ FAC, und BAD, allwo
die Seiten FA ⊓ ist, der Seiten AB; und AC ⊓ der AD. d. 29. def. 1.
und, wie schon bewiesen, der ∠ c + f ⊓ ist, dem ∠ a + f.

Darumb ist der △ FAC ⊓ dem △ BAD. d. 4. 1.

Unterdessen ist das ▭ LKDA doppelt deß △ BAD, d. 41. 1.
und das □ ABGF doppelt deß △ FAC, d. d. selbe.

Folget, daß auch das ▭ LKDA ⊓ seye, dem □ ABGF. d. 6. ax.

Weilen aber beyde ▭ LKDA, + KLCE das □ AE machen.

So schliesset man, daß also das □ AE ⊓ seye beyden □ CH, und
AG, sammentlich.

Welches zu beweisen ware.

Anmerckung.

Hierauß ist leichtlich abzunehmen, daß in denen △, das □, so auff einer Seiten, welche einen spitzigen ∠ unterspannet, gemacht wird, ⅂ seye, als beyde □ sammentlich, so auff denen übrigen zwo Seiten, welche den spitzigen ∠ beschliessen, gemacht werden.

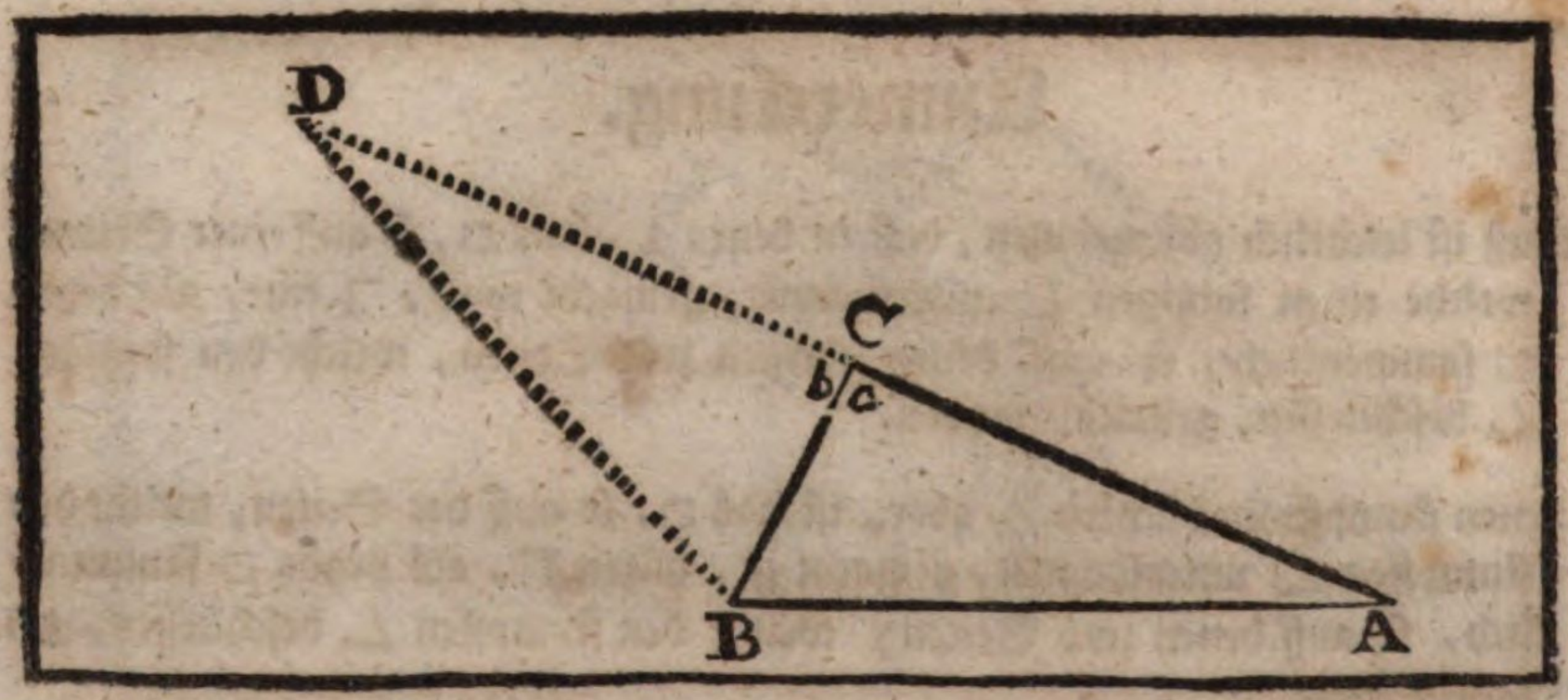
In denen stumpffwincklichten △ aber, ist das □, so auff der Seiten, welche den stumpffen ∠ unterspannet, gemacht ist, allzeit ⌜, als beyde □ sammentlich, so auff denen zwo Seiten, welche den stumpffen ∠ beschliessen, gemacht seyn.

Die Ursach ist augenscheinlich, dann wann man den stumpffen ∠ solcher Gestalten zusammen ziehet, biß er endlich ⌐ wird, einem Rechten ∠; die zwey Seiten aber allweil in einerley Länge verbleiben, alsdann die Seiten, welche den stumpffen ∠ unterspannet, kleiner werden wird.

Entgegen, wann man den spitzigen ∠ so lang von einander ziehet, biß er letzlich einem Rechten ∠ ⌐ werde, die übrige zwo Seiten aber, welche den spitzigen ∠ beschliessen, allzeit in einerley Länge verbleiben, so wird die Seiten, welche den spitzigen ∠ unterspannet, gröſſer werden.

In der vorhergehenden ist unterdessen bewiesen worden, daß das □, so auff der Seiten gemacht ist, welche den rechten ∠ unterspannet, ⌐ seye, denen zwey □ sammentlich, so auff denen übrigen Seiten gemacht seynd.

So folget ja klar, daß das □, so auff der Seiten gemacht ist, welche den stumpffen ∠ unterspannet, ⌜, und hinwiederumb das □, so gemacht ist auff der Seiten, welche den spitzigen ∠ unterspannet, ⅂ seye, als die zwey □ sammentlich auff denen übrigen zwo Seiten, so gedachte ∠ beschliessen.



Die XLVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann das Quadrat auff einer Seiten (als wie AB) in einem Triangel (ACB) gleich ist, denen andern zweyen Quadraten sammentlich, welche auff denen andern zwo Seiten (AC, BC) beschrieben worden: so wird der Winckel (a), welcher von sothanen andern zwo Seiten beschlossen ist, ein rechter Winckel seyn.

Zubereitung.

Auff CB erhöhe auß dem Punct C die ⊥ CD. d. 11. 1.
Mache CD ⊓, der Seiten AC; und ziehe DB zusammen.

Beweiß.

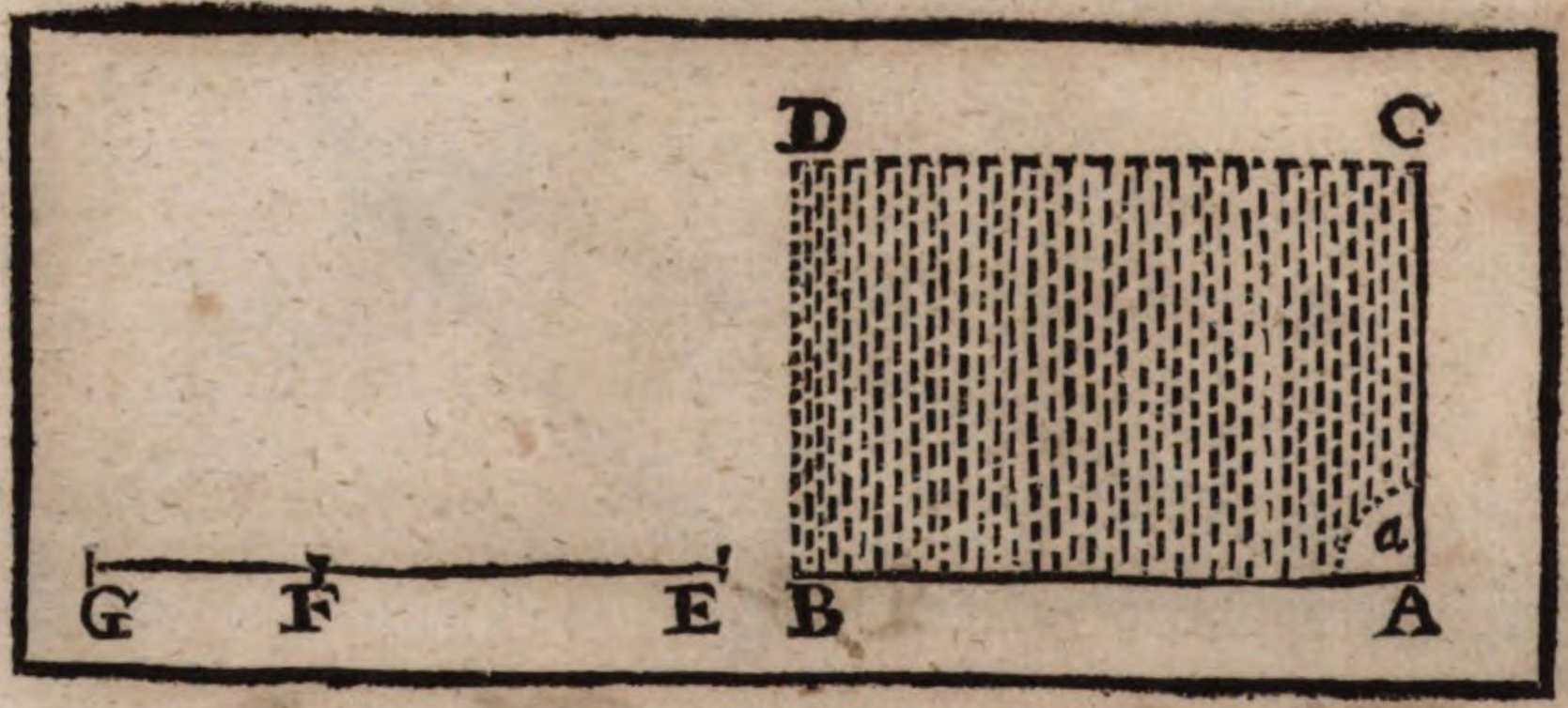
Der ∠ b in dem △ BCD ist ein Rechter ∠, d. d. Zub.
Darumb wird das □ auff DB ⊓ seyn, denen zwey □ auff BC, CD. d. 47. 1.
Die Linie CD ist unterdessen ⊓ gemacht worden, der Linie CA. d. d. Zub.
Folget, daß auch das □ auff DB ⊓ seye, denen zwey □ auff BC, CA.
Denen □ auff BC, und CA aber ist ⊓ gegeben, das □ auff BA. d. d. Vor.
Dahero wird das □ auff BD ⊓ seyn, dem □ auff BA.
Und folgends durch die vierdte Anmerkung der 46. Vorg. dieses Buchs wird die Linie BA ⊓ seyn, der Linie BD, v. s. f.
Dahero wegen der drey gleichen Seiten wird der △ ABC ⊓ seyn, dem △ BCD. d. 8. 1.
Und weilen der ∠ b ein Rechter ∠ ist, so d. d. Zub.
Folget letzlich, daß auch der ∠ a ein Rechter ∠ seyn müsse.
Welches zu beweisen ware.

Das

Anderte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort = Erklärungen.

I.

Ein Recht = wincklichtes Parallelogram ist, welches von zwey geraden Linien (AB, AC) beschlossen wird, und einen rechten Winckel (a) hat.

Dieses ist also zu verstehen, nemlich, daß ein Recht = wincklichtes Parallelogram nur zwey gewisse Linien (deren eine die Basis, die andere aber die Höhe genant wird) einen Raum darmit einzuschliessen, nöthig habe: dann wann einer sich ihme im Sinn einbildet, daß die Höhe AC der Länge AB nach, allzeit ⊥ biß an das Ende B fortgeschoben werde, so solte zweiffelsohne ein solcher Fortschub den Raum CABD hinterlassen, an welchen die zwey Seiten CD und BD gleich und Parallel seyn werden, denen zwo überstehenden Seiten AB und AC. Und dahero die Figur CABD ein Parallelogram durch die 35. def. deß 1. Buchs, und zwar wegen der ⊥ ein Rechtwincklichtes seyn werde. Deswegen man schliesset, daß zu Erkennung des Begriffs, oder Raums eines Rechtwincklichten Parallelograms blosse zwey Seiten, welche den Rechten Winckel begreiffen, nöthig seyn.

Anmerckung.

I.

Ein Rechtwincklichtes Parallelogram, welches auch eine Winckelrechte Figur genannt ist, wird in diesem Buch so wol für ein Quadrat, als für ein gewöhnliches Parallelogram, welches bloß die überstehende Seiten einander ⊓, ═, und einen rechten Winckel hat, genommen.

II.

Ein Winckel = Rechtes Parallelogram, von zwey gleichen Seiten, wird in diesem Buch mit dem Zeichen ▭, und ein Winckelrechtes Parallelogram von vier gleichen Seiten, das ist, ein Quadrat, mit dem Zeichen □ angedeutet.

III.

III.

An statt daß man sonsten ein ▭ oder □ mit vier Buchstaben beschreibet, als wie hier das ▭ ABCD, so pflegt man Kürtze halber, dasselbe nur mit drey Buchstaben zu bezeichnen, von welchen der mittlere den Rechten Winckel, und die andere zwey, die zwey Seiten andeuten, gleich wie in dem ▭ CAB seynd die zwo Seiten CA, AB, mit welchen der Rechte ∠ a beschlossen ist. Doch werden die gemachte ▭ bloß nur mit zwey Buchstaben, welche längst dem Diameter gegen einander über stehen, beschreiben, also an statt ABDC, oder CAB schreibet man allein AD, oder BC.

IV.

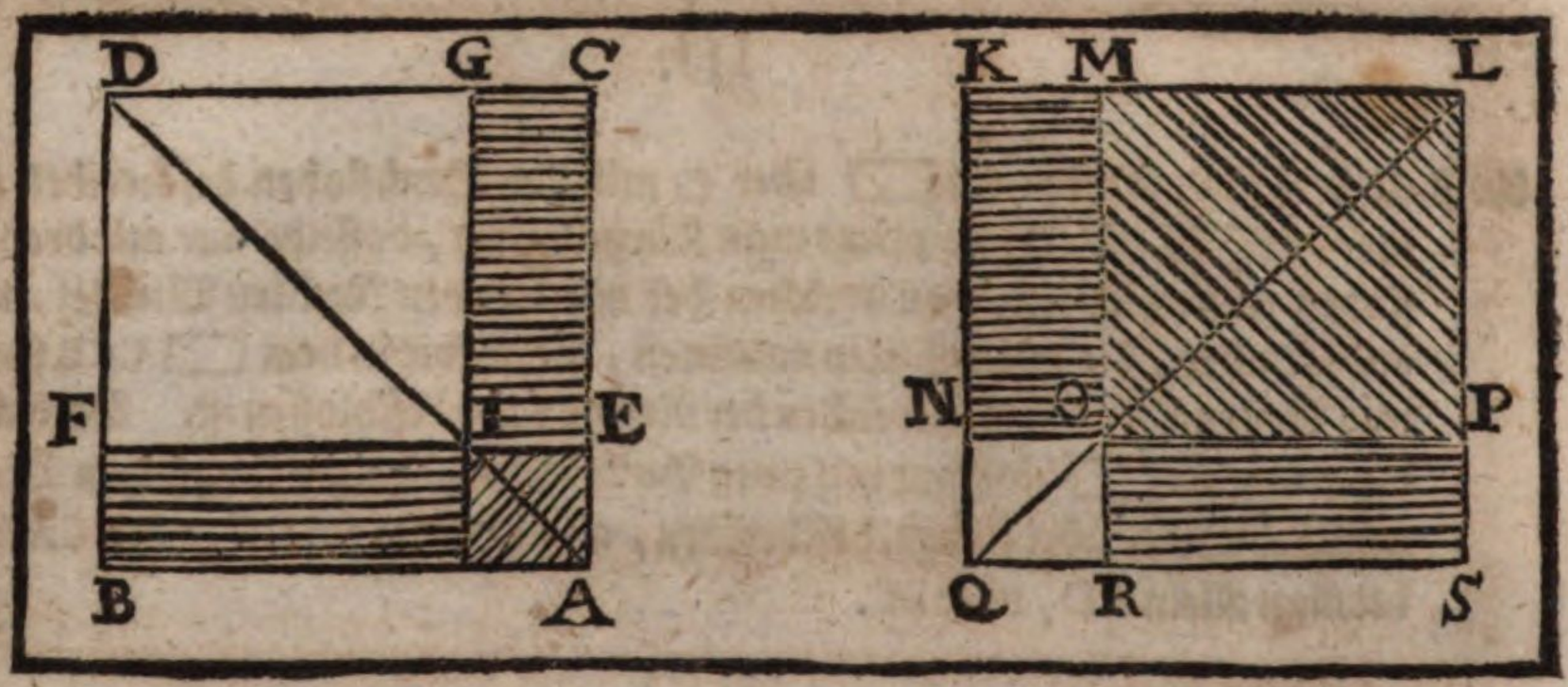
Man pfleget auch schlecht hinauß eine gerade Linie zu ziehen, gleich wie GE, und solche an einem gewissen Punct, als wie in F, durchzuschneiden, welches hernachmahlen ein Recht-wincklichtes Parallelogram bedeutet, welches von denen zwey Seiten GF, FE (so umb den rechten Winckel F stehen) beschlossen ist, und also geschrieben wird, das ▭ EFG, oder GFE.

V.

Wann die Basis eines ▭, oder □ durch die Höhe; oder entgegen, die Höhe durch die Basis vermehret wird, so überkommt man in Zahlen den Inhalt deß ▭, oder □. Gesetzt das ▭ AD habe die Höhe AC von 6, und die Basis AB von 12. Klafftern. Wann nun 6 durch 12, oder 12 durch 6 vermehret wird, so kommen im Product 72 Klafftern, (welche aber Quadrat-Klafftern seynd, deren ein jedes in der Länge und Breite just ein Klaffter hat) für den Inhalt deß ▭ AD herauß.

Herentgegen, wann man den Inhalt eines ▭ oder □ durch die Anzahl der Höhe zertheilet, so kriegt man im Quotient die Anzahl der Länge der Basis; oder wann man den Inhalt durch die Anzahl der Länge der Basis zertheilet, so hat man im Quotient die Anzahl der Länge der Höhe.

Zu einem Exempel zertheile 72 mit der Höhe 6, so hast im Quotient 12 für die Länge der Basis; zertheilest aber 72 mit der Basis 12, so kommet ein Quotient herauß 6. für die Länge der Höhe.



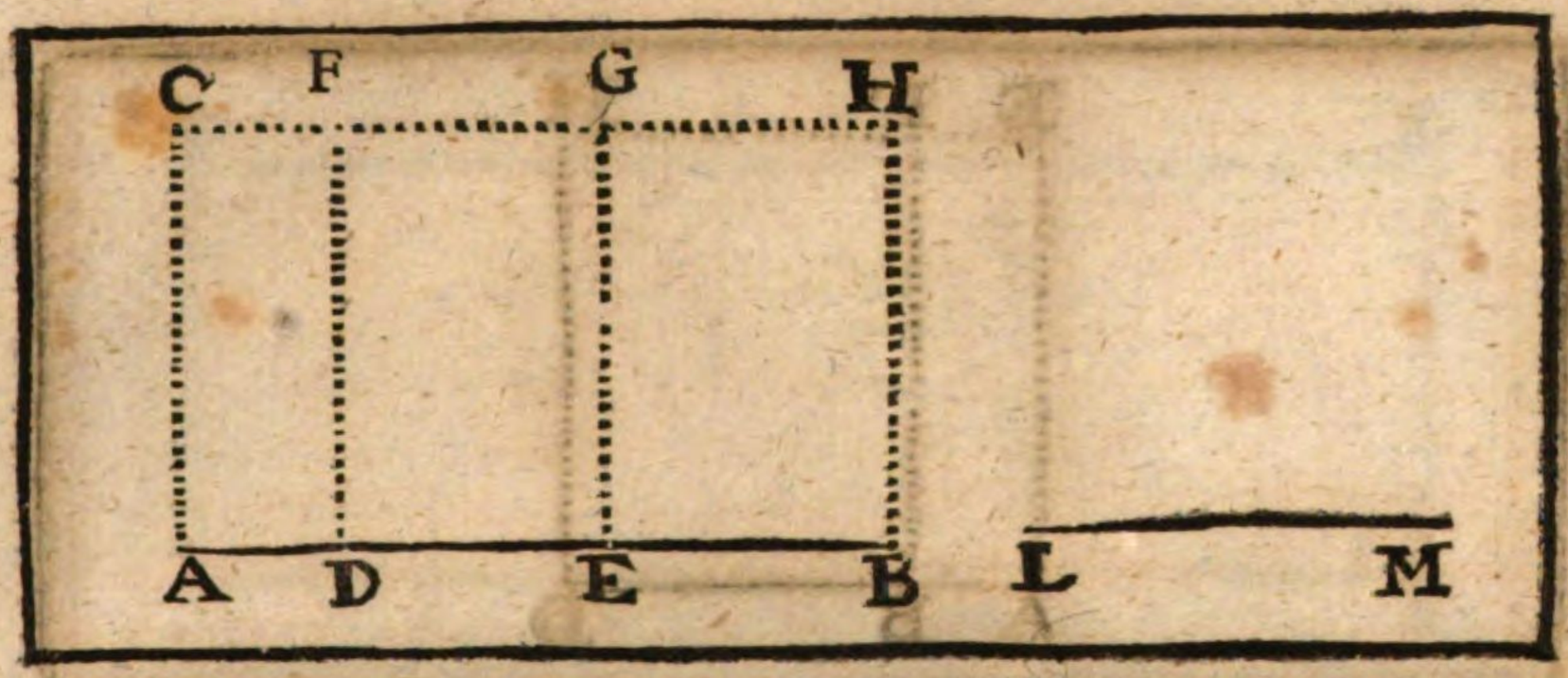
II.

In einem jeden Parallelogram werden die zwey Außfüllungen, oder Complementen, sambt einem auß denen zwey übrigen Quadraten, durch welche der Diameter gehet, der Winckelhacken, oder in Griechischer Sprach, Gnomon geheissen.

Auff zweyerley Art mag dieser Winckelhacken gemacht werden. Dann erstlich kan man zu denen zwey Außfüllungen das grössere Quadrat, hernach auch das kleinere Quadrat darzu nehmen.

In dem Parallelogram AD seynd zu dem Winckelhacken BIC (dann man solchen bloß mit drey Buchstaben anzudeuten pfleget) die zwey Außfüllungen BI, und IC, und das kleinere □ ID genommen worden.

Zu dem Winckelhacken KOS aber in dem Parallelogram QL, seynd die zwo Außfüllungen KO, OS, und das grössere □ OL gebraucht worden.



Die I. Vorgab. Betrachtung.

Wenn zwo gerade Linien (AB, LM) seynd, und man eine darvon (als wie AB) in unterschiedene Theile, gleiche oder ungleiche (nemlich allhier in die ungleiche AD, DE, EB) zertheilet: so wird das Parallelogram (AH), welches von denen zwey geraden Linien (AB, LM) beschlossen worden ist, gleich seyn, allen denen Parallelogramen sammentlich (nemlich AF, DG, EH), so von der unzertheilten Linie (LM), und einem jedwedern Theil der zertheilten Linie (AB) gemacht worden ist.

Das ist, das ▭ AH ist ⊓, denen ▭ AF, + DG + EH.

Zubereitung.

Auß beyden Enden der Linie AB erhöhe die ⊥ AC, und BH, welche gleich lang seyen, der gegebenen LM. — d. 11. 1.

Ziehe die zween Puncten CH mit einer geraden Linie zusammen, so entstehet daraus das ▭ AH, dessen eine Seiten AB zertheilt, die andere aber AC (so ⊓ ist der LM) unzertheilt ist. — d. 1. def. 2.

Unterdessen ziehe aus denen Puncten D, E die Linien DF, EG ═, der Seiten AC, oder BH biß in die Seiten CH. — d. 31. 1.

So kommen die drey ▭ AF, DG, EH hierauß, welche zu einer Seiten die Linie AC, (oder die gleiche LM), zu der andern aber die gegebene Theile AD, DE, und EB haben. — d. 1. def. 2. und 33. 1.

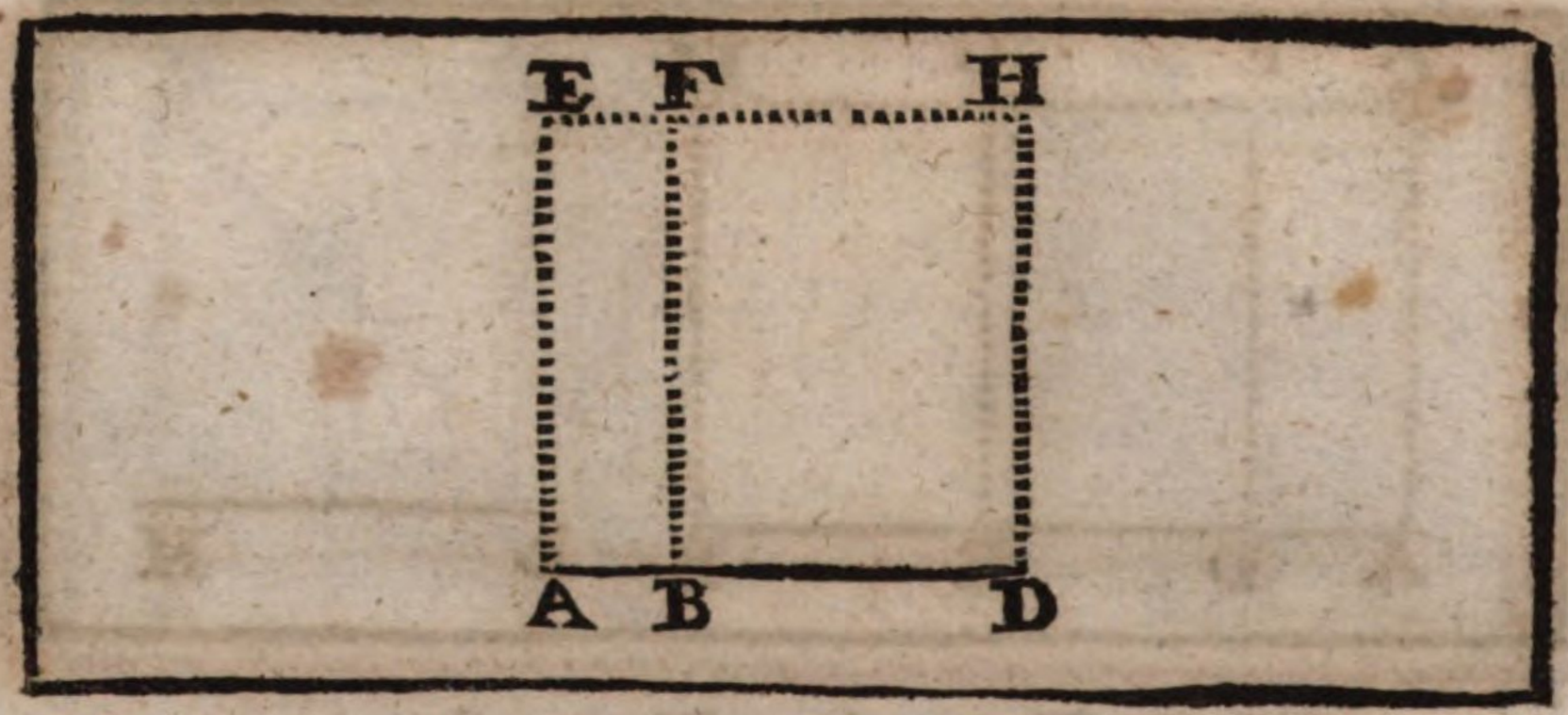
Beweiß.

Erstlich ist aus der Zubereitung klar, daß die ▭ AF, DG, EH Eine Seiten ⊓, der gegebenen unzertheilten Linie LM, zu der andern aber die Theile AD, DE, EB der zertheilten Linie AB haben. — d. d. Zub.

Anderten ist augenscheinlich, daß das ▭ AH, welches zu einer Seiten AC (oder die gleiche LM), zu der andern aber die zertheilte AB hat, ⊓ seye, denen ▭ AF + DG + EH. — d. 14. ax. 1.

(Dann das gantze ist ⊓, allen seinen Theilen sammentlich).

Welches zu beweisen ware.



Die II. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn man eine gerade Linie (AD) nach Gefallen zertheilet (als wie in B), so werden die Parallelogrammen (AF, BH) welche von der gantzen Linie, und denen Theilen begriffen werden, gleich seyn, dem Quadrat (AH) welches auf der gantzen Linie (AD) ist beschrieben worden.

Das ist, die ▭ AF + BH seynd ⊓, dem □ AH.

Zubereitung.

Auff AD mache das □ AH. d. 46. I.

Auß dem Punct B ziehe die Linie BF ═, der Seiten AE oder DH. d. 31. I.

Darauß entstehen nun die zwey ▭ AF, und BH, welche zu einer Seiten die Linie AD, zu der andern aber die Abschnitte AB, BD haben. d. 33. I. u. 1. def. 2.

Beweiß.

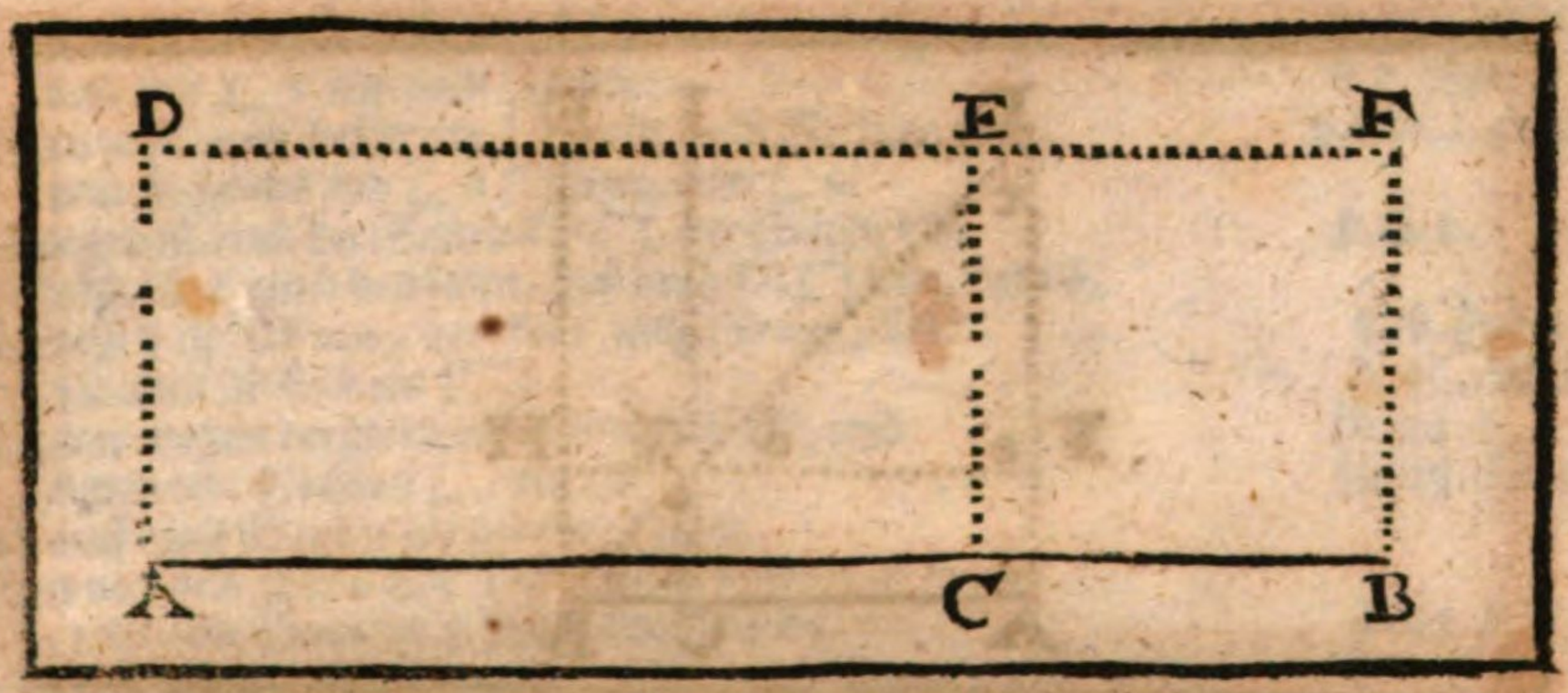
Weilen AH ein □ ist, d. d. Zub.
so werden die vier Seiten einander ⊓ seyn.

Dahero ist klar, daß die zwey ▭ AF, und BH zu einer Seite die gantze Linien AD (dann AE, und DH, oder BF derselben AD ⊓ seynd) zu der andern Seite aber, die Abschnitte, oder Theile AB, BD haben.

Unterdessen ist augenscheinlich zu sehen, daß gedachte zwey ▭ AF, BH eben den Raum, welchen das Quadrat AH hat, einnehmen.

Dahero werden die zwey ▭ AF + BH ⊓ seyn, dem □ auf AD (nemlich die Theile sammentlich seynd ⊓, ihrem Gantzen:)

Welches zu beweisen ware.



Die III. Vorgab.

Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen (als wie in C) zertheilet: so wird das Parallelogram (AF), welches von einem Theil (AC), und der gantzen Linie (AB) ist gemacht worden, gleich seyn, dem Quadrat (CF), so gemacht ist auff einem Theil (CB), und dem Parallelogram (AE), welches von einem (CB), und dem andern Theil (AC) ist beschlossen worden.

Das ist, das ▭ AF ist ⊓, dem ▭ AE + □ CF.

Zubereitung.

Mache auff dem Theil AC das ▭ AE. d. 46. I.
Auß dem Ende B erhöhe die ⊥ BF. d. 11. I.
Verlängere DE, biß sie BF in F berühre, d. 33. I.
So erwachsen hierauß, das ▭ AE, und das □ CF. u. 1. def. 2.

Beweiß.

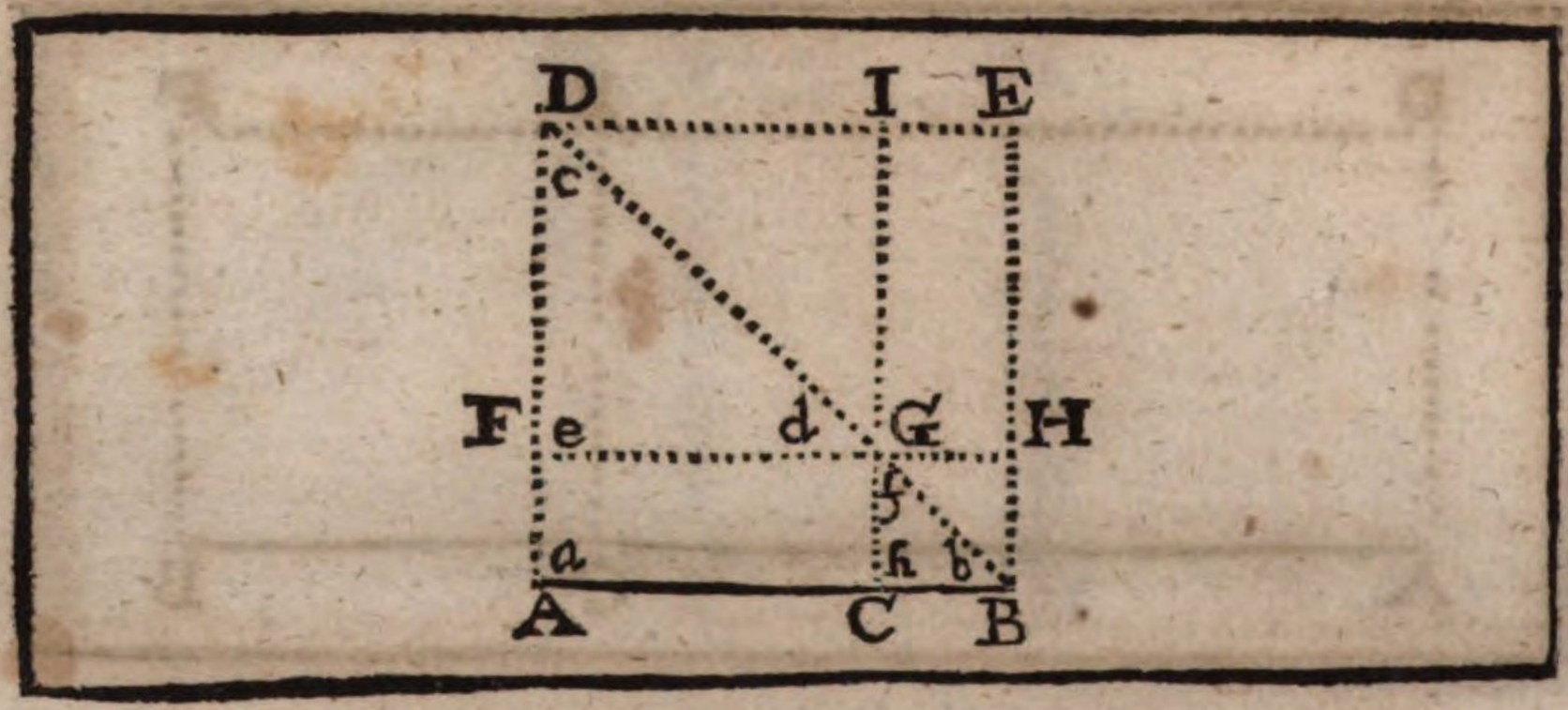
Es ist klar, daß das □ CF ihre Seiten ⊓ hat, dem einen Theil CB. d. d. Zub.

So hat auch das ▭ CB wegen deß □ AC die eine Seiten CE ⊓, dem einen Theil CB, und zu der andern Seite, den andern Theil AC.

Dieses □ CF sambt dem ▭ AE nehmen unterdessen denselben Raum ein, welchen das ▭ AF beschliesset, so zu einer Seiten die gantze AB, und zu der andern den Theil CB, oder AD hat.

Dahero ist das ▭ AF ⊓, dem □ CF + ▭ AE. d. 14 ax. 1.
(das gantze seinen Theilen sammentlich.)

Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen zertheilet (als wie in C), so wird das Quadrat (AE), welches auff der gantzen Linie (AB) ist beschrieben worden, gleich seyn, denen zwey Quadraten (BG, und GD), so auff beyden Theilen (AC, BC) gemacht, und denen zwo Winckelrechten Figuren (AG, GE), welche von denen beyden Theilen (AC, CB) seynd beschlossen worden.

Das ist, das □ AE ist ⌐ denen zweyen □ DG + GB + zweyen ▭ AG + GE.

Zubereitung.

Mache auff AB, das □ AE. d. 46. I.
Ziehe den Diameter BD.
Auß C ziehe die Linie CI ═, der Seiten BE, oder AD. d 31. I.
allwo sie der Diameter durchschneidet, nemlich in Punct G.
Durch diesen Punct ziehe die Linie FH ═, der Seiten AB, oder DE.
Nunmehro stehet zu beweisen, daß die ▭ DG, und GB zwey □ seynd, und zu ihren Seiten die Theile AC, CB haben.
Hernach, daß die ▭ AG, und GE auch von denen zwey Seiten AC, CB beschlossen seynd.

Beweiß.

Weilen AE ein □ ist, d. d Zub.
so werden die vier Seiten einander ⌐ seyn.
Dahero in dem △ DAB, wegen der gleichen Seiten AD, AB
seynd die zwey ∠ c und b einander ⌐. d. 5. I.
Unterdessen ist der ∠ a ein Rechter ∠ d. 29. def. I.
Folget, daß also die ∠ c und b zwey halbrechte seynd. d. Cor. 2. 32.

Ferner ist in dem △ DFG der ∠ e ein Rechter ∠ d. 29. def. 1.
und der ∠ c ein halb Rechter. d. d. Vor.
Dahero wird auch der dritte ∠ d ein halb Rechter seyn. d. Cor. 1. 32. 1.
und folgends der ∠ d ⌐ seyn, dem ∠ c.
Deßwegen ist auch die Seiten FD ⌐, der Seiten FG. d. 6. 1.
Auff solche Art wird bewiesen, daß auch DI ⌐ seye, der IG.
Unterdessen ist DF ═, der GI: und FG ═, DI. d. d. Zub.
darumb ist GD ein ▭. d. 35. def. 1.
Und zwar wegen dergleichen Seiten FD, FG, und d. 34. 1.
denen vier Rechten ∠, ein □. u. 29. def. 1.
Eben auff diese Weise wird BG ein □ seyn.
Weilen nun das □ BG auff dem Theil CB stehet, und das
□ GD die Seite GF ⌐ hat, der Linie AC. d. 34. 1.
So folget letzlich, daß diese zwey □ BG, und GD zu ihren Seiten
Die Theile AC, CB haben, welches das erste zu beweisen ware.
Nunmehro, indeme BG ein □ ist, so wird CG ⌐ seyn, der GH.
das ist, beyde Seiten CG, und GH seynd ⌐, dem Theil CB. d. 34. 1.
Auch weilen GD ein □ ist, so wird FG ⌐ seyn, der GI.
das ist, beyde Seiten FG und GI seynd ⌐, dem Theil AC. d. 34. 1.
Dahero seynd beyde ▭ AG, GE von gleichen Seiten FG, GC,
und IG, GH (welche ⌐ seynd, denen Theilen AC, CB) beschlossen.
Letzlich ist augenscheinlich, daß diese zwey □, sambt denen
zwey ▭, das □ AE außfüllen.
Dahero ist das □ AE ⌐, denen zwey □ DG, GB + zwey ▭
AG + GE
Welches zu beweisen ware.

Folge. I.

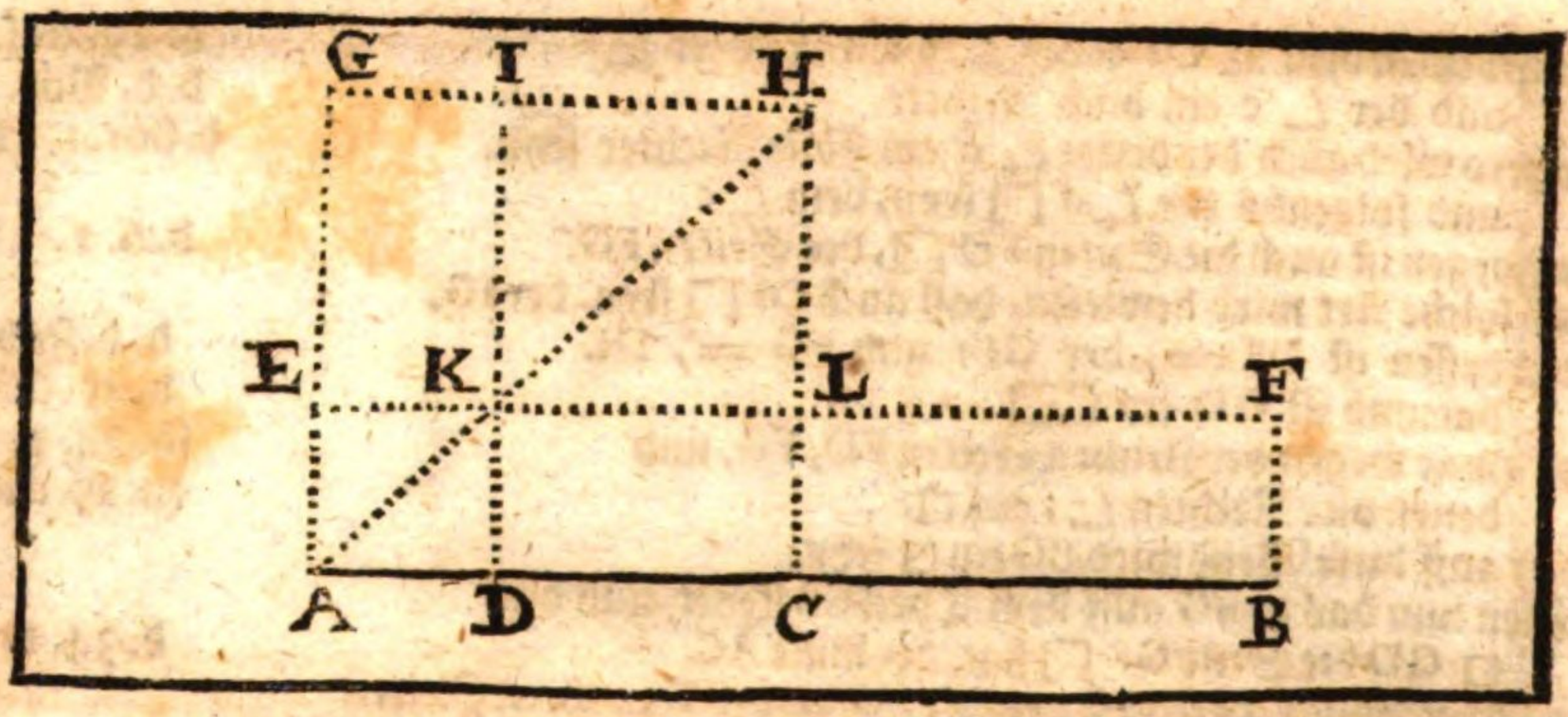
Die Parallelogramen umb den Diameter eines Quadrats seynd □.

II.

Der Diameter schneidet die ∠ in denen □ gleich entzwey, gleich wie es von denen ▭ in der 34. Vorg. deß 1. Buchs ist bewiesen worden.

III.

Wann eine gerade Linie just entzwey getheilet wird, so ist das beschriebene □ auff derselben Linie ⌐, 4 □, welche ihre Seiten ⌐ haben der Helffte derselben Linie: dann alle diese vier □ können umb den Diameter gesetzt werden; so folget auß diesen, daß ein □ auff der Helffte derselben Linie $\frac{1}{4}$ von dem □ auff der gantzen Linie seye.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (in C), und in zwey ungleiche (als wie in D) zertheilt: so wird das Quadrat (AH) auff der halben Linie (AC) gleich seyn, der winckelrechten Figur (DF), welche von denen zwey ungleichen Theilen (AD, DB) ist beschrieben worden, sambt dem Quadrat (KH), welches auff dem mittlern Theil (CD) ist gemacht worden.

Das ist, das □ AH ist ⊓, dem ▭ DF + □ KH.

Zubereitung.

Mache auff der halben AC das □ AH, und ziehe den Diameter AH.

Auß D ziehe die Linie DI ═, der AG, oder CH, welche den gezogenen Diameter AH in Punct K durchschneidet. d. 31. 1.

Durch K ziehe die Linie EF ═, und ⊓ lang, der Linie AB.

Hange letzlich B, F zusammen.

Beweiß.

Es ist klar, das AK, KH □ seynd, und zu dero Seite die ungleiche Theile AD, DC haben; daß auch DF ein ▭ von denen Theilen AD, DB seye. d. 1. Cor. 4. 2. und 34. 1.

Nunmehro, weilen das ▭ CK ⊓ ist, dem ▭ KG. d. 43. 1.

setze beyderseits hinzu das gemeine □ AK.

So wird das ▭ CE ⊓ seyn, dem ▭ GD. d. 2. ax. 1.

Das ▭ CE aber ist ⊓, dem ▭ CF. d. 36. 1.

Darumb wird auch das ▭ GD ⊓ seyn, dem ▭ CF.

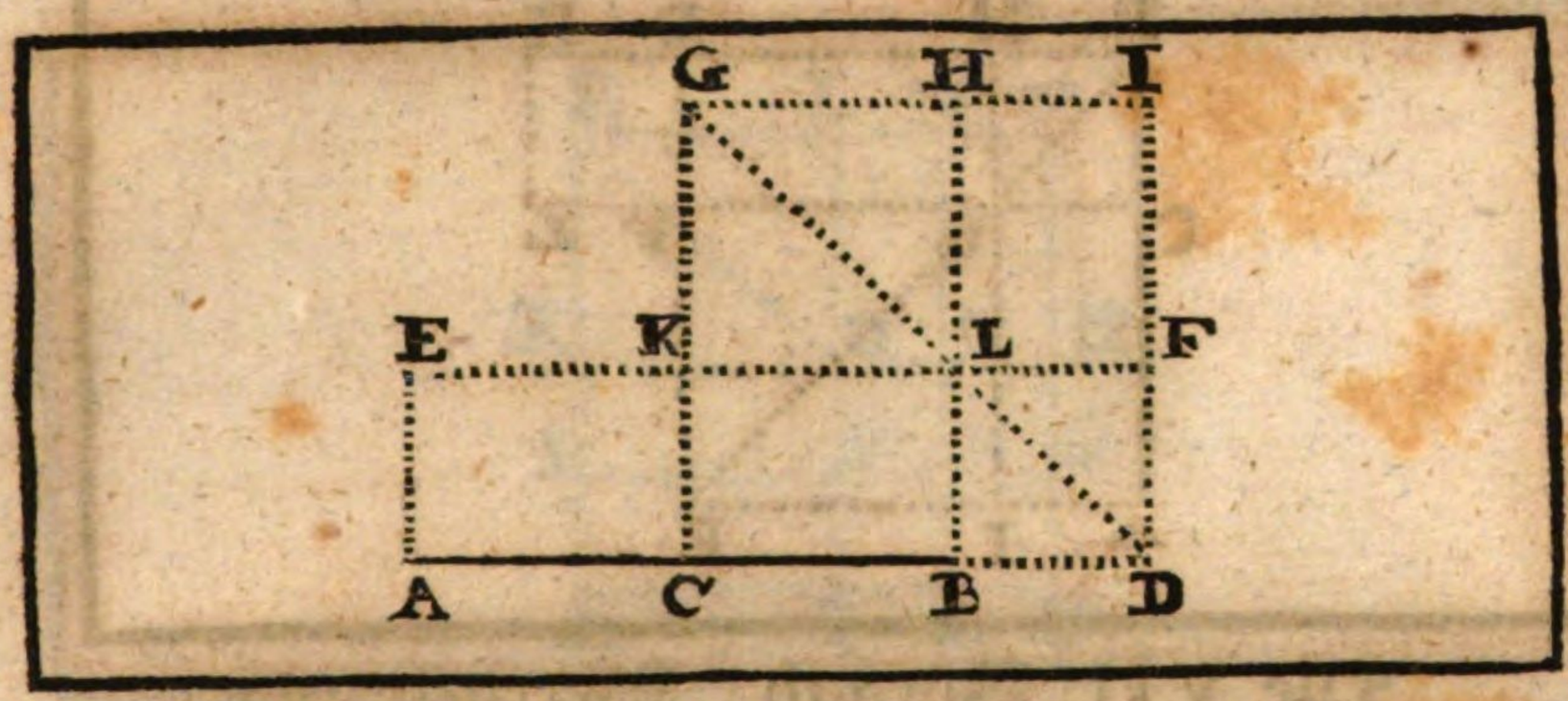
Setze nun hinzu beyderseits das gemeine ▭ CK.

So wird der Winckelhacken GKC ⊓ seyn, dem ▭ DF.

Setze letzlich beyderseits hinzu das gemeine □ KH.

So wird das □ AH ⊓ seyn, dem ▭ DF + □ KH.

Welches zu beweisen ware.



Die VI. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (als wie in C) theilet, und eine andere gerade Linie (BD) daran stosset: so wird die winckelrechte Figur (AF), welche von der gantzen Linie (AB), und dem Zusatz (BD) als einer einigen geraden Linie, und von dem Zusatz (BD), als der andern Linie ist gemacht worden, sambt dem Quadrat (KH) der halben Linie (CB) gleich seyn, dem Quadrat (CI), welches auff der halben Linie (CB), und dem Zusatz (BD), als einer einigen Linie, ist beschrieben worden.

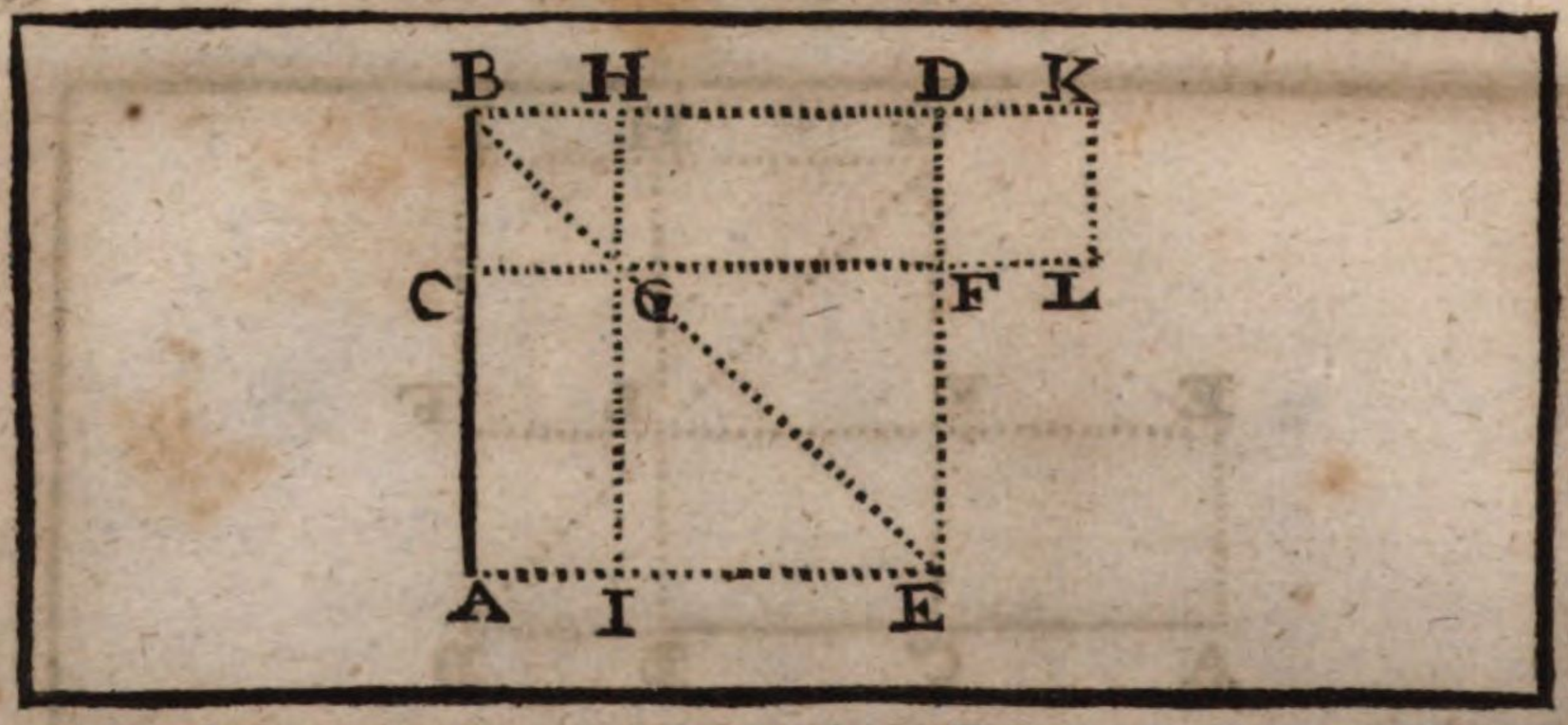
Das ist, das ▭ AF + □ KH ist ⊓ dem □ CI.

Zubereitung.

Auff der Linie CD mache das □ CI, und ziehe den Diameter DG. d. 46. I.
Auß B ziehe die Linie BH ═, der Seiten DI, oder CG; alwo sie den Diameter, nemlich in dem Punct L, durchschneidet, d. 31. I.
Durch diesen ziehe die Linie FE ═, und ⊓ lang, der AD. d. 31. I.
Hange letzlich A, E zusammen.

Beweiß.

Erstlich seynd DL, LG □, welche zu dero Seiten die Theile BD, und CB haben. d. 1. Cor. 4. 2.
Hernach ist klar, daß AF ein ▭ von denen Seiten AD, DF seye.
Alsdann, weilen das ▭ EC ⊓ ist, dem ▭ CL. d. 36. I.
das ▭ CL aber ⊓ ist, dem ▭ LI. d. 43. I.
So wird auch das ▭ EC ⊓ seyn, dem ▭ LI. d. 1. ax. I.
Setze unterdessen beyderseits hinzu das gemeine ▭ CF.
Folget, daß auch das ▭ AF ⊓ seye, dem Winckelhacken ILC.
Letzlich setze beyderseits hinzu das gemeine □ KH.
So wird das ▭ AF + □ KH ⊓ seyn, dem □ CI.
Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB, nach Gefallen, (als wie in dem Punct C) zertheilet: so wird das Quadrat (AD) der gantzen Linie, sambt dem Quadrat (FK) deß einen Stücks (CB), gleich seyn, zweymahln der Winckelrechten Figur (AH, oder HL), welche von der gantzen Linie (AB), und dem einen Stück (CB) beschlossen ist, sambt dem Quadrat (EG) deß andern Stücks (AC).

Das ist, das □ AD + □ BG ist ⌐¬, 2. ▭ AH + □ GE.

Zubereitung.

Schreibe auff der Linie AB das □ AD. d. 46. I.

Ziehe den Diameter BE.

Hernach ziehe auß C die Linie CF ═, der Linie BD, oder AE. d. 31. I.
allwo nun CF den Diameter durchschneidet, nemlich in G,

Ziehe durch solchen Punct G die Linie HI ═, der Seiten AB, oder ED. d. 31. I.

Letzlich auff DF (welche ⌐¬ ist, der CB) mache das □ FK. d. 34. I. und 46. I.

Beweiß

Nach der ersten Folge der vierdten Vorgab dieses Buchs seynd BG, und EG □, welche zu dero Seite die ungleichen Theile CB, und AC haben. d. 34. I.

Alsdann, indeme CB, und FD einander ⌐¬ seynd, d. 31. I.
so wird das □ BG ⌐¬ seyn, dem □ FK. d. 3. Cor. 46. I.

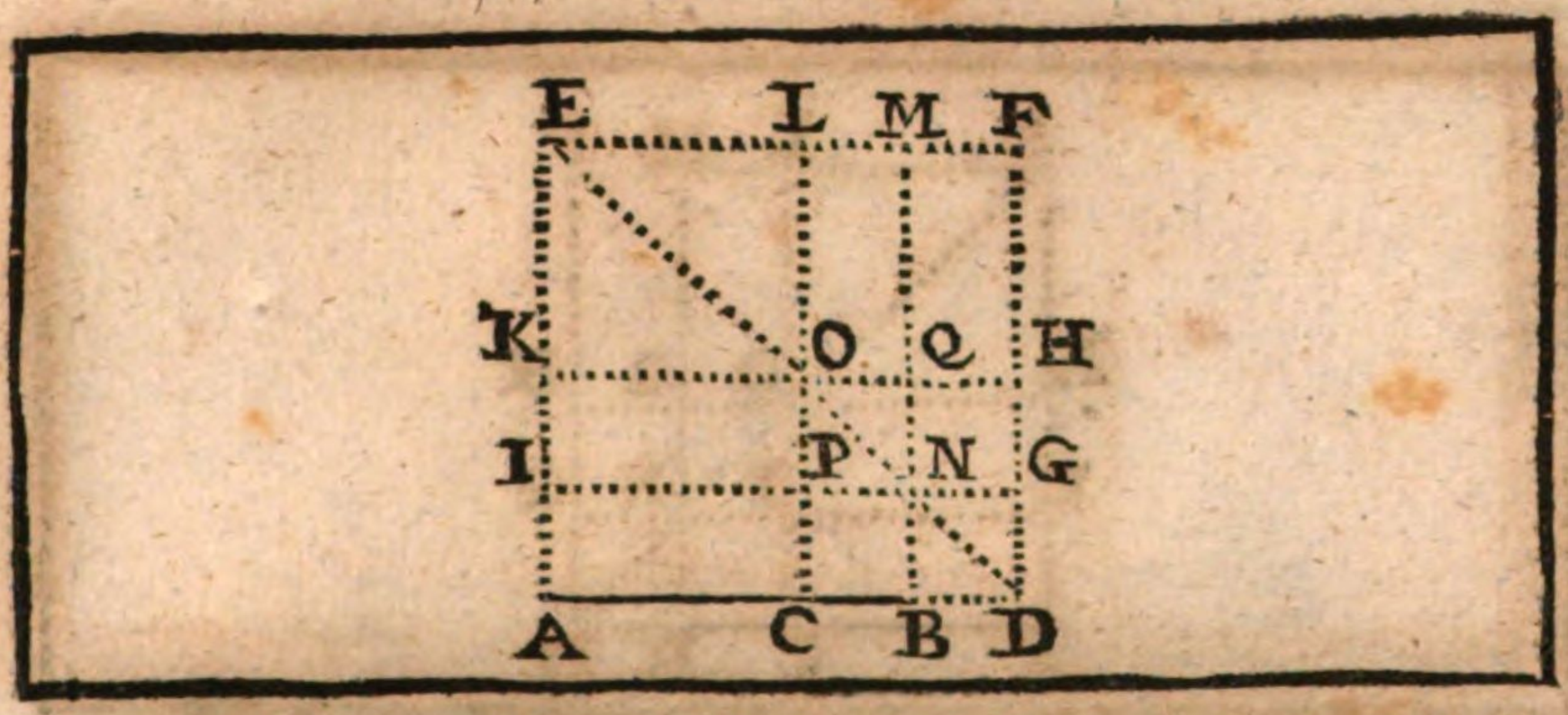
Und folgends die übrige drey Seiten deß einen □ ⌐¬ seyn, denen übrigen drey Seiten deß andern □, das ist, eine jede Seiten darvon, wird sonderlich ⌐¬ seyn, dem Stück, oder Theil CB.

Hernach, weilen das ▭ AG ⌐¬ ist, dem ▭ GD. d. 43. I.
und wan man entzwischen beyderseits die gleichen □ BG und FK hinzu setzet,

So wird auch das ▭ AH, welches von der gantzen Linie AB, und dem Stück CB (oder von der gleichen BH beschlossen ist) ⌐¬ seyn, dem ▭ GK.

Unterdessen nehmen die zwey gleiche ▭ AH + GK, (oder mit einem Wort, das ▭ AH zweymahlen,) sambt dem □ GE eben den Raum ein, welchen das □ AD sambt dem □ FK (oder das gleiche □ BG begreiffet.

Dahero schliesset man, daß das □ AD + □ BG ⌐¬ seye, denen d 14. ax. I.
2 ▭ AH + □ GE. Welches zu beweisen ware.



Die VIII. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen in zwey Theile (als wie in C) zertheilet: so werden die vier winckel-rechte Figuren sammentlich, welche von der gantzen Linie (AB), und dem einen Theil (CB) seynd beschlossen worden, und mit dem Quadrat (EO) von dem andern Theil (AC), gleich seyn dem Quadrat (AF), welches auff der gantzen Linie (AB), und dem einen Theil (BD, welcher gleich ist der CB), als einer einigen geraden Linie (AD) ist beschrieben worden.

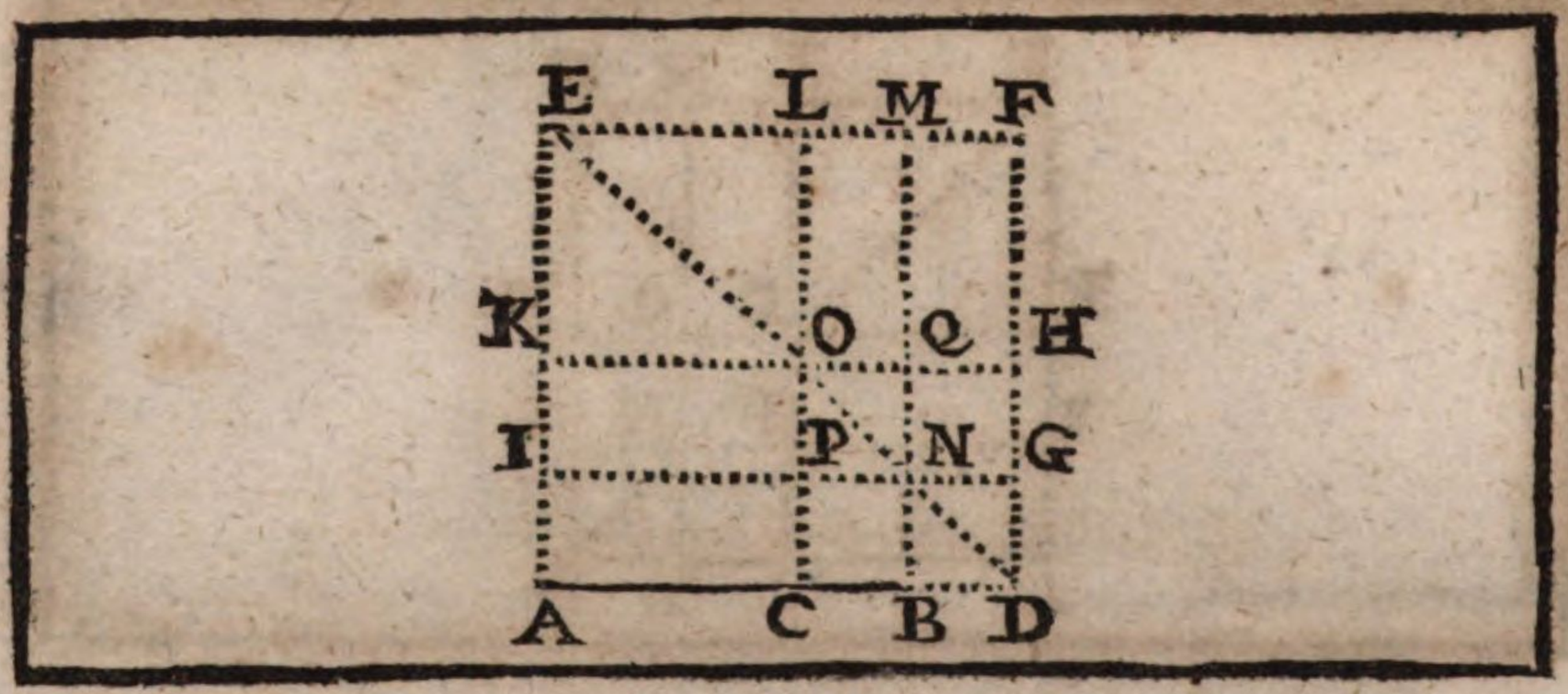
Das ist, 4 ▭ AN + □ EO seynd ⊓, dem □ AF.

Zubereitung.

Verlängere AB, und mache BD ⊓, CB.
Schreibe auff der gantzen AD, das □ AF. d. 46. I.
Auß C, und B ziehe die Linien CL, BM ═, der DF, oder AE, d. 31. I.
Ziehe den Diameter ED, welcher CL in O, und BM in N durchschneidet.
Durch O, und N ziehe die Linien HK, GI ═, der AD, oder EF.

Beweiß.

Indeme DN, NO, OE, auch NE umb den Diameter ED stehen, so seynd sie □. d. 1. Cor. 42.
Und zwar OE wird das □ deß andern Theils AC seyn.
(dann die Linie KO ⊓ ist, der AC.) d. 34. I.
Ferner, weilen die Linie PN ⊓ ist, dem einen Theil CB, d. 34. I.
und CB ⊓ ist, der Linie BD. d. d. Zub. I.
So wird das □ PQ ⊓ seyn, dem □ BG, d. 3. Cor. 46.
und deßwegen werden auch die Linien BN, NQ, und GN, PN, erstlich unter sich, alsdann auch ⊓ seyn, dem Theil CB. d. I. ax. I.



Dahero seynd die zwey ▭ AN, IQ von dem einen Theil CB,
und der gantzen AB beschlossen.
(dann IN ⌐ ist, der AB) d. 34. I.

Unterdessen wegen deß □ NE ist die Linie NM ⌐, der Linie IN,
(oder dergleichen AB)

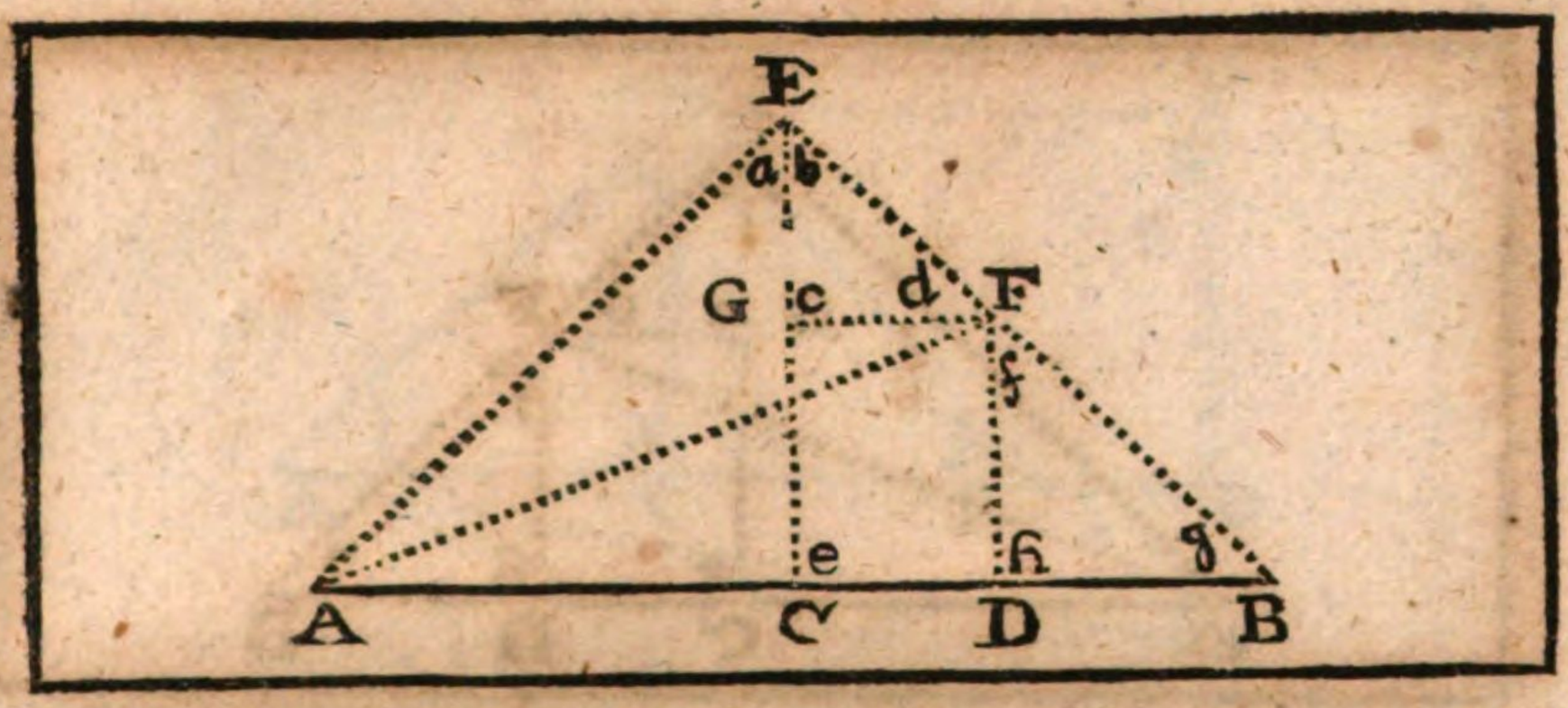
Darumb ist das dritte ▭ NF von der gantzen AB, und
dem einen Theil CB (dann GN ⌐ ist, CB) beschlossen. d. d. Vor.

Letzlich, wann man an statt deß □ PQ das gleiche □ BG
zu dem ▭ OM hinzu setzet, so hat man das vierdte ▭
PM, welches von der gantzen AB (dann PL ⌐ ist der NM), d. 34. I.
und dem einen Theil CB (so ⌐ ist, der PN) beschlossen worden ist.

Nunmehro begreiffen obgemeldte 4. ▭, welche von der gantzen AB,
und dem einen Theil CB beschlossen seynd, sambt dem □ OE,
deß andern Theils KO, eben den Raum, welchen das □ AF
begreiffet, so auff der zusammen gesetzten AD von der gantzen
Linie, und dem euen Theil ist gemacht worden.

Dahero ist das ▭ AN viermahlen genommen = □ EO ⌐, dem □ AF.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (als wie in C) und noch dazu in zwey ungleiche Theile (als wie in dem Punct D) zertheilet: so werden die Quadraten, welche auff denen zweyen ungleichen Theilen (AD, DB) gemachet worden seynd, beyde zusammen, zweymahlen so groß seyn, als die zwey Quadraten, welche auff der halben Linie (AC), und der mittlern (CD) seynd beschrieben worden.

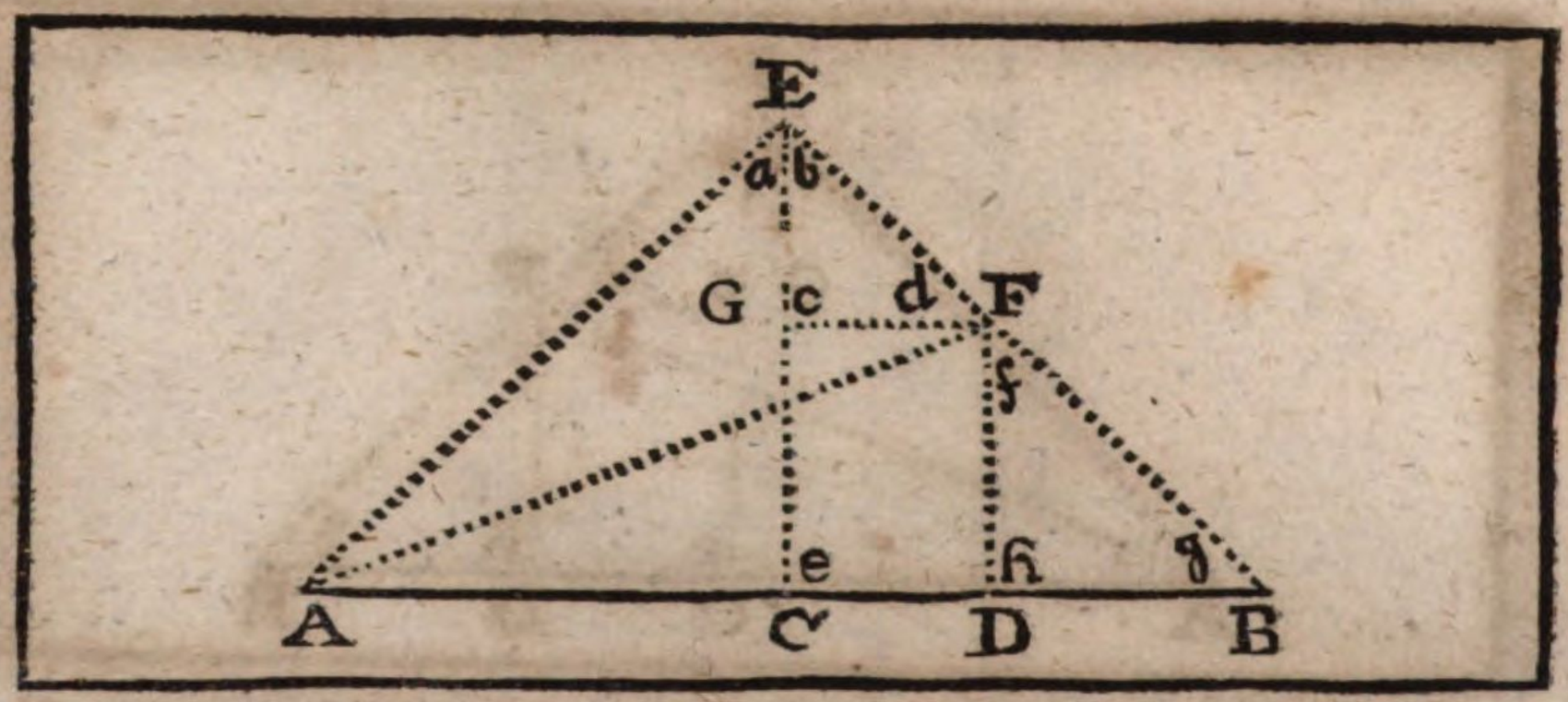
Das ist, das □ AD + □ DB ist ⊓, 2 □ AC + 2 □ CD.

Zubereitung.

Erhöhe auß C die ⊥ CE, so ⊓ ist, der Helffte CB, oder AC. d. 11. 1.
Ziehe A, E und B, E zusammen.
Auß D erhöhe die ⊥ DF, welche die EB im Punct F durchschneidet, d. 11. 1.
Durch den Punct F ziehe GF ═, der AB. d. 31. 1.
Hange letzlich A, F zusammen.

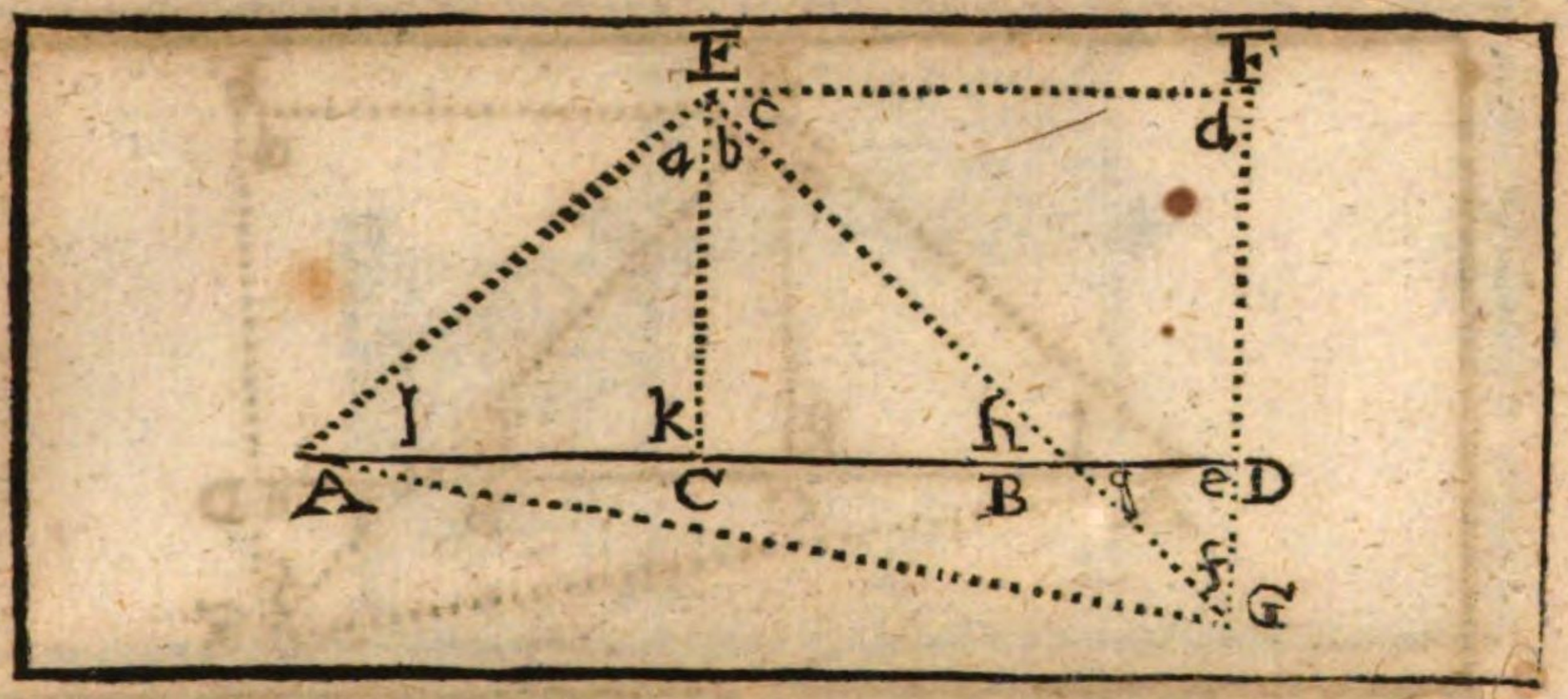
Beweiß.

In dem △ ECB ist wegen deren gleichen Seiten EC, CB. d. d. Zub.
der ∠ b ⊓, dem ∠ g. d. 5. 1.
Dahero, weilen der ∠ e ein rechter ∠ ist gemacht worden,
wird so wohl der ∠ b, als der ∠ g ein halb rechter ∠ seyn. d. 2. Cor. 32. 1.
Auff solche Weise wird auch der ∠ a in dem △ ECA ein halb-
rechter ∠ seyn.
Und dahero der ∠ a + b ein gantz Rechter.
Unterdessen, weilen GF ═ gemacht ist, der AB,
so wird der ∠ c auch ein rechter ∠ seyn.



Es ist auch bewiesen worden, daß der ∠ b ein halb-rechter seye.
Darumb wird auch der ∠ d ein halb-rechter seyn. d. 32. 1.
Und deßwegen die Seiten GE ⊓ seyn, der Seiten GF. d. 6. 1.
(das ist, dem Theil CD) d. 34. 1.
Auff diese Art, weilen in dem △ FDB der ∠ h auch ein
Rechter ∠ ist. d. d. Zub.
Und der ∠ g ein halb-rechter bewiesen worden ist,
so wird auch der dritte ∠ f ein halb-rechter seyn. d. 32. 1.
Dahero ist die Seiten DF ⊓, der Seiten DB. d. 6. 1.
Diesem nach ist das □ auff AE ⊓, denen zwey □ auff AC, und CE, d. 47. 1.
oder (welches ein Ding ist) das □ auff AE ist ⊓, 2 □ AC.
(dann AC ⊓ ist der CE.) d. d. Zub.
Auff solche Weise ist auch das □ auff EF ⊓, denen zwey □ auff EG, d. 47. 1.
und GF; oder (so eines ist)
Das □ auff EF ist ⊓, 2 □ auff GF, (oder dergleichen, CD).
Denen beyden □ aber auff AE, und EF ist ⊓, das □ auff AF. d. 47. 1.
Dahero ist das □ auff AF ⊓, 2 □ AC, und 2 □ CD.
Unterdessen seynd wegen der ⊥ DF dem □ auff AF ⊓, die zwey □ d. 47. 1.
auff AD, und DF, (oder dergleichen DB.)
Dahero schliesset man, daß die zwey □ auff AD und DB
⊓ seynd, 2 □ AC + 2 □ CD, (oder, so eine Sach ist), die zwey □
auff denen ungleichen Theilen AD, und DB zusammen, seynd zweymahln grösser, als die zwey □ auff der halben Linie AC, und
der mitlern Linie CD zusammen.

Welches zu beweisen ware.



Die X. Vorgab. Betrachtung.

Wann ein gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (als wie in C) zertheilet ist, und man derselben eine andere (BD) geradt nach der Länge daran setzet, so wird das Quadrat auff der gantzen Linie, sambt dem Zusatz, als einer einigen Linie (AD), sambt dem Quadrat deß Zusatz (BD) zweymahln so groß seyn, als die andere zwey Quadraten von der halben Linie (AC), und dem Quadrat, welches auff der halben Linie, und dem Zusatz, als einer einigen Linie (CD) beschrieben wird.

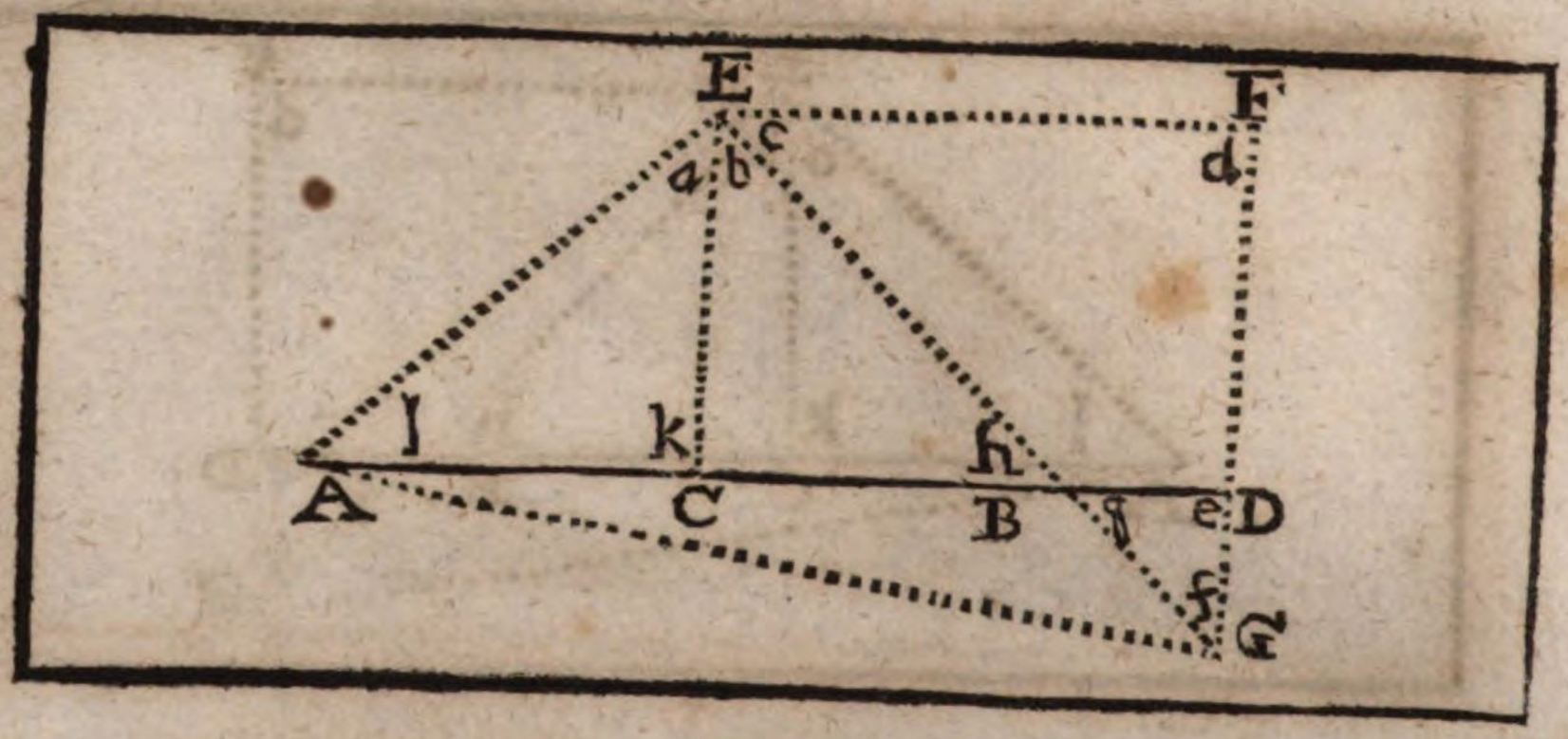
Das ist, das □ AD + □ BD ist ⊓, 2 □ AC + 2 □ CD.

Zubereitung.

Auß C erhöhe die ⊥ CE, welche ⊓ seye, der Helffte AC, oder CB. d. 11. 1.
Hange A, E, und B, F zusammen.
Durch D ziehe GDF ═, der Linie CE. d. 31. 1.
Abermahlen durch E ziehe EF ═, der CD, biß sie GDF durchschneide in dem Punct F.
Alsdann verlängere EB, biß sie GDF im Punct G durchschneide.
Hange letzlich G, A zusammen.

Beweiß.

In dem △ ECA ist die Seiten EC ⊓, der Seiten AC. d. d. Zub.
Dahero wird auch der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ l. d. 5. 1.
Und wegen des rechten ∠ k werden dann beyde ∠ a und l zween halb rechte ∠ seyn. d. 2. Cor. 32. 1.
Auff solche Weise seynd in dem △ ECB die beyde ∠ b und h auch zwey halb rechte ∠.
Dahero ist auch der ∠ a + b ein gantz rechter ∠.



Ferner, indeme GF = ist, der CE,
so wird der ∠ f ⊓ seyn, dem ∠ b, das ist d. d. Zub.
der ∠ f wird auch ein halbrechter ∠ seyn. d. 29. I.

So ist auch in dem △ BDG der ∠ g ein halbrechter ∠,
(dann der ∠ g ⊓ ist, dem halbrechten ∠ h) d. 15. I.

Dahero muß der dritte ∠ e nothwendig ein rechter ∠ seyn. d. 32. I.
und entzwischen wegen dergleichen ∠ ist GD ⊓, ED. d. 6. I.

Nunmehro ist auch der ∠ d ein rechter Winckel.
(dann wegen dessen daß EF = ist CD, so ist der ∠ d ⊓, dem ∠ e). d. 29. I.

Deßwegen in dem △ EFG, weilen der ∠ f ein halbrechter,
und der ∠ d ein rechter schon bewiesen worden ist.

Auch der dritte ∠ c ein halbrechter ∠ seyn werde. d. 32. I.
und darumb ist GF ⊓, der EF, d. 6. I.
welche auch ⊓ ist, der Linie CD. d. 34. I.

Hernach, weilen das □ auff AE ⊓, 2 □ auff AC. d. 47. I.
(dann AC ⊓ ist, CE und das □ AE beyden □ ⊓ ist) d. d. Zub.

Setze hinzu beyderseits das gemeine □ auff EG,
so wird das □ auff AE + □ auff EG ⊓ seyn, 2 □ auff AC
+ □ auff EG.

Unterdessen ist beyden □ auff AE + □ auff EG ⊓, das □ auff AG. d. 47. I.

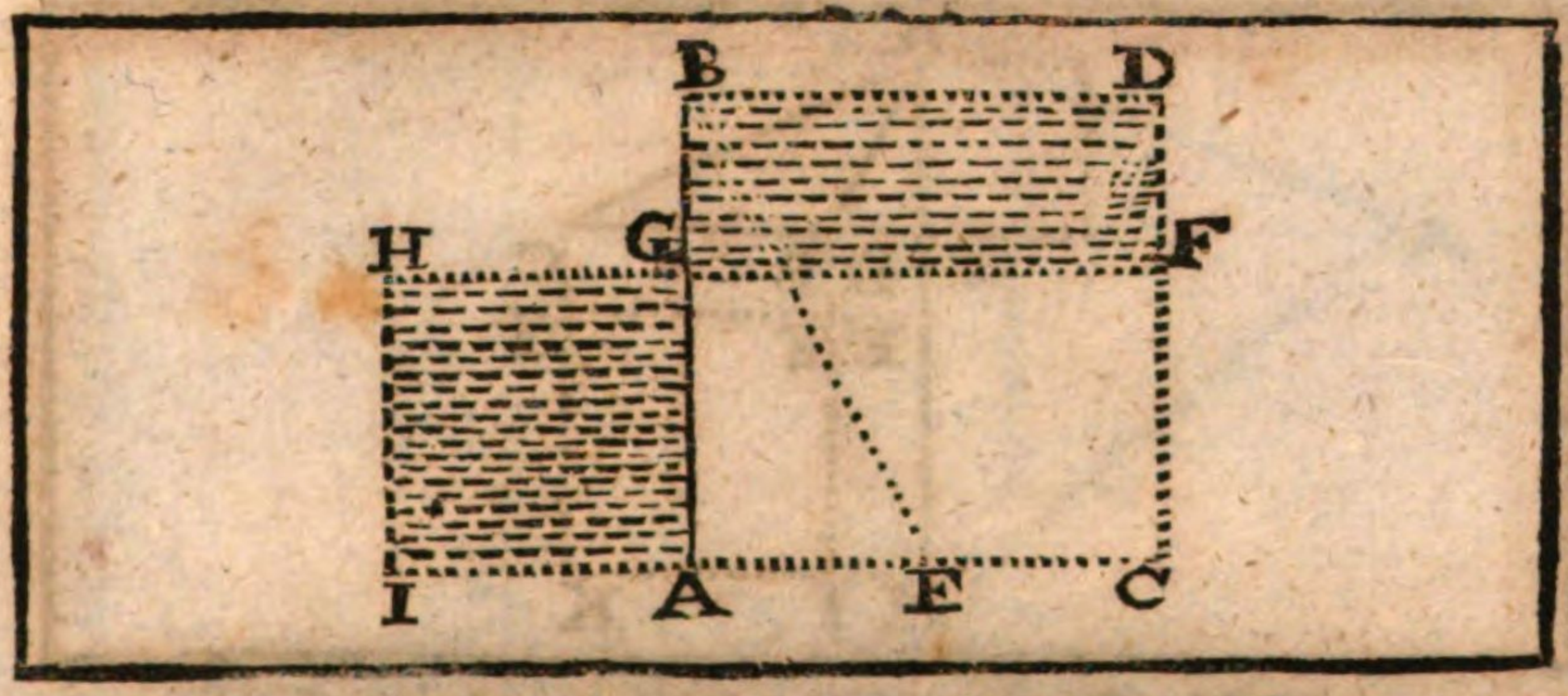
Und denen 2 □ auff AE + □ auff EG seynd ⊓, dieselbe
2 □ auff AC, und die zwey □ auff EF + FG (das ist) d. 47. I.
2 □ auff CD (dann schon bewiesen worden ist, daß EF, und
GF ⊓ seynd, der Linie CD) d. d. Vor.

Dahero wird das □ auff AG ⊓ seyn, denen 2 □ auff AC +
2 □ auff CD.

Letztlich seynd dem □ auff AG ⊓, die zwey □ auff AD, und DG. d. 47. I.
(oder auff der gleichen BD).

Darumb wird auch das □ AD + □ BD ⊓ seyn, 2 □ AC + 2 □ CD.

Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab. Handgriff.

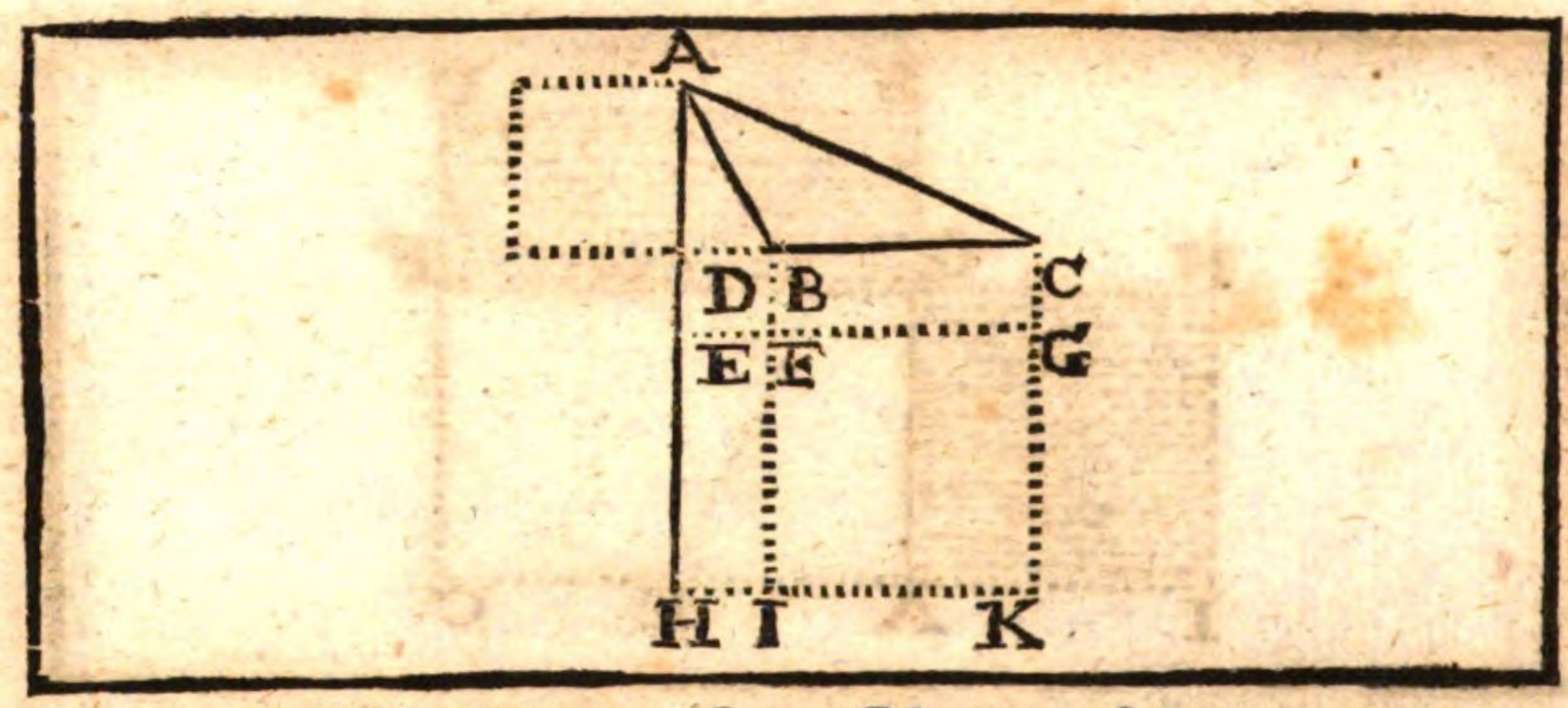
Eine vorgegebene gerade Linie (AB) solcher gestalt entzwey zu theilen, (nemlich in G), daß die winckelrechte Figur (GD), welche von der gantzen Linie (AB), und dem andern Theil (GB) beschlossen wird, gleich seye, dem Quadrat (AH), welches auff dem einen Theil (AG) beschrieben wird.

Handgriff.

Schreibe auff AB das □ AD — d. 46. I.
Zertheile eine Seiten, als wie AC in mitten in F. — d. 10. I.
Ziehe E, B zusammen.
Verlängere unterdessen die Seiten AC also, biß daß
EI ⊓ seye der Linie EB.
Auff AI mache das AH.
Verlängere die Seiten HG, biß sie die Seiten CD im Punct F berühre.
Nun sagt man, daß das gemachte □ auff AG ⊓ seye, dem
▭ GD, welches von der gantzen AB, und dem andern Theil
GB ist beschlossen worden.

Beweiß.

Dieweilen die Linie CA geradt entzwey ist zertheilet, und derselben das Stück AI in der Länge nach daran gesetzet worden. — d. d. Hand.
So wird das ▭ CH (welches von der zusammengesetzten CI und dem Zusatz AI, oder IH ist beschlossen worden) sambt dem □ auff AE ⊓ seyn, dem □ auff EI (oder dergleichen BE). — d. 6. 2. und d. Hand.
Unterdessen ist das □ auff EB ⊓, denen zwey □ auff AB, und auff AE. — d. 47. I.
Dahero folget, daß das ▭ CH + □ auff AF ⊓ seye, denen zwey □ auff AB, nnd AE.
Wann man nun beyderseits das gemeine □ auff AE abziehet, so wird das ▭ CH ⊓ seyn, dem □ auff AB.
(das ist, dem □ AD).
Wann man abermahlen beyderseits das gemeine ▭ CG darvon ziehet,
So wird dann letzlich überleiben das □ AH ⊓, dem ▭ GD.
Welches zu machen ware.



XII. Vorgab. Betrachtung.

In denen stumpffwincklichten Triangeln (ABC) ist das Quadrat der einen Seiten (AC), so den stumpffen Winckel (B) unterspannet, grösser, als die zwey Quadraten auff deren zwo Seiten (AB, BC), welche den stumpffen Winckel (B) begreiffen; um die Winckelrechte Figur, so zweymahlen gemacht wird, von diesen beyden Seiten einer (als wie hier von (BC), und von dem Zusatz (BD), in welchen die Bleyrechte (AD) aus dem Spitze (A) fället.

Das ist, das □ auff AC ist ⌐, als die □ auff AB, und BC umb das ▭ CBD zweymahlen genommen, (oder so ein Ding ist)

Das □ auff AC ist ⌐, denen □ auff AB + □ auff BC + 2 ▭ CBD.

Zubereitung.

Verlängere CB, und laffe darauff aus dem Spitz A die ⊥ AD herunter fallen. d. 12. 1.

Alsdann zu leichterm Verstand mache auff die Linie CD die Figur, welche in der 4. Vorgab dieses Buchs ist gemacht worden.

Letztlich auff DA beschreibe ein □. d. 46. 1.

Beweiß.

Dieweilen die Linie CD zertheilet ist in B.

So wird das □ auff DC ⌐ seyn denen zwey □ auff BC, und BD, und der winckelrechten Figur, welche mit BC, und BD beschlossen ist, zweymahlen genommen. d. 4. 2.

Das ist, das □ auff CD ist ⌐, denen 2 □ auff DB + □ auff BC 2. ▭ CBD.

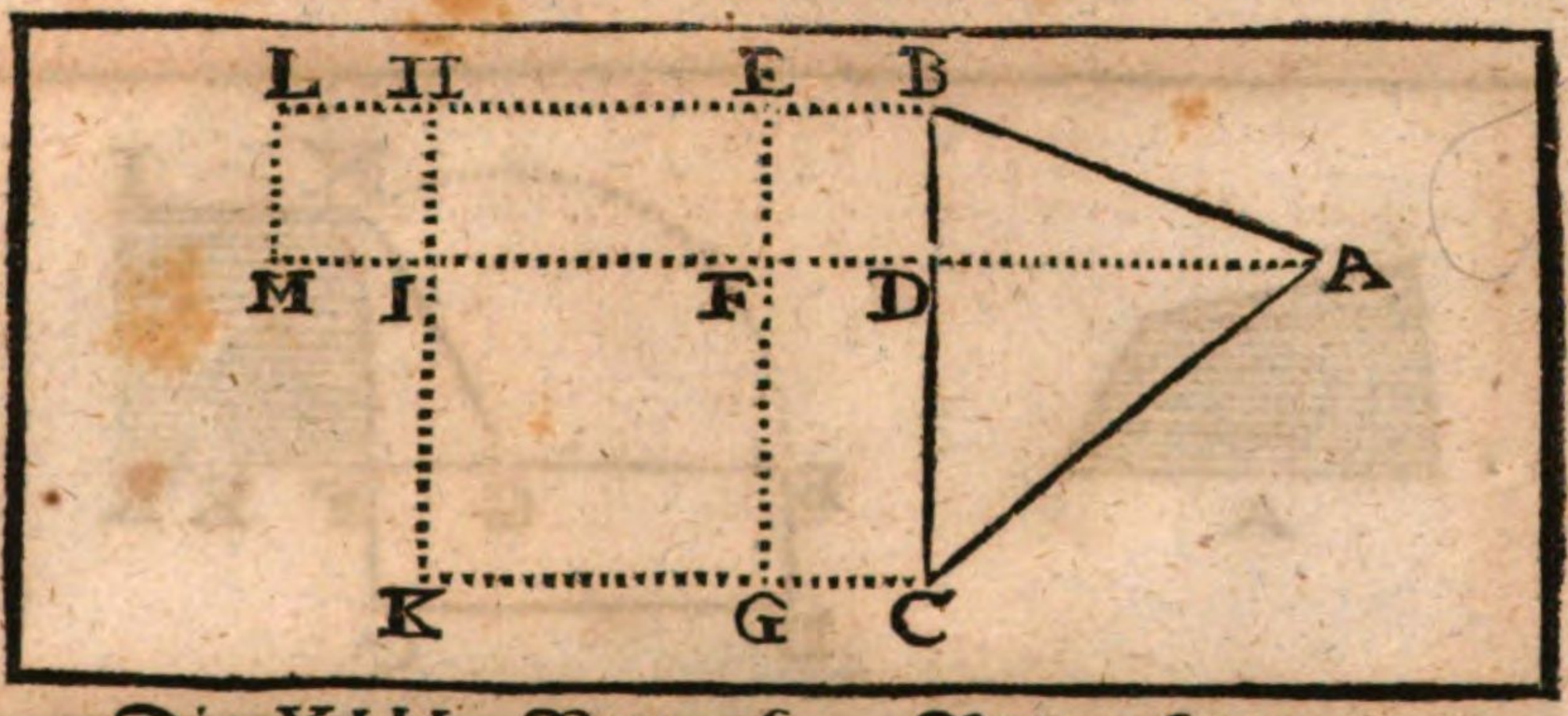
Setze nun beyderseits hinzu das gemeine □ auff DA.

so wird das □ auff CD + □ auff DA ⌐ seyn denen □ auff DB + □ auff BC + 2 ▭ CBD, + □ auff DA.

Weilen aber das □ auff AB ⌐ ist, denen □ auff DB + □ auff DA, und denen zwey □ auff CD + □ auff DA ⌐ ist, das □ auff AC. d. 47. 1. d. d. sel.

So wird auch das □ auff AC ⌐ seyn, dem □ auff AB + □ auff BC + 2 ▭ CBD.

Welches zu beweisen ware.



Die XIII. Vorgab. Betrachtung.

In denen scharffwincklichten Triangeln (ABC), ist das Quadrat der Seiten (AC), welches den scharffen Winckel unterspannet, kleiner, als die zwey Quadraten auff denen andern zwo Seiten (CB, BA), welche den scharffen Winckel (B) machen, zweymahln umb die winckelrechte Figur, so zu einer Seiten deß Triangels solche Seiten, in welche die auß dem Spitz (A) heruntergelassene Bleyrechte Linie (AD) fahlet, und zu der andern, das Stuck (DB), so zwischen der Bleyrechten Linie und dem scharffen Winckel lieget, hat.

Das ist, das □ auff AC ist ⌝, als die zwey □ auff AB, und BC umb das ▭ zwey mahlen, so von BC, und BD beschlossen ist; oder

Das □ auff AC + 2 ▭ von BC, und BD ist ⌐, denen zwey □ auff AB und BC.

Zubereitung.

Auß dem Spitz A lasse auff BC herunter fallen die ⊥ AD. d. 12. 1.

Hernach (damit es klärer verstanden werde) mache auff die Seiten BC eine dergleichen Figur, wie in der siebenden Vorgab dieses Buchs ist angewiesen worden.

Beweiß.

Die Linie BC ist ungefähr im Punct D zertheilt worden.

Dahero ist das □ auff BC sambt dem □ auff BD ⌐, dem □ auff CD sambt dem ▭ von CB, und DB zweymahln genommen. d. 7. 2.

Das ist, das □ auff BC + □ auff BD ist ⌐, dem □ auff DC + 2 ▭ von CB, und DB.

Wann man nun beyderseits das gemeine □ auff DA hinzu setzet; so werden die drey □ auff BC + auff BD + auff DA ⌐ seyn, denen zwey □ auff DC + DA + 2 ▭ von CB, und DB.

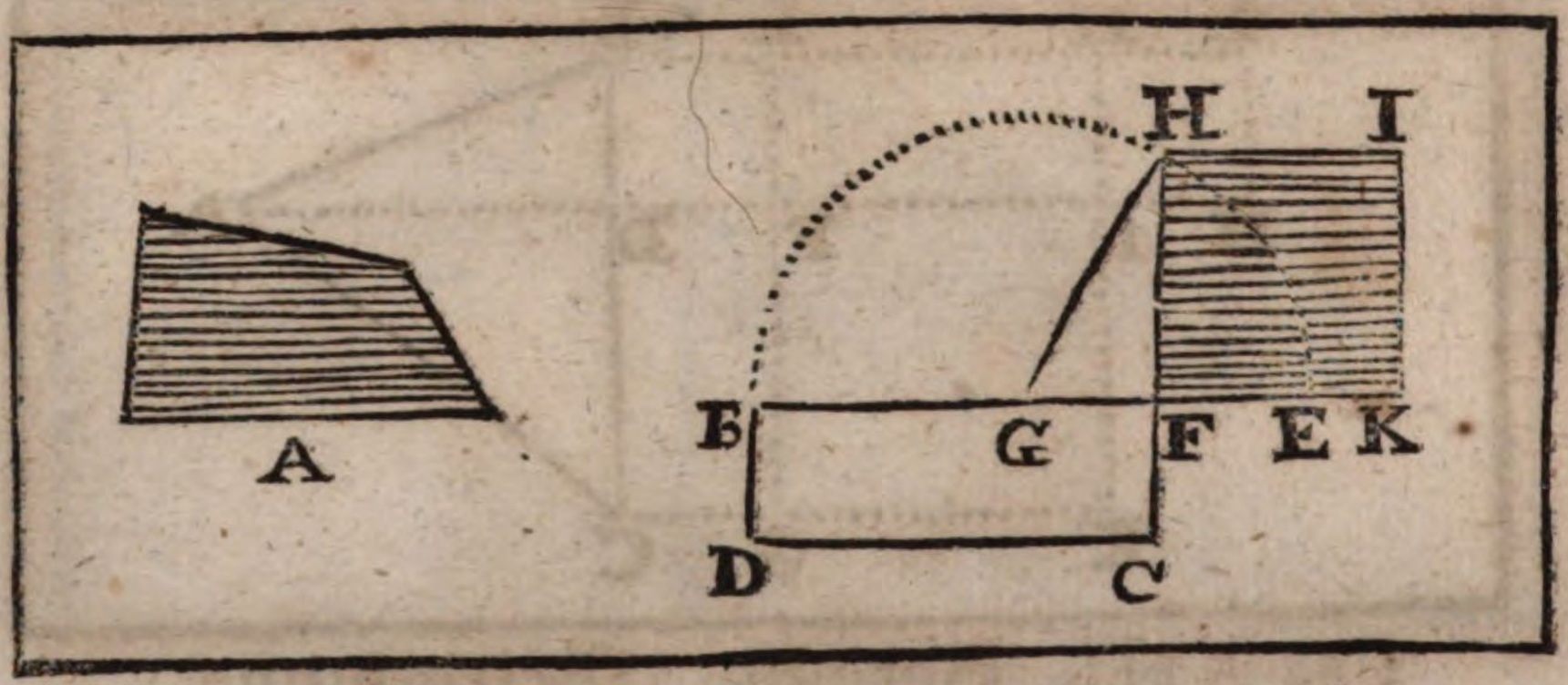
Unterdessen ist denen zwey □ BD, und DA ⌐, das □ auff AB. d. 47. 1.

und denen zwey □ auff DC, und DA ist ⌐, daß □ auff AC. d. 47. 1.

Folget dahero, daß auch die □ auff BC + AB ⌐ seyen, dem □ auff AC + 2 ▭ von BC, und BD. (oder so ein Ding)

Das □ auff der Seiten AC ist ⌝, als die zwey □ auff AB und BC, umb das ▭ zweymahlen, so von BC, und BD beschlossen ist.

Welches zu beweisen ware.



Die XIV. Vorgab.

Handgriff.

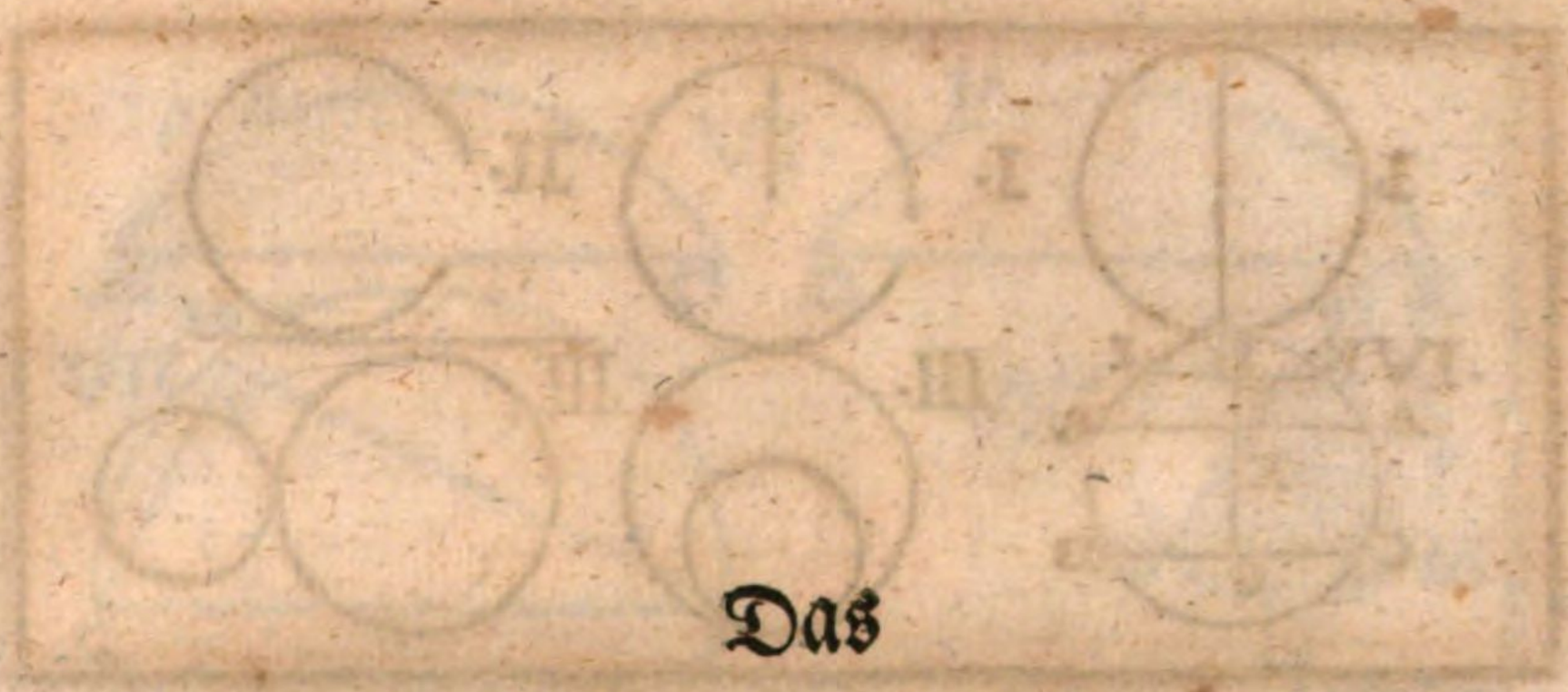
Einer vorgegebenen geradtlinischen Figur (A) ein gleich grosses Quadrat (FI) zu machen.

Handgriff.

Mache das ▭ DF ⌐, der geradtlinischen Figur A. d. 45. I.
Verlängere die Seiten BF, und mache FE ⌐, der Seiten FC.
Zertheile die Linie BE mitten im Punct G. d. 10. I.
Aus dem Punct G schreibe mit der Weite GB, oder GE
einen halben Zirckel BHE.
Verlängere die Seiten CF biß an den Umbkreiß in H.
Auff FH mache das □ FI. d. 46. I.
Nun sage ich, daß das □ FI ⌐ seye, dem ▭ DF, und folgends der Figur A.
Ziehe vorhero G, H zusammene

Beweiß.

Die Linie BE ist gleich in G, und ungleich in F zertheilet. d. d. Hand.
Dahero ist das ▭ DF + □ auff GF ⌐, dem □ auff GE, oder d. 5. 2.
auff dergleichen GH. d. 15. def. I.
Unterdessen ist das □ auff GH ⌐ denen beyden □ auff FH + auff GF. d. 47. I.
Wann nun beyderseits das gemeine □ auff GF darvon gezogen wird,
So ist klar, daß das ▭ DF ⌐ verbleiben werde, dem □ auff FH.
Weilen aber das ▭ DF ⌐ ist gemacht worden, der Figur A. d. d. Hand.
Folget dahero, daß auch die Figur A ⌐ seye, dem □ FI.
Welches zu machen ware.

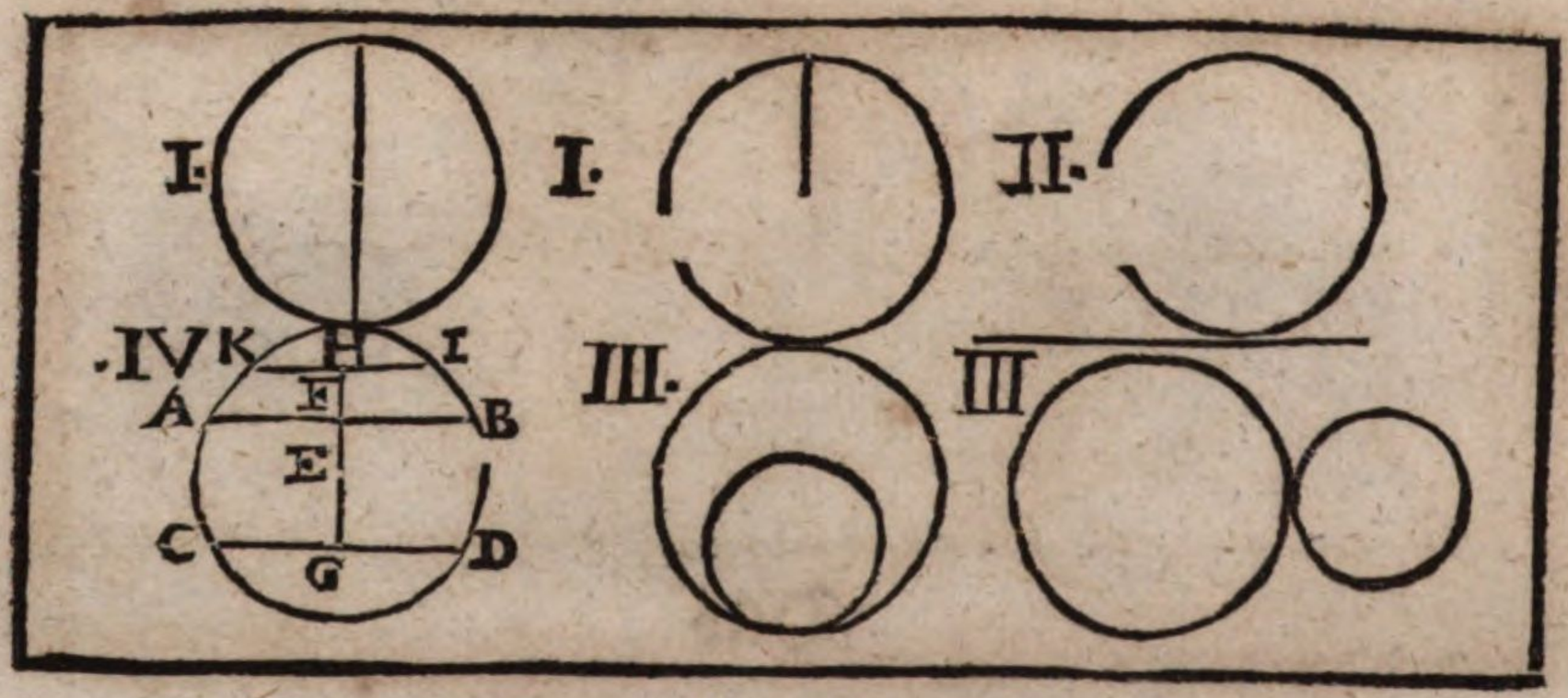


Das

Dritte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort = Erklärungen.

I.

Man saget, daß die Zirckeln einander gleich seynd, wenn sie gleiche halbe, oder gleiche gantze Diametern haben. Fig. I.

II.

Eine gerade Linie berühret einen Zirckel, welche, wenn sie verlängert wird, den Zirckel nicht durchschneidet. Fig. II.

III.

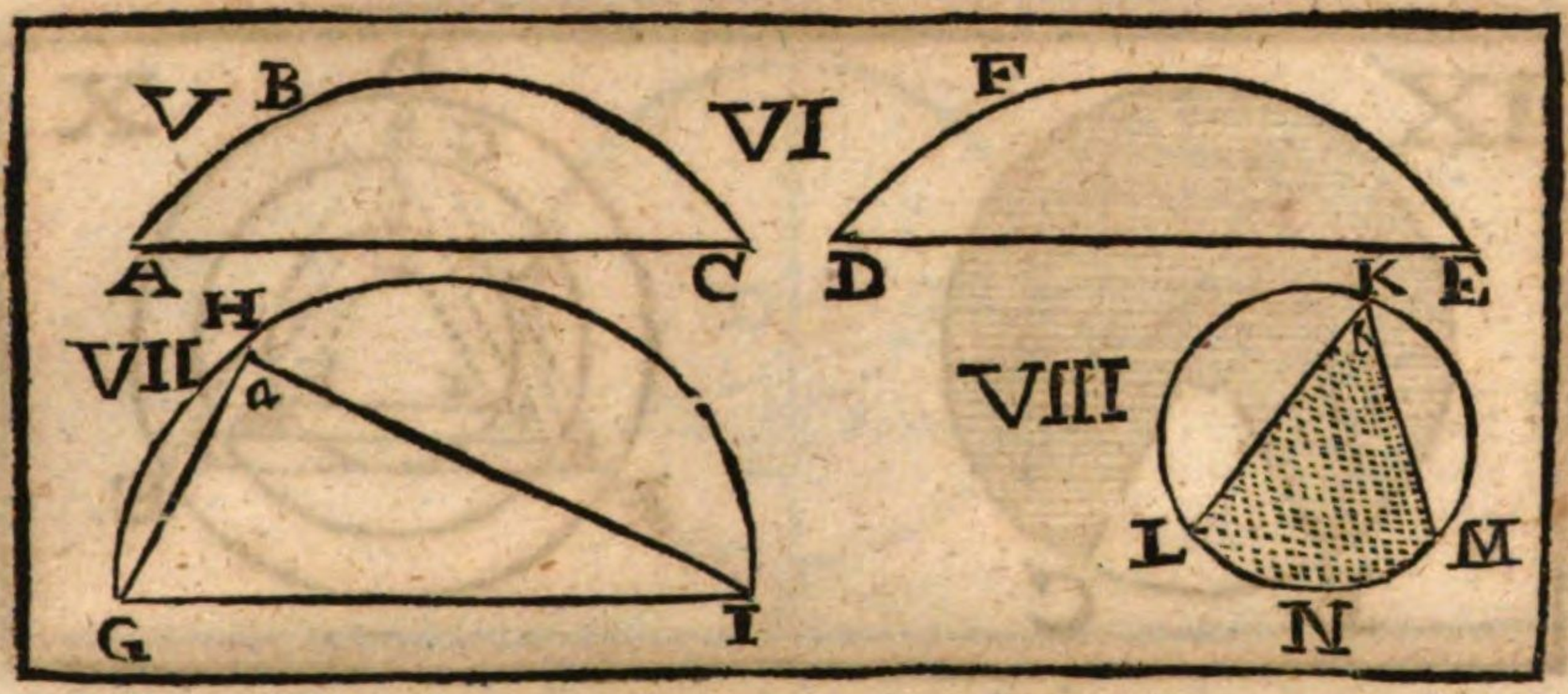
Die Zirckel rühren sich einander an, wenn sie sich einander anrühren, aber nicht durchschneiden. Fig. III.

IV.

Man saget, daß in einem Zirckel die gerade Linien in gleicher Weite von dem Mittel-Punct abstehen, wenn die Bleyrechte Linien, so auß dem Mittel-Punct auff solche gezogen werden, einander gleich lang seynd: auff welche aber eine längere Bleyrechte Linie fället, dieselbe werde weiter von dem Mittel-Punct abstehen.

Die gerade Linien AB, CD stehen in gleicher Weite ab von dem Mittel-Punct E; dann die Bleyrechte EF ⊓, EG ist.

Herentgegen stehet die Linie IK weiter von dem Mittel-Punct E ab, dann die Bleyrechte EH ⌐, als EF, oder EG ist.



V.

Ein Schnitz eines Zirckels (Segmentum Circuli) ist, welcher von einem Theil des Umbkreiß, und einer geraden Linie beschlossen wird. Gleich wie in der Figur ABC, oder V.

VI.

Der Winckel eines Schnitzes (Segmenti Angulus) ist, welcher von ei- geraden Linie (DE) und dem Stück des Umbkreiß (EDF), oder (FED) beschlossen wird. Fig. VI.

VII.

In einem Schnitz ist ein Winckel (In segmento Angulus), wenn man in dem Umbkreiß deß Schnitz einen gewissen Punct (als wie allhier H) erwählet, und von demselben in die beyde Ende einer geraden Linie (GI), welche sothanes Schnitz Basis ist, zwey gerade Linien ziehet, (als wie HG, HI); so wird der Winckel im Schnitz, der Winckel (GHI, oder a) seyn, welcher beschlossen ist von denen zwey geraden (GH, und HI). Fig. VII.

VIII.

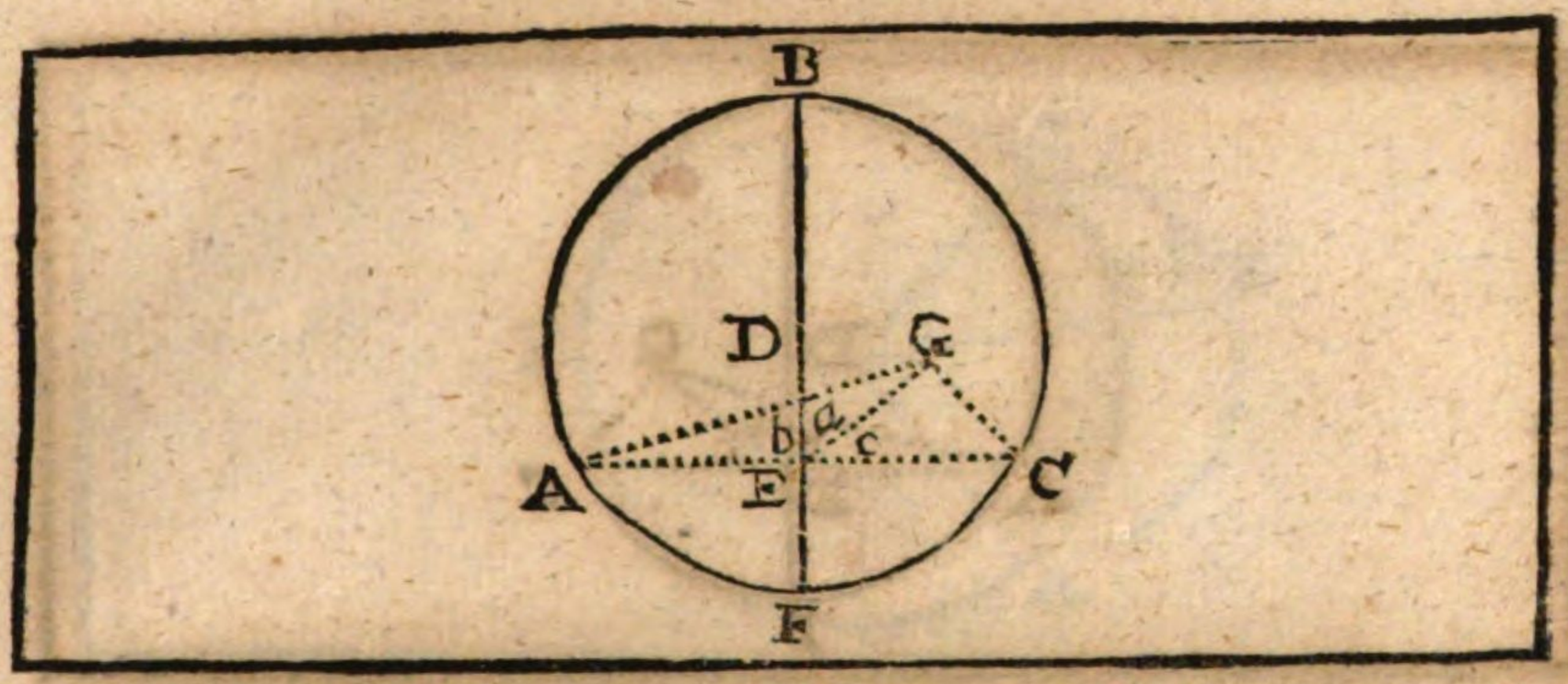
Wenn aber zwey gerade Linien (KL, KM), welche den Winckel (b) in ei- nem Schnitz machen, nicht eine gerade Linie zur Basis, sondern ein Stück von dem Umbkreiß begriffen (als wie hier das Stück LNM), so saget man hernach, daß solcher Winckel auff bemeldten Umkreiß- Stück stehe (Angulus insistens Peripheriæ). Fig. VIII.

IX.

Außschnitz eines Zirckels (Sector Circuli) ist eine Figur, welche von einem Theil deß Umkreiß (BC), und zweyen halben Diametern (AB, AC) beschrieben wird; sothane zwey Diametern hernach, begreiffen den Außschnitz-Winckel (a) Fig. IX.

X.

Gleichformige Schnitze seynd (FDE, HGI, KLM), welche gleiche Winckeln (a, b, c) begreiffen; oder in welchen die Winckeln (a, b, und c) einander gleich seynd.



Die I. Vorgab.

Handgriff.

Eines gegebenen Zirckels (ABC) Mittel-Punct (D) zu finden.

Handgriff.

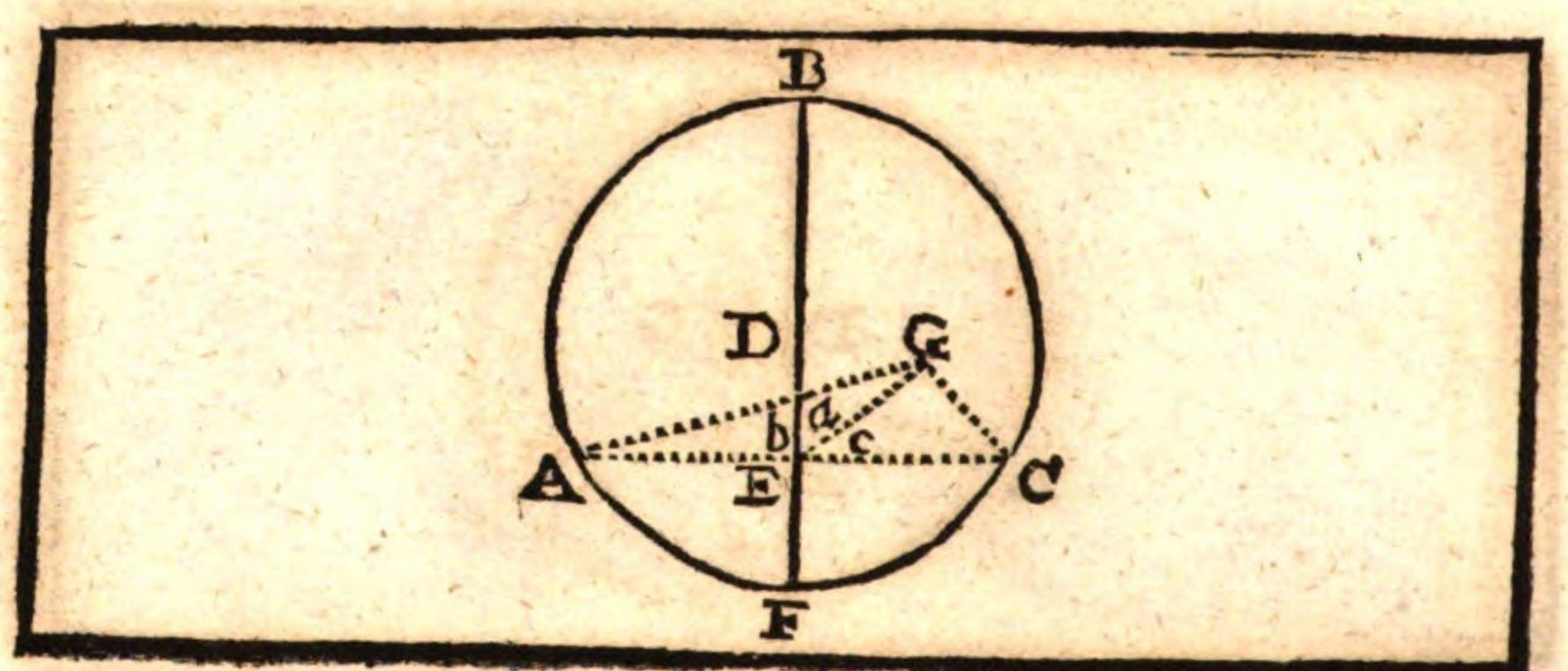
Ziehe nach Gefallen die gerade Linie AC.
Zertheile AC entzwey im Mitten E. d. 10. 1.
Auß dem Punct E erhöhe die ⊥ FEB. d. 11. 1.
Welche den Zirckel in denen Puncten B, nnd F. berühre.
Die ⊥ FB zertheile auch entzwey im Mitten D. d. 10. 1.
So wird der Punct D der gesuchte Mittel-Punct seyn.

Beweiß.

Erlaubet man es, daß der Mittel-Punct in der Linie FB lige, so ist es gewiß, daß derselbe der Punct D seye; sonsten solten die gerade Linien DB, DF, und alle andere, so auß diesen Puncten herauß an dem Umbkreiß gezogen werden, nicht einander ⊓ seyn, so ungereimt ist. d. 15. def. 1.

Solte man aber sagen, daß der Mittel-Punct sich nicht in der Linie FB befinde, sondern ausser derselben, gleich wie hier in dem Punct G seye

Ziehe alsdann GA, GE, GC zusammen, und sage, !
Weilen nun in dem △ AEG die zwey Seiten AE, und AG ⊓ seyn müssen denen zwey Seiten EC, und CG im △ CEG. Und die Seiten EG beyden △ gemein ist: } d. 15. def. 1. und den Hand.



So folget, daß der △ AEG ⊓ seye, dem △ CEG. d. 8. 1.

Darumb wird auch der ∠ b + a ⊓ seyn, dem ∠ c.
und folgends beyde, rechte Winckeln seyn. d. 10. def. 1.

Der ∠ b aber, ware allein wegen der ⊥ FEB ein Rechter, d. d. Hand.
also folgete, daß der ∠ b ⊓ wäre, dem gantzen ∠ b + a,
Nemlich ein Theil seinem gantzen, so nicht möglich ist.

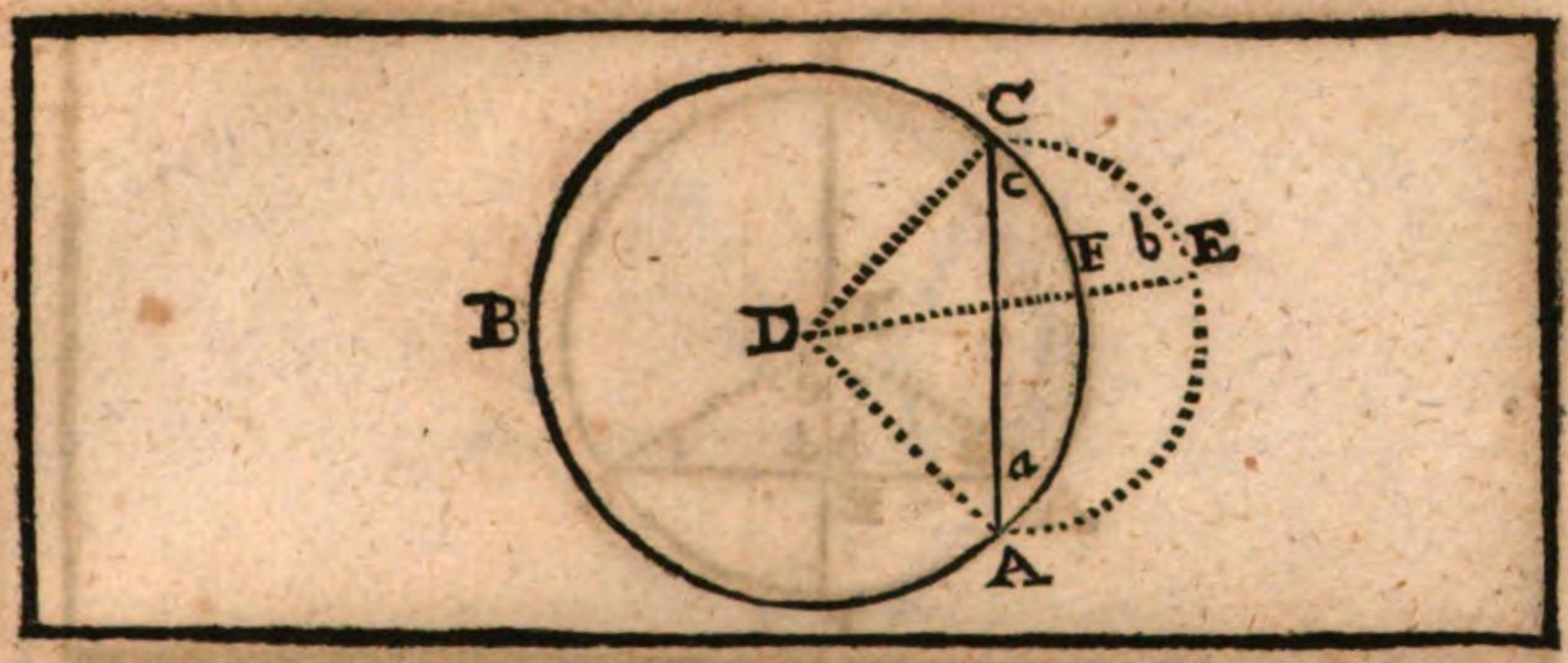
Deßwegen ist nicht der Punct G der Mittel-Punct,
auch kein anderer nicht, ausserhalb dem Punct D.
(dann sonsten eben dieselbe Unmöglichkeit bewiesen würde)

Dahero nothwendig der Punct D in der Linie FB der Mittel-Punct
deß Zirckels ABC seyn muß.

Welches zu machen ware.

Folge.

Wenn in einem Zirckel eine gerade Linie eine andere gerade Linie
just entzwey theilet, und mit derselben zween Rechte ∠
machet, so wird in der ersten Linie der Mittel-Punct
seyn.



Die 11. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in dem Umbkreiß eines Zirckels (AFCB) zween Puncten (gleich wie AC) nach Gefallen genommen, und mit einer geraden Linie (AC) zusammen gehangen werden, so wird solche Linie (AC) gantz und gar innerhalb deß Zirckels (AFCB) fallen.

Beweiß.

Es ist klar, daß, wenn die gerade Linie die zwey Puncten A, C in dem Umbkreiß zu ihrem Ende behalten will, sie nothwendig innerhalb, und nicht ausserhalb, des Zirckels fallen werde.

Solte sie aber nach Einwendung deß Widersagers ausserhalb deß Zirckels fallen, so wirdet sie nothwendig eine Krümme, gesetzt als wie AEC, machen müssen.

Seye dahero, nach deß Widersagers Willen, CEA eine gerade Linie (so aber in der Warheit nicht seyn kan).

Ziehe alsdann auß dem gefundenen Mittel-Punct D die gerade Linien DC, DA, und nach Gefallen die gerade Linie DFE, welche den Zirckel durchschneidet in F. d. 1. 3. [d. 15. def. 1. und 5. 1.

Nun wird in dem △ ADC der ∠ c ⌐ seyn, dem ∠ a. der ∠ b unterdessen ist ⌜, als der ∠ a. d. 16. 1.

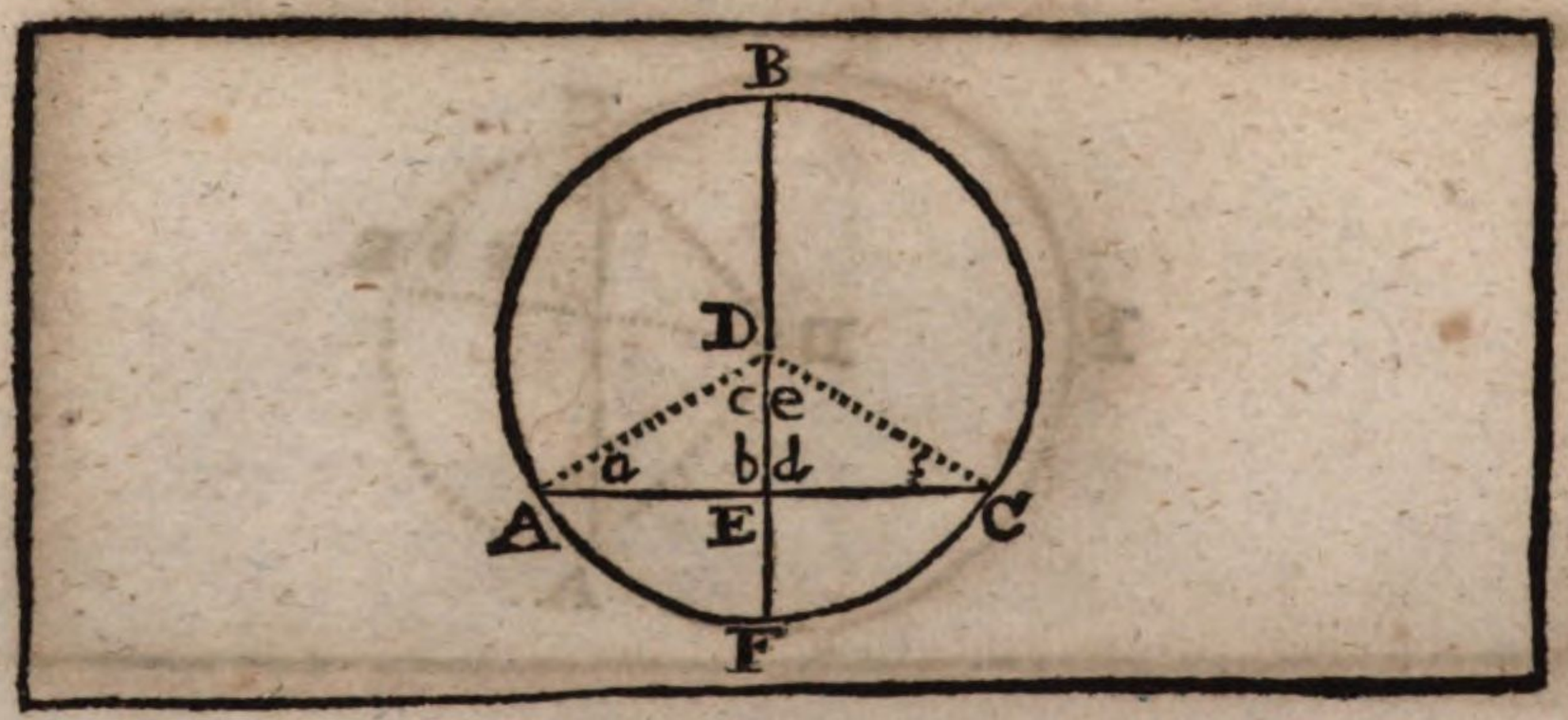
Dahero wird auch der ∠ b ⌜ seyn, als der ∠ c. und deßwegen muß die Seiten DC ⌜ seyn, als die Seiten DE. d. 19. 1.

DC aber ist nur ⌐ dem Theil DF von der gantzen DE. d. 15. def. 1.

Dahero wäre der Theil DF ⌜, als die gantze Linie DE, welches nicht seyn kan.

Also ist klar, daß die Linie AC, gantz innerhalb des Zirckels, und nicht ausserhalb dessen fallen kan.

Welches zu beweisen ware.



Die III. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Zirckel (ABCF) eine gerade Linie (BF), so durch den Mittel-Punct D) gehet, eine andere (AC), welche nicht durch den Mittel-Punct gehet, in zwey gleiche Theil zertheilet (als wie in E): so werdet sie mit derselben zween rechte Winckeln (bd) machen; und hinwiederumb, wenn sie mit derselben zween rechte Winckeln machet, so wird sie auch dieselbe in zween gleiche Theile zertheilen.

Zubereitung.

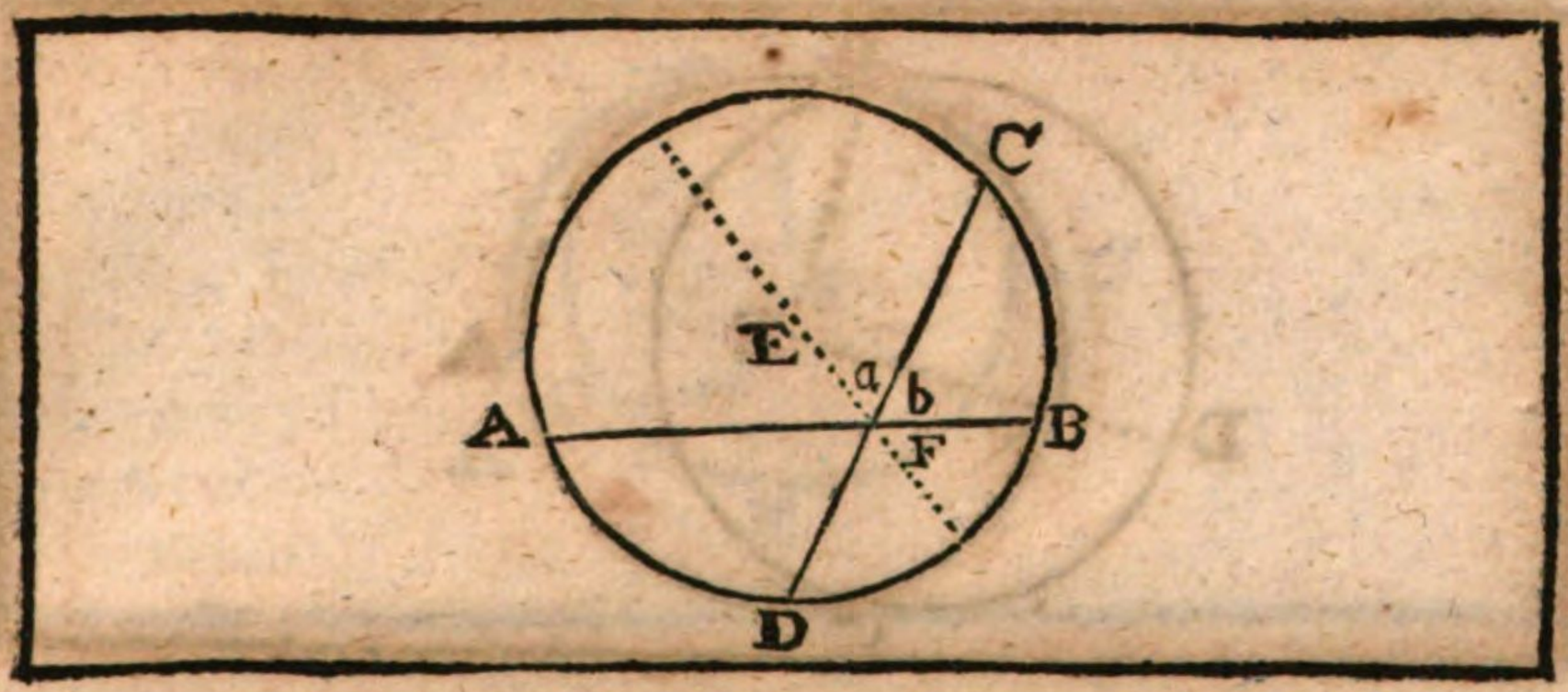
Auß dem Mittel-Punct D hange zusammen AD, CD.

Beweiß I.

In dem △ ADE ist die Seiten AD ⊓, der Seiten CD in △ CDE, — d. 15. def. 1.
und die Seiten AE ⊓, der Seiten CE. — d. d Vorg.
und die Seiten ED ist beyden △ gemein.
So wird deßwegen der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ d. — d. 8. 1.
und folgends werden beyde Rechte ∠ seyn. — d. 10. def. 1.

II.

In dem △ ADE ist die Seiten AD ⊓, der Seiten CD im △ CDE. — d. 15. def. 1.
Dahero wird der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ f. — d. 5. 1.
Unterdessen ist auch der ∠ b ⊓, dem ∠ d,
Darumb wird der △ ADE ⊓ seyn, dem △ CDE, — d. 26. 1.
und folgends die Linie AE ⊓, der Linie CE.
Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Zirckel (ABC) zwo gerade Linien (AB, CD) sich einander durchschneiden (als wie in F), und doch keine derselben durch den Mittel-Punct (E) gehet: so werden sich beyde einander nicht zugleich in zwey gleiche Theile zerschneiden.

Beweiß.

Gesetzt man sage fort, daß sich dennoch beyde Linien AB, CD im Punct F zugleich in zwey gleiche Theile zerschneiden.

So ziehe demnach durch den Mittel-Punct E, und durch den gemeinen Durchschnitts-Punct F die gerade Linie EF.

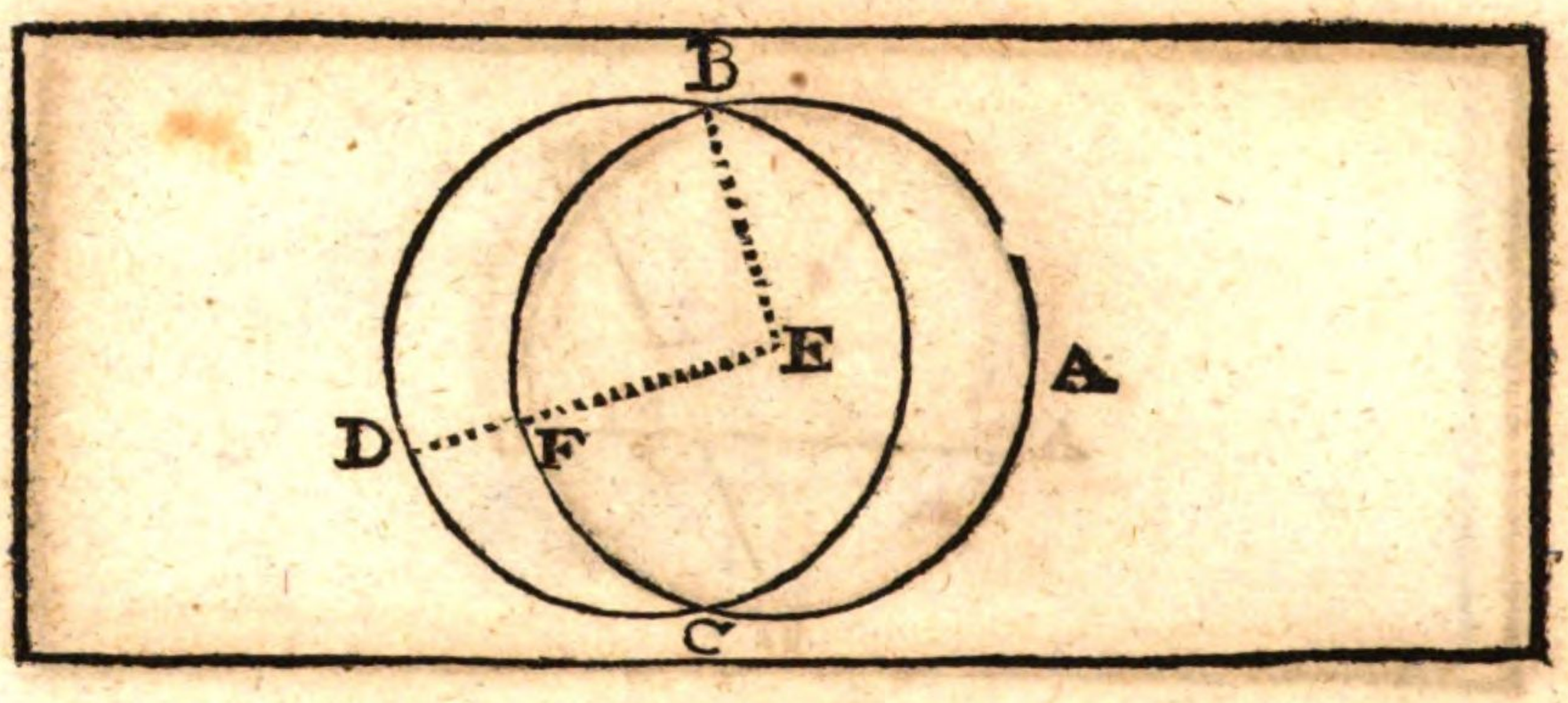
Weilen nun die Linie AB, und DC sich im Punct F einander gradt solten entzwey geschnitten haben. (durch deß Widersagers Meinung).

So folgete, daß die Linie EF erstlich mit der Linie AB einen rechten ∠ a + b, und wiederumb dieselbe EF, auch mit der Linie DC den rechten ∠ a machen werde. d. 3. 3.

Dieses aber ist ungereimbt, nemlich daß der ∠ a + b □ seyn solte, dem ∠ a: das gantze seiner Theilen einem.

Darumb ist nicht möglich, daß sich beyde Linien ausserhalb deß Mittel-Puncts einander können zugleich in zwey gleiche Theile zerschneiden.

Welches zu beweisen ware.



Die V. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn zween Zirckeln (ABC, BDC) sich einander durchschneiden (als wie in B, C): so haben solche nicht einen gemeinen Mittel-Punct.

Beweiß.

Gesetzt, man sage, daß der beyden Zirckeln gemeine Mittel-Punct E seye.

So ziehe aus dem Mittel-Punct E in dem Durchschnitts-Punct B die gerade EB, und eben auß E eine andere nach Gefallen, gleich wie ED, welche durch beyde Zirckeln in F, und D gehe.

Alsdann wird in dem Zirckel ABC die Linie EB ⌐ seyn, der Linie EF. d. 15. def. 1.

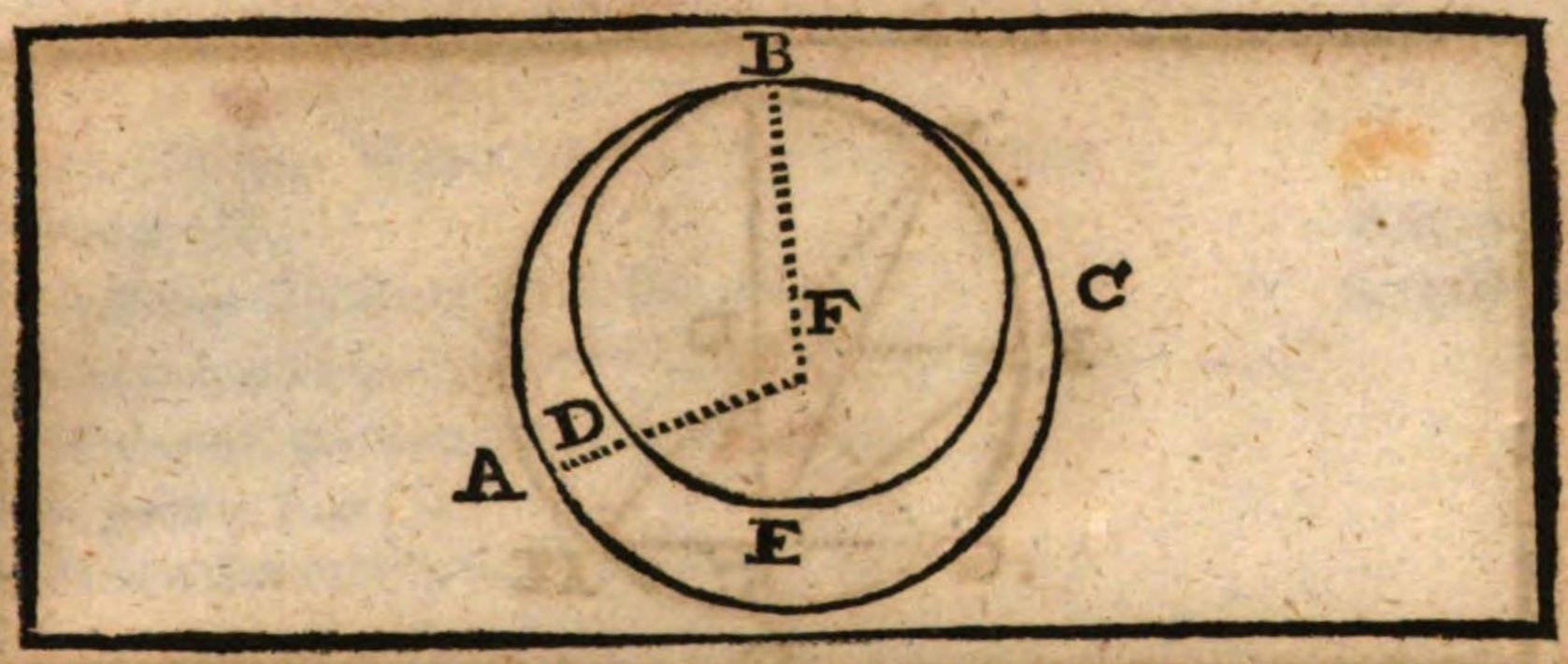
Weilen aber E der gemeine Mittel-Punct seyn solte.

So wird auch in dem Zirckel BDC die Linie EB ⌐ seyn, der Linie ED. d. 15. def. 1.

Und folgends würde die Linie EF ⌐ seyn, der Linie ED; d. 1. ax. 1.
nemlich der Theil seinem gantzen, so nicht möglich ist.

Dahero haben solche Zirckel nicht einen gemeinen Mittel-Punct, sondern zwey verschiedene.

Welches zu beweisen ware.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Zween Zirckel (ABC, BDE), welche sich inwendig einander anrühren (als wie im Punct B) haben nicht einen gemeinen Mittel-Punct.

Beweiß.

Gesetzt, man sage, daß der beyden Zirckeln gemeine Mittel-Punct F seye.

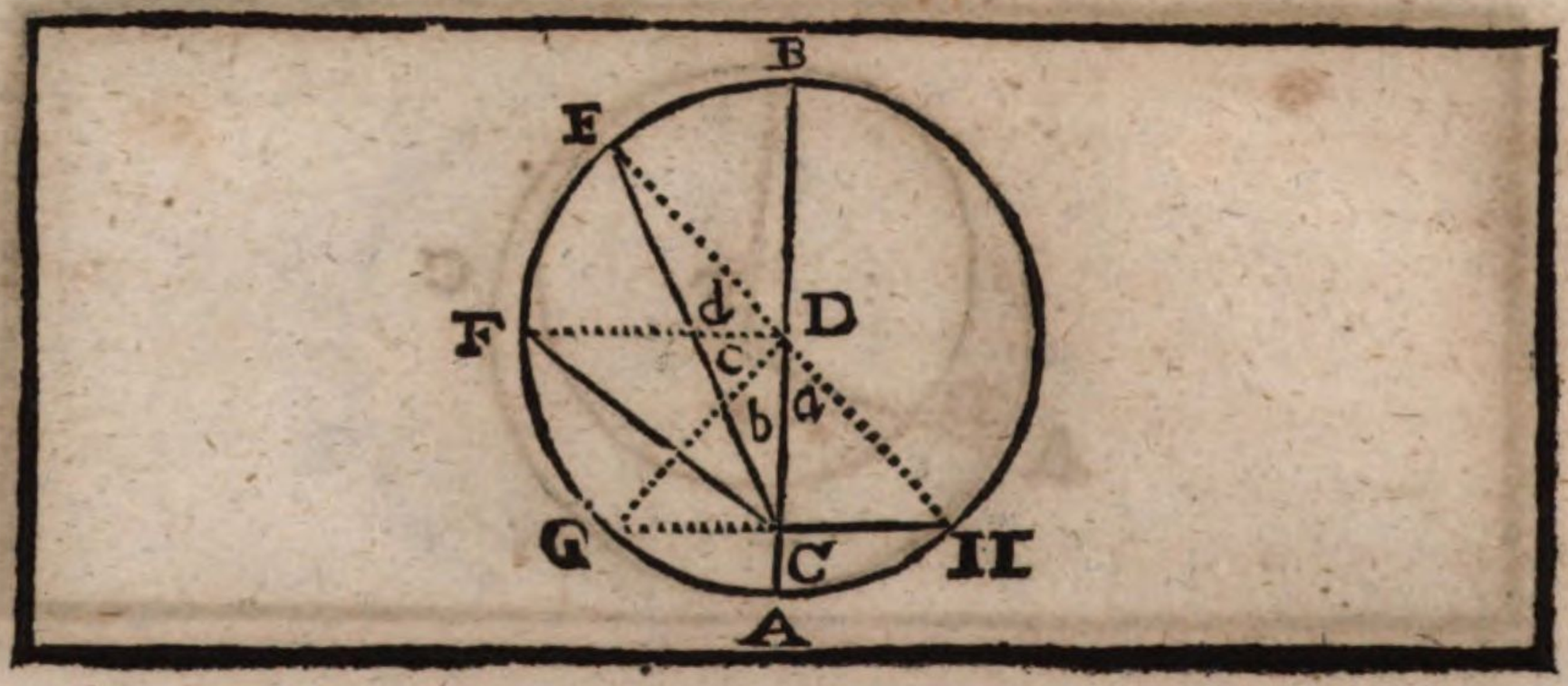
So ziehe auß F, und durch den Anrührungs-Punct B die gerade FB, und eben auß F eine andere nach Gefallen, gleich wie FA, welche durch beyde Zirckeln in D, und A gehe.

Diesen nach wird in dem Zirckel ABC die Linie BF ⊓ seyn, der Linie FA, d. 15. def. 1.
Weilen aber F der gemeine Mittel-Punct seyn solte;

So wird auch in dem Zirckel BDE die Linie FB ⊓ seyn der Linie FD. d. 15. def. 1.
Und folgends würde die Linie AF ⊓ seyn, der Linie FD; d. 1. ax. 1.
Nemlich das gantze seiner Theilen einem.
Welches ungereimt ist.

Dahero ist es eine Warheit, daß diese beyde Zirckeln nicht einen gemeinen Mittel-Punct, sondern zwey verschiedene haben.

Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in dem Diameter (AB) eines Zirckels, nach Gefallen ein Punct (C), welcher nicht deß Zirckels Mittel-Punct (D) ist, genommen wird, und von demselben Punct (C) etliche gerade Linien (gleich wie hier CE, CF, CG,) in dem hohlen Umbkreiß deß Zirckels gezogen werden:

1. So ist unter allen diesen gezogenen Linien die längste (CB), welche durch den Mittel-Punct (D) gehet.
2. Die kürtzeste aber (CA) ist der übrige Theil von solchen Puncten (C) an, biß in den Umbkreiß (A).
3. Unter denen aber (CE), je näher eine derselben (CB), welche durch den Mittel-Punct gehet, je länger sie auch ist, je weiter sie (FC) aber von solcher, je kürtzer. (also ist CE länger, als CF: und CF länger, als CG).
4. So können auch nicht mehr, als nur zwo gleiche Linien (CG, CH) von diesem Punct (C) zu beyden Seiten der kürtzesten (CA), oder der längesten (CB) in den hohlen Umbkreiß gezogen werden.

Zubereitung.

Ziehe ED, FD, GD mit geraden Linien zusammen.

Beweiß I.

In dem △ CDE seynd die zwo Seiten CD, DE ⌐, als die eine Seiten CE. d. 20. I.
die zwo Seiten CD, DE seynd aber ⌐, der Linie CB.
(dann DB ist ⌐, ED: und CD ist beyden gemein,) d. 15. def. I.
Folget dann, daß die Linie CB ⌐ seye, als die Linie CE. u. s. f.

II.

In dem △ CGD seynd die zwo Seiten GC, CD ⌜, als die eine
Seiten GD. d. 20. I.
der Seiten GD aber, ist ⌐ die Linie AD. d. 15. def. I.
Dahero seynd auch die zwo Seiten GC, CD ⌜, als die Linie AD.
Wenn man unterdessen beyderseits hinweg nimmet
die gemeine Linie CD.
So wird überbleiben die Linie GC ⌜, als die Linie CA. u. s. f.

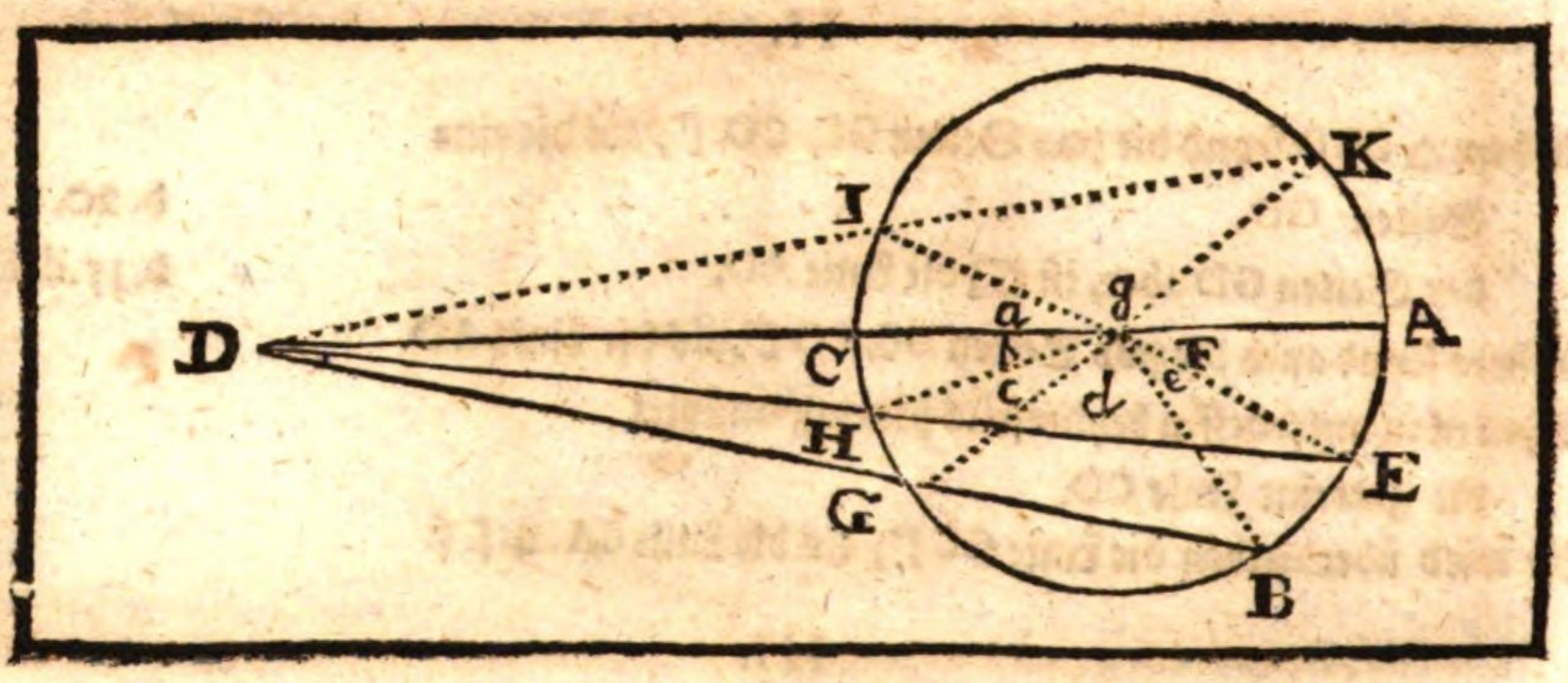
III.

In dem △ DEC ist die Seiten DE ⌐, der Seiten DF im △ DFC.
und die Seiten DC ist beyden △ gemein. d. 15. def. I.
der ∠ d + c + b aber ist ⌜, dann der ∠ c + b.
Folget, daß auch die Basis CE ⌜ seye, als die Basis CF. d. 24. I.
und s. f.

IV.

Mache vorhero den ∠ a ⌐, dem ∠ b. d. 23. I.
und ziehe zusammen C, H.
In dem △ DHC ist die Seiten DH ⌐, der Seiten DG im △ DGC, d. 15. def. I.
und die Seiten CD ist beyden △ gemein,
der ∠ a ist auch ⌐ gemacht worden, dem ∠ b.
Darumb wird die Basis CH ⌐ seyn, der Basis CG, d. 4. I.
also können von dem Punct C keine andere gleiche
denen zweyen Linien CG, CH auff beyden Seiten gezogen werden,
dann solche entweder von der Linie CA, welche durch den Mittel-
Punct gehet, abweichen, oder zu solcher nähern,
alsdann müsten sie entweder kürtzer, oder
länger werden, nach dem dritten Theil dieses Beweiß.

Welches zu beweisen ware.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn ausserhalb eines Zirckels (ABCIK) nach Gefallen ein Punct (D) genommen wird, und von solchen etliche gerade Linien (als wie DA, DE, DB) in den Zirckel gezogen werden, deren eine durch den Mittel-Punct (F) gehet, die andere aber nach Gefallen:

1. So ist unter allen denen, welche hineinwerts in den hohlen Umbkreiß gezogen werden, dieselbe die längste, so durch den Mittel-Punct (F) gehet.
2. Nachmahls, welche dieser näher, die ist auch länger, als eine andere, welche weiter darvon ist (also ist ED länger, als BD).
3. Unter denen aber, so von dem Punct (D) heraußwerts auff dem gebogenen Umbkreiß gezogen werden; ist solche die kürtzeste (DC), so von solchem Punct auß (D), an dem Diameter (CA) stosset.
4. Welche hernach je weiter von dieser, je länger sie auch ist (als wie GD ist länger, dann HD).
5. So können auch nicht mehr, als nur zwo gleiche Linien auß diesem Punct (D) oder auff dem gebogenen (gleich wie DH, DI), oder in dem hohlen Umbkreiß (gleich wie DE, DK) zu beyden Seiten der kürtzesten (CD), oder der längsten (AD) fallen.

Zubereitung.

Ziehe mit geraden Linien zusammen FE, FB, FG, FH.

Beweiß.

I.

In dem △ DEF seynd die zwo Seiten DF, FE ⌐, als
die eine Seiten DE. d. 20. I.
Denen Linien DF, FE aber ist ⌐, die Linie DA. (d. 15. def. I.
Darumb wird die Linie DA ⌐ seyn, als die Linie DE. u. s. s. (und 2. ax. I.

II.

In dem △ DFE ist die Seiten EF ⌐, der Seiten FB im △ DFB. d. 15. def. I.
Und die Seiten DF ist beyden △ gemein.
Der ∠ e + d + c + b aber ist ⌐, als der ∠ d + c + b.
Folget, daß auch die Basis ED ⌐ seye, als die Basis BD. d. 24. I.

III.

In dem △ DFH, seynd die zwo Seiten DH, HF ⌐, als
die eine Seiten DF. d. 20. I.
Wann man beyderseits die gleichen Linien FC, FH hinweg nimmet,
So wird überbleiben die Linie HD ⌐, als die Linie CD: und
also von denen andern.

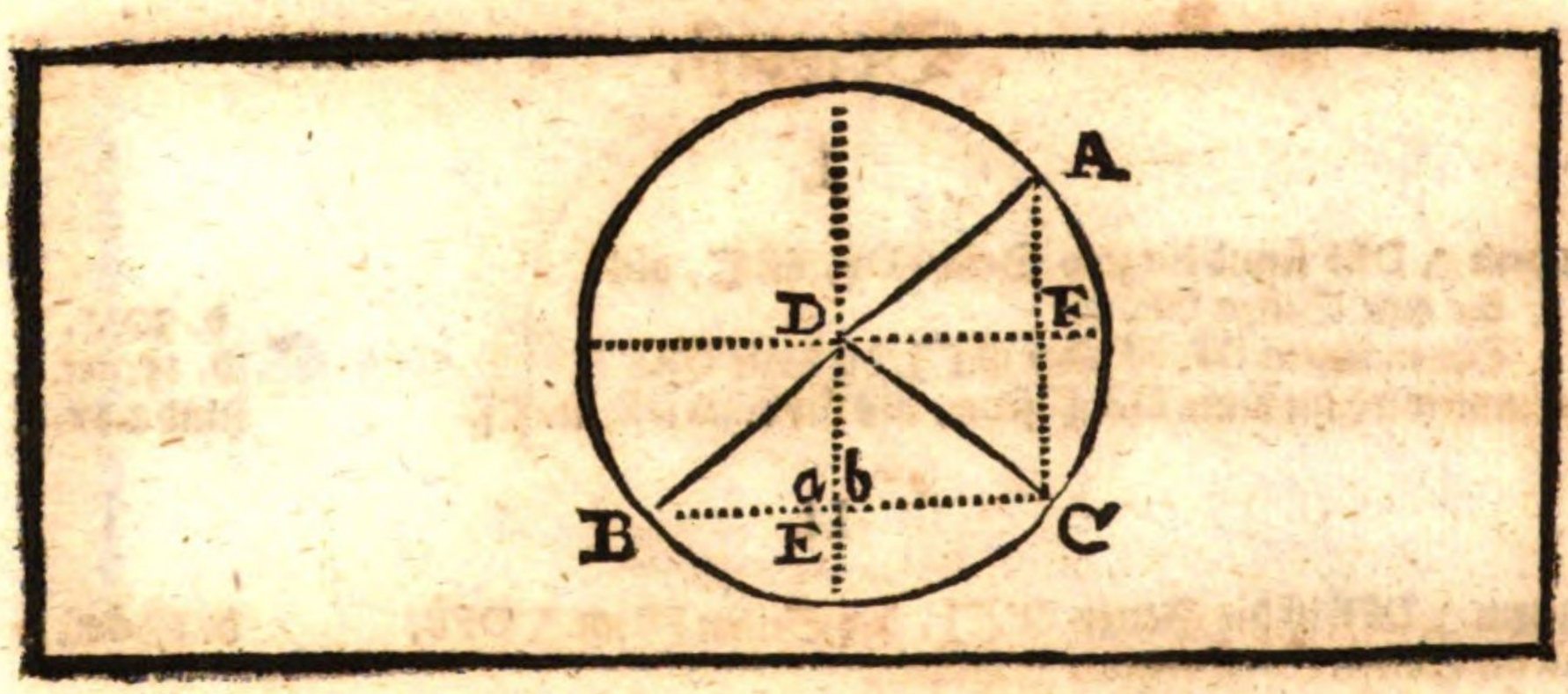
IV.

In dem △ DFG seynd die zwo innere Seiten FH, HD ⌝,
als die zwey äussere Seiten FG, GD, d. 21. I.
wenn man beyderseits die zwey gleiche Seiten FG, FH
darvon ziehet. d. 15. def. I.
So bleibet über die Seiten DH auch ⌝, als die Seiten DG.

V.

Mache den ∠ a ⌐, dem ∠ b, und den ∠ a + g ⌐,
dem ∠ b + c + d + e. d. 23. I.
Nun ist in dem △ DIF die Seiten IF ⌐, der Seiten HF im △ DHF, d. 15. def. I.
und die Seiten DF ist beyden △ gemein,
und der ∠ a ⌐, dem ∠ b.
Folget, daß auch die Basis DI ⌐ seye, der Basis DH. d. 4. I.
Auff solche Art wird auch im △ DKF die Basis DK ⌐
seyn, der Basis DE im △ DEF, u. s. f.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Borgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Zirckel (ABC) ungefehr ein Punct (D) genommen wird, und von solchem mehr, dann zwo gleich lange Linien (als wie DA, DB, DC) im Umbkreiß können gezogen werden: so ist ein solcher genommener Punct der Mittel-Punct.

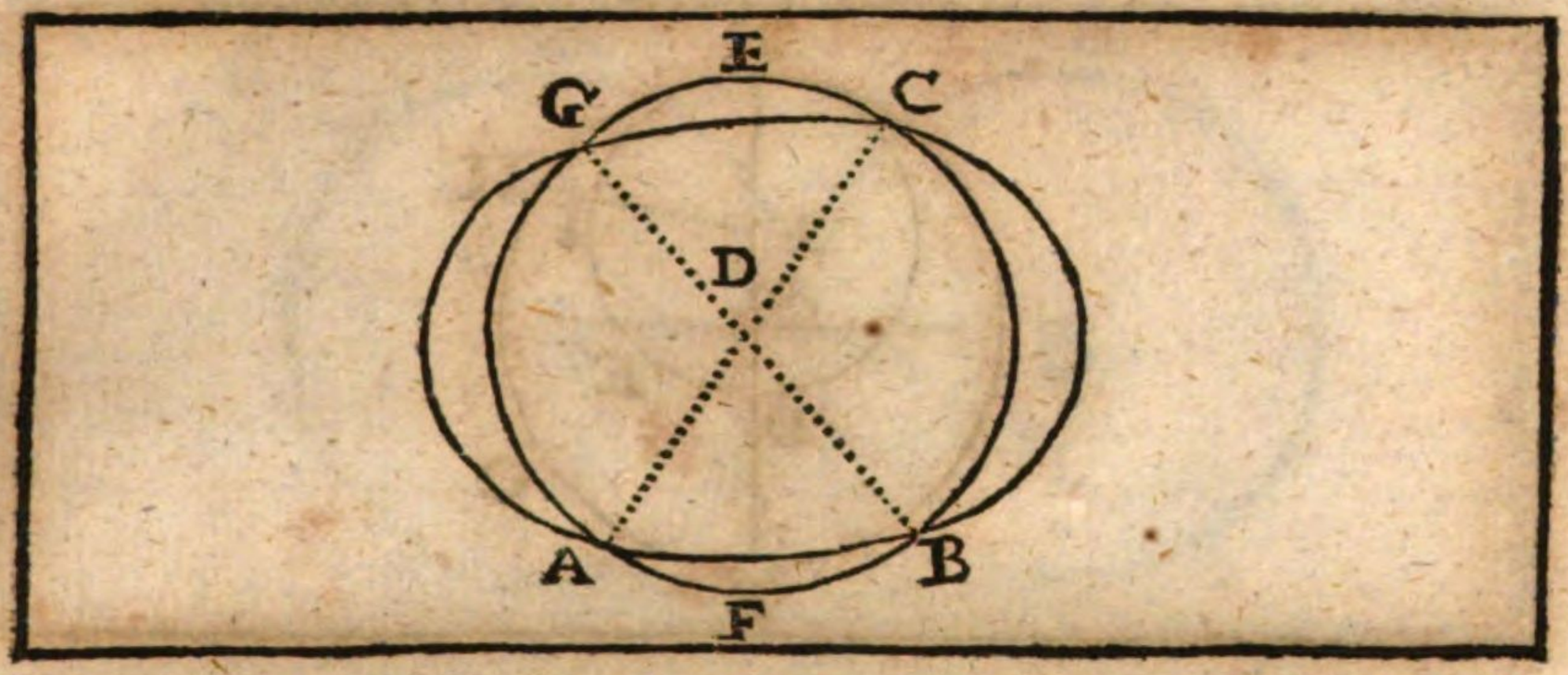
Zubereitung.

Hange BC, CA mit geraden Linien zusammen.
Zertheile BC, CA in mitten in E, und in F. d. 10. I.
Ziehe letzlich durch FD, und ED gerade Linien, biß in den Umbkreiß.

Beweiß.

Der △ DEB ist ⊓, dem △ DEC. d. d. Borg.
deßwegen ist auch der ∠ a ⊓, dem ∠ b. und die Zub. und 8. I.

und folgends seynd diese zween ∠ a und b, beyde rechte ∠ d. 10. def. I.
Dahero wird in der Linie ED der Mittel-Punct seyn. d. Cor. I. 3.
Nach solchem Beweiß wird auch in der Linie DF der Mittel-Punct seyn.
An zweyen Oertern kan aber der Mittel-Punct nicht seyn. (sonsten wären in einem Zirckel die gerade Linien, welche auß einem Mittel-Punct in dem Umbkreiß gezogen werden, nicht einander gleich, wider) d. 15. def. I.
Dahero ist nöthig, daß der Mittel-Punct in dem gemeinen Durchschnitz-Punct D seye.
Welches zu beweisen ware.



Die X. Vorgab.

Betrachtung.

Ein Zirckel (AFBE) durchschneidet einen andern nicht mehr, als in zweyen Puncten.

Will man es nicht gestehen, so seye dann (wann es möglich ist) daß einer den andern mehr dann in zwey Puncten, gleich wie allhier der Zirckel AFBE, den Zirckel ABCG in denen vier Puncten ABCG durchschneide.

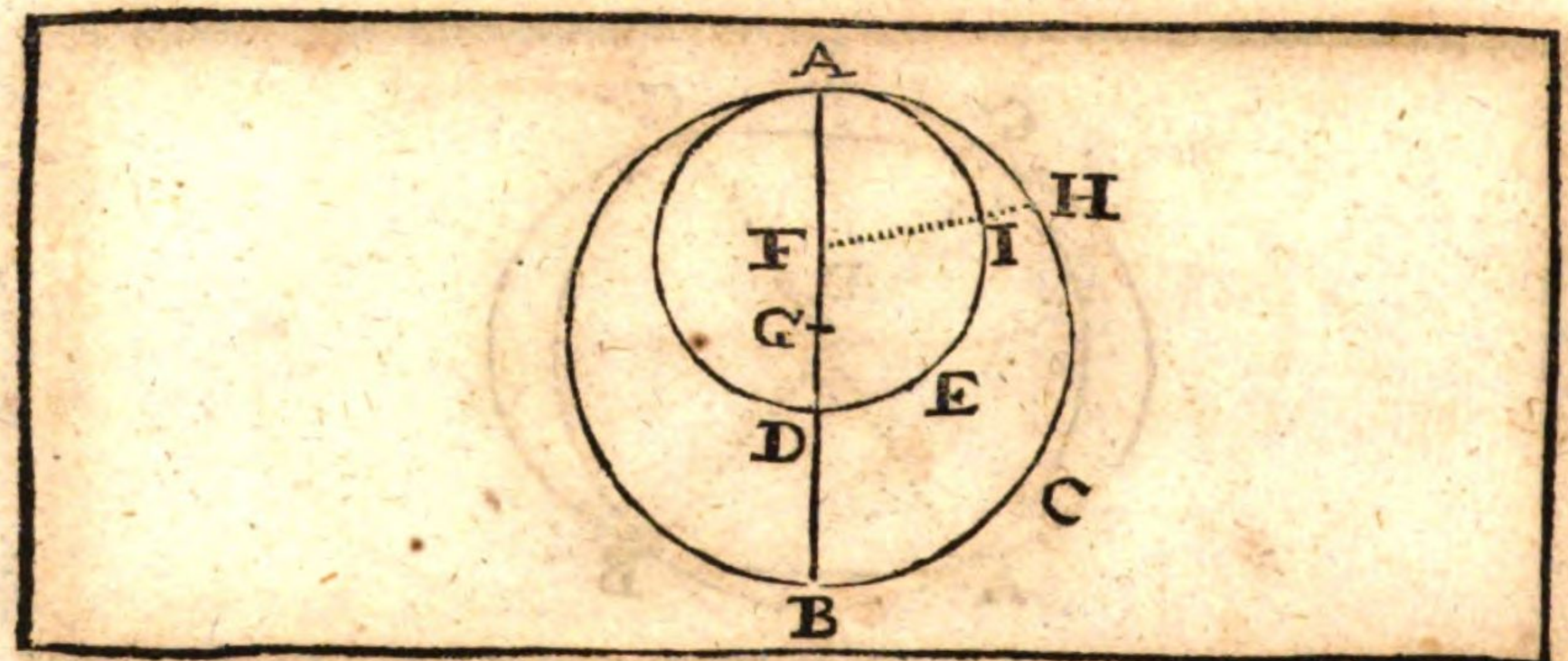
Zubereitung.

Finde alsdann den Mittel-Punct D deß Zirckels AFBE. d. 1. 3.
und ziehe darauß in die Durchschnitz-Puncten
A, B, C, G die gerade Linien DA, DB, DC, DG.

Beweiß.

Die Linien AD, BD, CD, GD seynd einander ▭ d. 15. def. 1.
Dahero werden beyde Zirckel einen gemeinen Mittel-Punct D. haben. d. 9. 3.
Dieses aber kan nicht seyn; daß nemlich zween einander durchschneidende Zirckeln einen gemeinen Mittel-Punct haben solten. d. 5. 3.
Deßwegen ist es eine Warheit, daß sich zwey Zirckeln nicht mehr, dann bloß in zwey Puncten allein durchschneiden.

Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn sich zwey Zirckeln (ABC, ADE) inwendig einander berühren (als wie hier in A), und durch ihre beyde Mittel-Puncten (F G) eine gerade Linie (BA) gezogen wird: so gehet solche, wann sie verlängert wird, durch den Berührungs-Punct (A).

Zweiffelt man daran, und saget, daß die Linie BA zwar durch die zween Mittel-Puncte F, G, doch aber nicht durch den Anrührungs-Punct A, sondern auff eine andere Seiten, als wie durch H. gehe.

Zubereitung.

Ziehe dann ein solche gerade Linie, als wie BDGFH (wann es möglich ist,) welche den Zirckel ADE im Punct I. durchschneide.

Beweiß.

Dieweilen die Linie BG FH, als eine vermeinte gerade Linie durch die Mittel-Punct G, und F gehet.

So wird die Linie FH die kürtzeste seyn. d. 7. 3.

Und deßwegen wird die Linie FA Γ, als FH seyn;

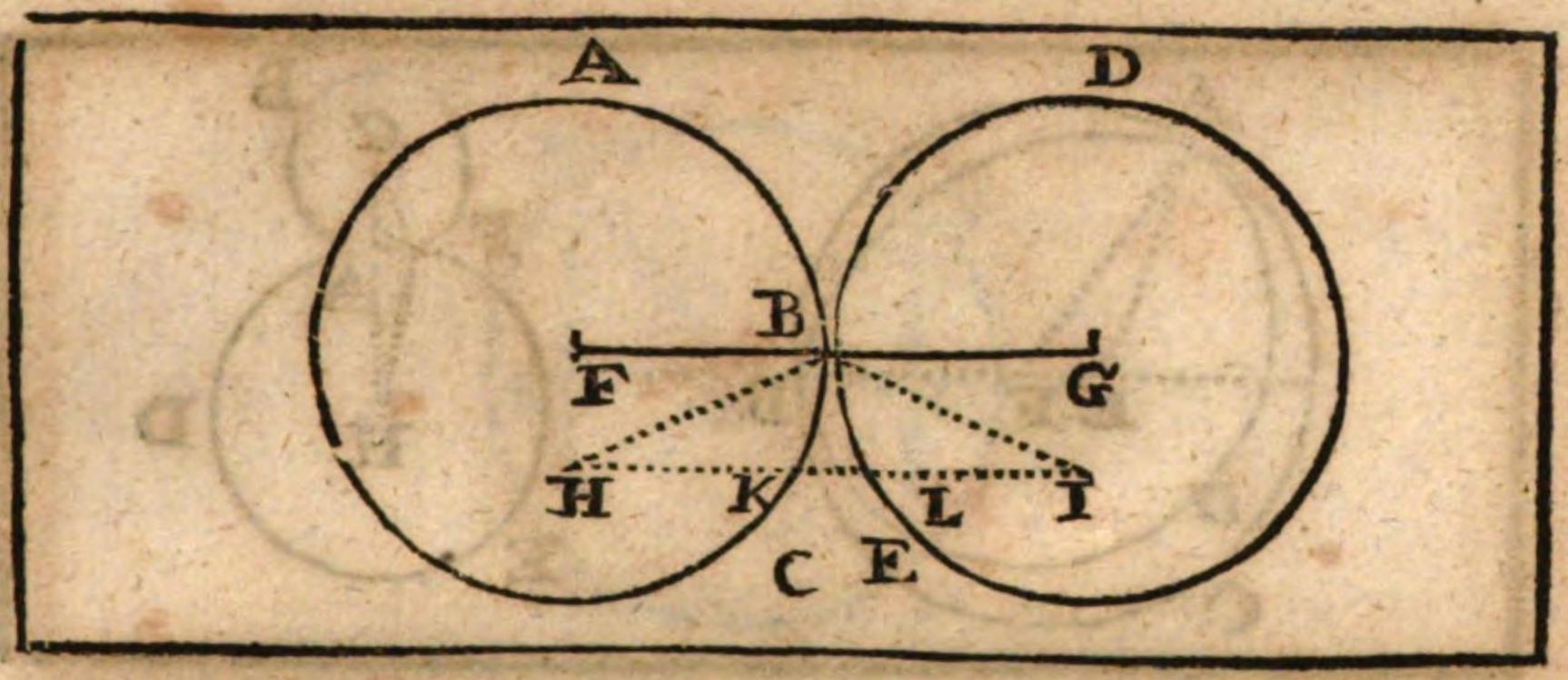
Die Linie FA aber, ist □, der Linie FI. d. 15. def. 1.

Folget dann, daß dieselbe FI Γ wäre, als FH;

Nemlich der Theil seinem gantzen, so ungereimbt ist.

Ist derohalben nöthig, daß die Linie BA durch den Anrührungs-Puncten A, und nicht anderwertig hinauß gehe.

Welches zu beweisen ware.



Die XII. Vorgab.

Betrachtung.

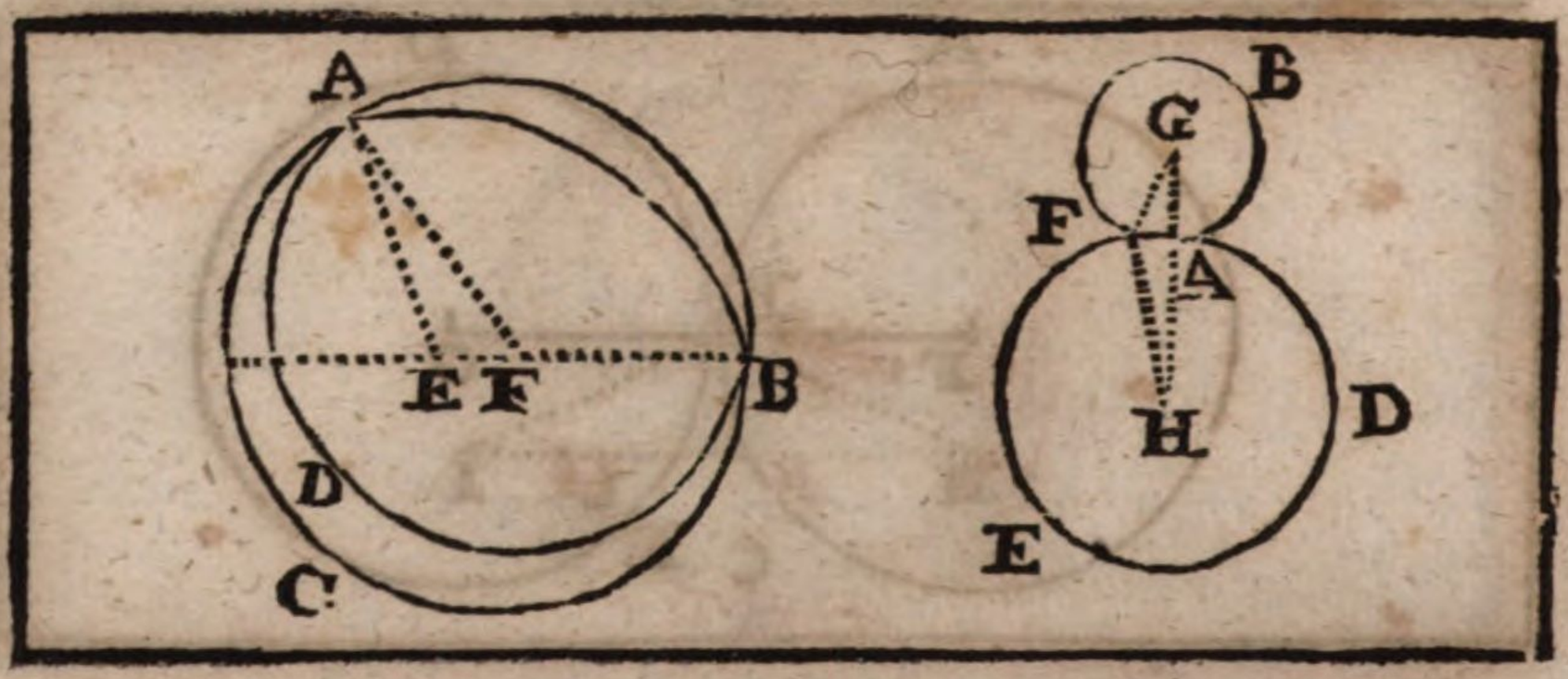
Wenn sich zween Zirckeln (ABC, EBD) außwendig einander berühren (als wie in B) und eine gerade Linie durch dero beyde Mittel-Puncte (F, G) gezogen wird; so gehet solche auch durch ihren Anrührungs-Puncten (B).

Welcher einwenden wolte, sagend, daß man die zwey Mittel-Puncte dergestalten versetzen könte, gleich wie in H und I; und die gerade Linie HI auß ihrem Mittel-Punct dergestalten ziehen, daß sie nicht durch den Anrührungs-Punct gehe, sondern anderwertig die Zirckeln, als wie in K, L durchschneide.
Ziehe alsdan HB, und IB zusammen.

Beweiß.

In dem △ HIB seynd die zwo Seiten HB, und BI ⌜, als die Seite HI. d. 20. I.
Und weilen die Puncte H, und I die Mittel-Puncte seyn solten,
So wird KH ⌐ seyn, BH, und IL ⌐, BI. d. 15. def. I.
Dahero müssen die Linien HK, und LI auch ⌜ seyn, als die gantze Linie HI, welches ungereimt ist.
Indeme noch das Stück KL darvon abgehet.
Darauß schliesset man, daß also die gerade Linie FG, so durch die zween Mittel-Punct gezogen, nothwendig durch den Anrührungs-Puncten B gehen müsse.

Welches zu beweisen ware.



Die XIII. Vorgab. Betrachtung.

Ein Zirckel anrühret einen andern Zirckel, nur an einem Puncten, es seye gleich in- oder außwendig.

Gesetzt (wofern es möglich ist), daß der Zirckel DAB den Zirckel ABC in denen inwendigen zween Puucten A und B anrühre: so ziehe durch ihre Mittel-Puncte E, F die gerade Linie EFB: und hange EA, FA zusammen.

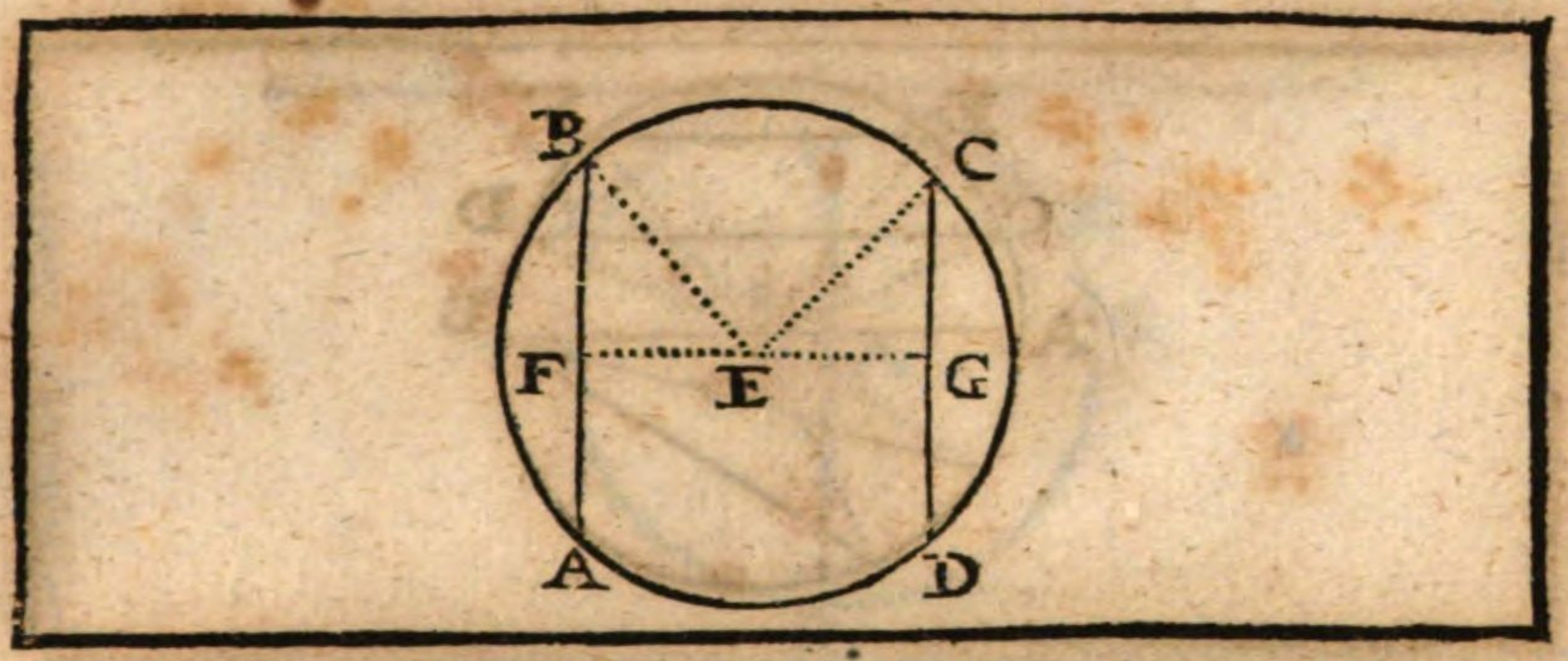
Beweiß.

I.

In dem Zirckel ABD ist nunmehr AF ⌐, FB. d.15.def.1.
setze beyderseits hinzu die gemeine Linie EF.
So werden die zwo Linien EF + FA ⌐ seyn, der Linie EB.
Unterdessen seynd in dem △ AFE die zwo Seiten EF,
und FA ⌐, als die dritte Seiten EA. d.20.1.
Folget dann, daß auch EB ⌐ wäre, als AE: so ungereimt ist,
dann die Linie EB ⌐, ist der Linie AE. d.15.def.1.

II.

Solten sich herentgegen die zween Zirckel CBA, und EDA nicht
in einem, sondern in zwenn Puncten A, und F außwendig anrühren:
so ziehe (wann es möglich ist) auß denen Mittel Puncten G, H,
und durch ihren einen Durchschnitts-Punct A, die gerade Linie
GAH, und hange GF, und FH zusammen.
So werden in dem △ GFH die Linien GF, FH ⌐ seyn, als GH. d.20.1.
Unterdessen ist GF ⌐ der GA, und FH ⌐, der AH: d.15.def.1.
Darum müsten auch GA + HA ⌐ seyn als GH.
So nicht seyn kan, daß nemlich die Theile sammentlich ⌐ wären,
als ihr gantzes: darauß schliesset man, daß ein Zirckel den
andern nicht mehr als nur in einem Puncten berühre.
Welches zu beweisen ware.



Die XIV. Vorgab. Betrachtung.

In einem Zirckel (ABCD) stehen gleich gerade Linien (AB, DC) in gleicher Weite vom Mittel-Punct (E) ab: und hingegen gerade Linien, so in gleicher Weite vom Mittel-Punct abstehen, die seynd einander gleich.

Zubereitung.

Lasse auß dem Mittel-Punct E die zwo ⊥ EF, EG auff die Linien AB, CD fallen, welche sie gleich entzwey theilen, werden. Hange BE, und EC zusammen. d. 12. 1. d. 3. 3.

Beweiß.

I.

Das □ auff EB ist ⊓, denen zwey □ auff EF, und FB. und das □ auff EC ist ⊓, denen zwey □ auff EG, und GC. d. 47. 1.

Wann man von denen gleichen □, so auff denen gleichen Linien EB, und EC stehen, die gleiche □ auff denen gleichen Linien FB, und GC darvon abziehet. d. 15. def. 1.

So wird überbleiben das □ auff FE ⊓, dem □ auff EG; das ist, die ⊥ FE ⊓ der ⊥ EG. d. 4. an. 46. 1.

Dahero stehen AB, und DC in gleicher Weite von dem Mittel-Punct E ab. d. 4. def. 3.

II.

Die Linie EF ist ⊓, der Linie EG, und die Linie BE ist ⊓, EC, d. d. Vor. u. 15 def. 1.

Unterdessen ist das □ auff EB ⊓, denen □ auff FE, und BF. d. 47. 1.

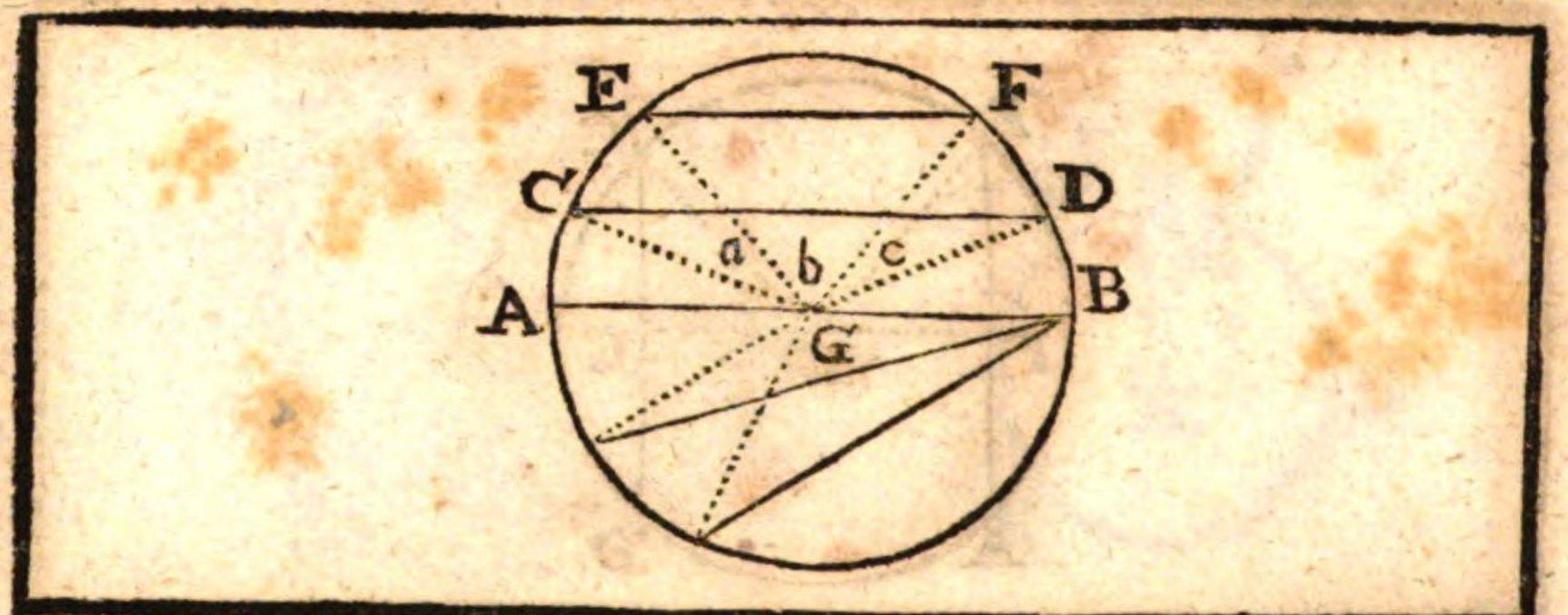
Und das □ auff EC ist ⊓, denen □ auff EG, und GC.

Wann man beyderseits von denen gleichen □ auff BE, und EC die gleiche □ auff FE, und EG darvon abziehet,

So wird überbleiben das □ auff der Linie FB ⊓, dem □ auff der Linie GC: das ist, die Linie FB ⊓ der Linie GC. d. 4. an. 46. 1.

Dahero wird auch die doppelte AB ⊓ seyn der doppelten DC. d. 6. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

In dem Zirckel (AEFB) ist der Diameter (AB) die längste Linie, hernachmahln, welche dem Mittel-Punct (G) näher ist (als wie CD), die ist auch länger, als eine andere (EF), welche weiter darvon abstehet.

Zubereitung.

Ziehe CG, DG. Item EG, FG zusammen.

Beweiß.

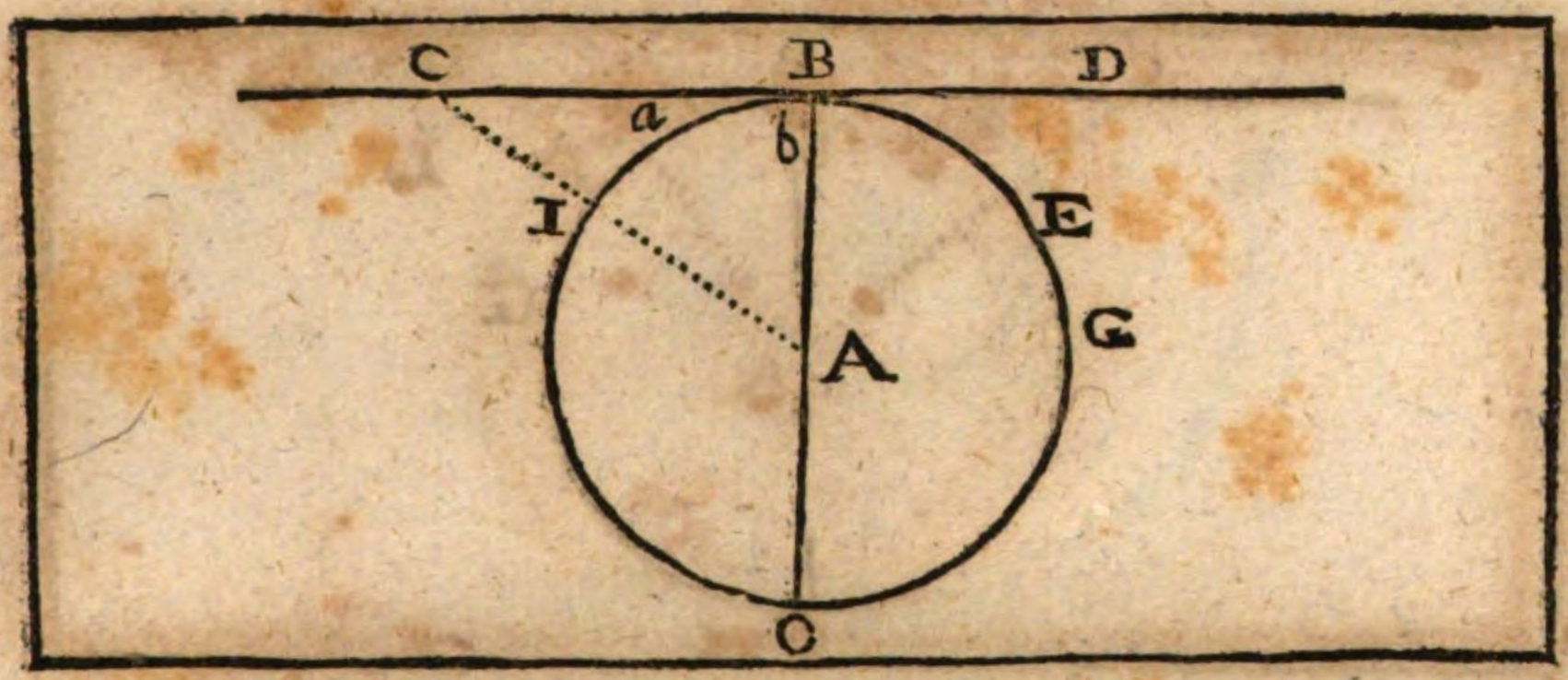
I.

In dem △ CGD seynd die zwo Seiten GC, und GD ⌜, als die dritte Seiten CD. d. 20. I.
Die Seiten GC, und GD aber, seynd ⌐ dem Diameter AB. d. 15. def. I.
Darumb wird der Diameter AB ⌜ seyn, als CD. u. s. f.

II.

In dem △ CGD seynd die zwo Seiten GC, und GD ⌐, denen zwo Seiten GE, und GF in dem △ EGF. d. 15. def. I.
der ∠ a + b + c ist aber ⌜, als der ∠ b. d. 9. ax.
Darumb wird folglich die Basis CD ⌜ seyn, als die Basis EF. d. 24. I.

Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab. Betrachtung.

Wenn am Ende (B) eines Diameters (OB) eine Bleyrechte Linie (CBD) gezogen wird.

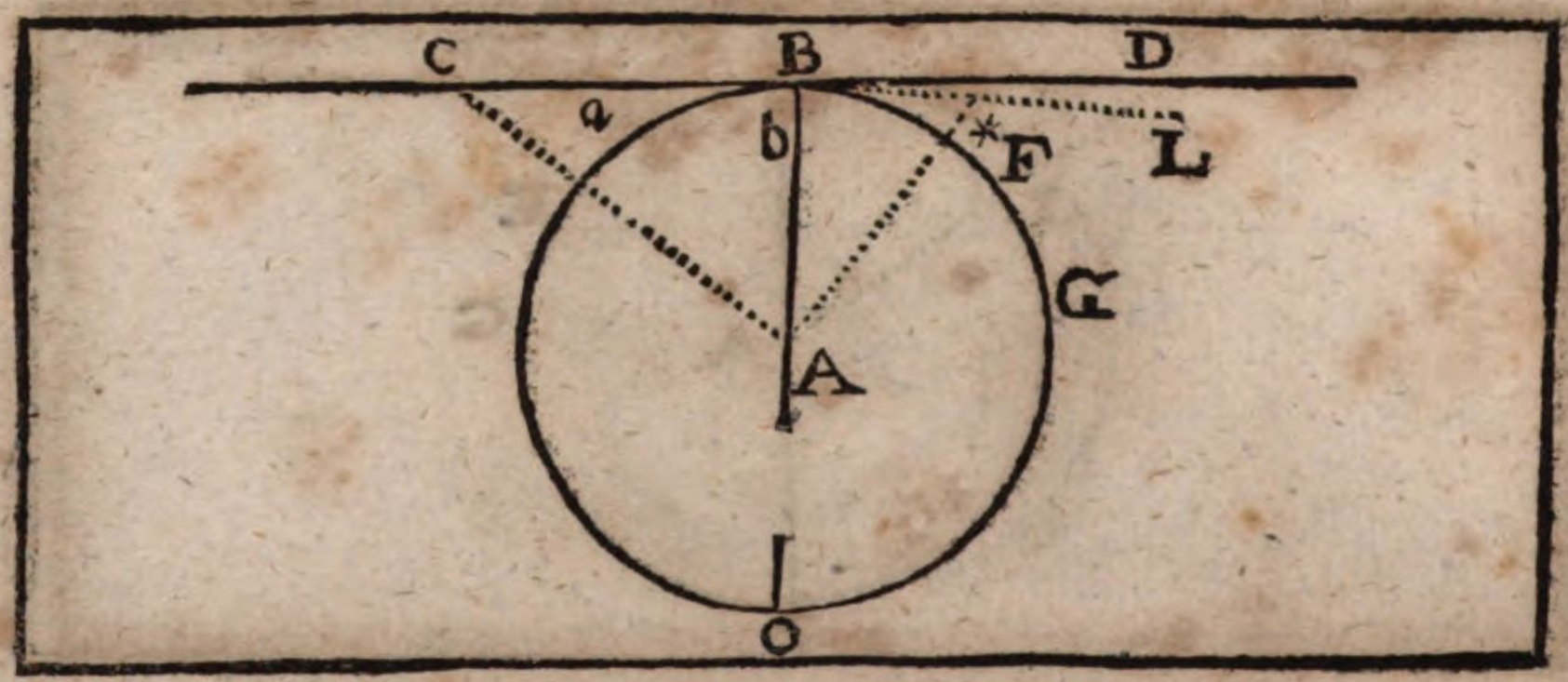
1. So fahlet solche ausserhalb deß Zirckels.
2. So kan keine andere zwischen dieser Bleyrechten Linie, und dem Umbkreiß (IBEG) gezogen werden, die nicht sonsten in den Zirckel fallen solte.
3. Und der Winckel deß halben Zirckels (OBEG), (so gemacht ist von dem Diameter und dem Umbkreiß,) ist grösser, als ein jeder scharffer geradtlinischer Winckel.
4. Der übrige Winckel aber, (DBEG) so gemacht ist von der Bleyrechten Linie, und dem Umbkreiß, ist kleiner, als ein jeder scharffer geradtlinischer Winckel.

Zubereitung.

Ziehe auß dem Mittel-Punct A nach Gefallen in die ⊥ CBD die gerade Linie AIC, welche den Umbkreiß in I durchschneidet, und die ⊥ in Puncten C berühre.

Beweiß. I.

Weilen die Seiten AC den rechten ∠ a + b unterspannet, so wird die Seiten AC ⌜ seyn, als AB, oder die Gleiche AI. d. 19. 1.
Der letzte Punct B aber, der Linie AB, stehet am Umbkreiß, d. d. Vorg.
Dahero wird auch der letzte Punct I an dem Umbkreiß seyn,
Und folgends wird der Punct C, der Linie AC, nothwendig ausserhalb deß Umkreiß stehen müssen.
Und also beweiset man, daß alle andere genommene Puncten in der Linie CBD, außgenommen den einigen Punct B, welcher den Umbkreiß berühret, ausserhalb deß Circkels fahlen werden.



II.

Gesetzt, man sage, daß man gar wol zwischen dem Umkreiß, und der ⊥ CBD noch eine andere gerade Linie, gleich wie BL ziehen könne, welche in den Zirckel nicht falle, sondern selben bloß berühre.

Ziehe dahero auß A auff die Linie BL die ⊥ A* (wann es möglich ist). d. 12. 1.
So ist in dem △ AB* die Seiten AB Γ, als die Seiten A* d. 19. 1.
Der Punct B ist aber noch an dem Umbkreiß deß Zirckels, d. d. Vorg.
Also wird der Punct *, und folgends alle andere Puncten der Linie BL, von dem B an gegen L, inwendig in den Zirckel fallen müssen.
Dahero nicht möglich ist zwischen BD und dem Umbkreiß eine gerade Linie zu ziehen, welche nicht in den Zirckel falle.

III.

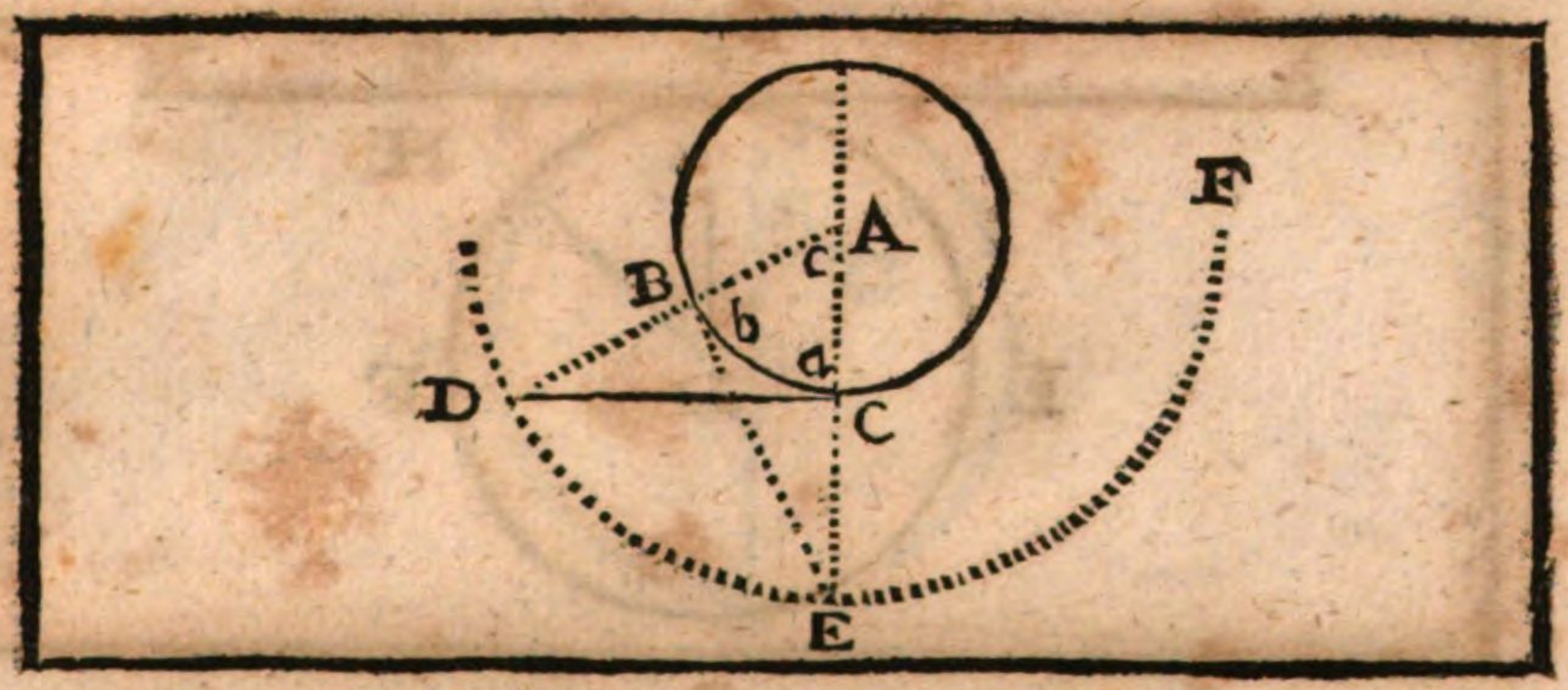
Wann man glaubet, daß noch ein grösserer scharffer ∠, als der ∠ OBFG deß halben Zirckels könne gemacht werden: so würde nöthig seyn, daß man eine gerade Linie zwischen den gebogenen Umbkreiß BFG, und der ⊥ BD ziehen müsste, solches aber ist unmöglich, dann eine solche gezogene Linie stracks in den Zirckel fallen würde. So wider das vorgehende ist.

IV.

Eben müsste man zwischen der ⊥ CBD, und dem gebogenen Umbkreiß BFG eine neue gerade Linie ziehen, wenn man einen kleinern Anrührungs-∠, als den ∠ DBFG machen wolte; diß aber kan auß dem vorbewiesenen auch nicht geschehen.

Folge.

Eine gerade Linie, welche auß dem Ende deß Diameters Bleyrecht gezogen wird, berühret den Zirckel nur in einem Puncten.
Welche aber den Zirckel in zwey Puncten anrühret, dieselbe fället innerhalb deß Zirckels, nach der 2. 3.



Die XVII. Vorgab.

Handgriff.

Aus einem vorgegebenen Puncten (D) eine gerade Linie DC zu ziehen, welche einen gegebenen Zirckel (BCA) anrühre.

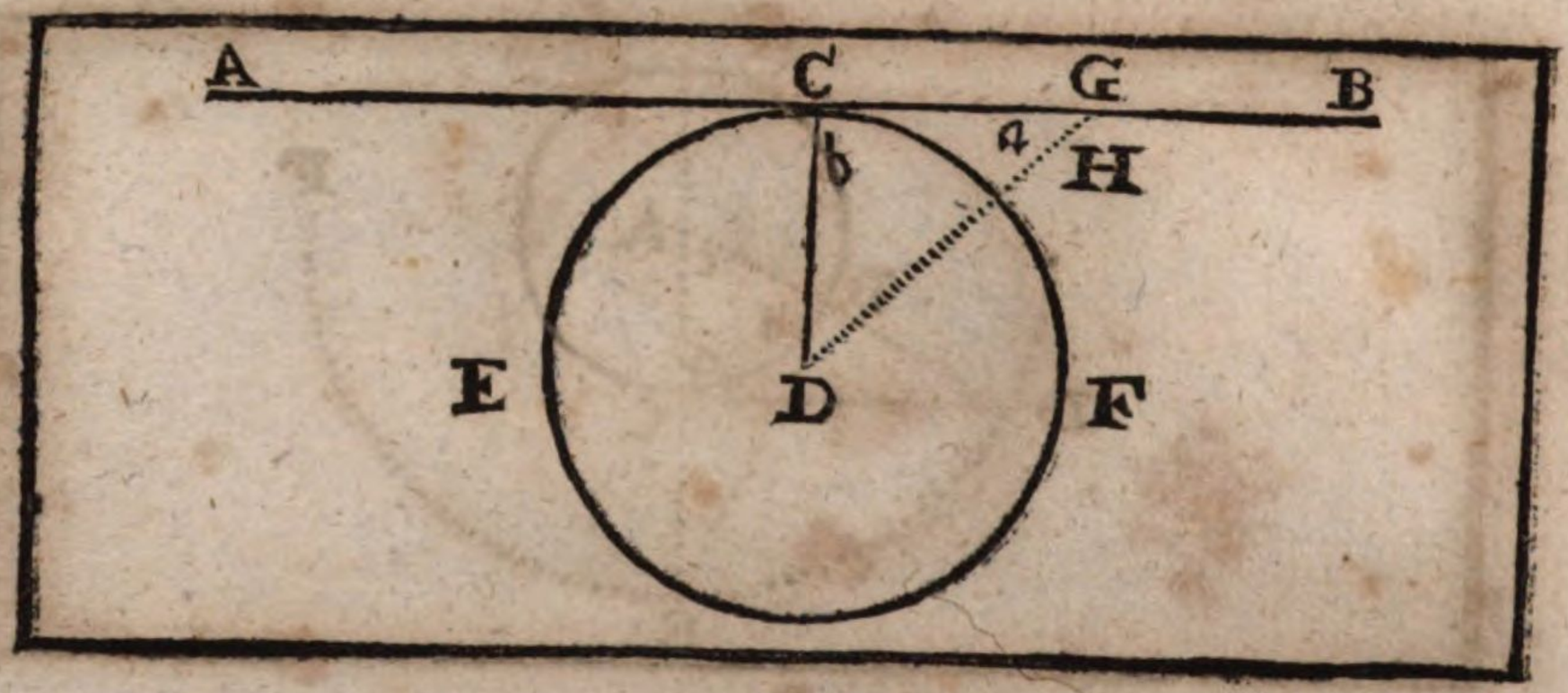
Handgriff.

Auß dem Mittel-Punct A mit der Weite AD beschreibe einen Zirckel-Bogen DEF, und ziehe zusammen D, A.
Alsdann auß dem Punct B ziehe die ⊥ BE, biß an den geschriebenen Zirckel-Bogen E; und hange zusammen E, A. d. 12. 1.
Letzlich ziehe in C die gerade Linie DC, welche den Zirckel ABC in dem einigen Punct C anrühren werde.

Beweiß.

In dem △ AEB seynd die Seiten AE, und AB ⊓, denen Seiten AD, und AC in dem △ ADC.
und der ∠ c ist beyden △ gemein.
Darumb wird der △ AEB ⊓ seyn, dem △ ADC. d. 15. def. 1.
Weilen aber der ∠ b ein rechter ist, d. 4. 1.
also wird auch der ∠ a ein rechter seyn. d. d. Hand.
Und folgends wird die gerade Linie CD den Zirckel in dem Punct C berühren. d. 16. Cor. 3.

Welches zu machen ware.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

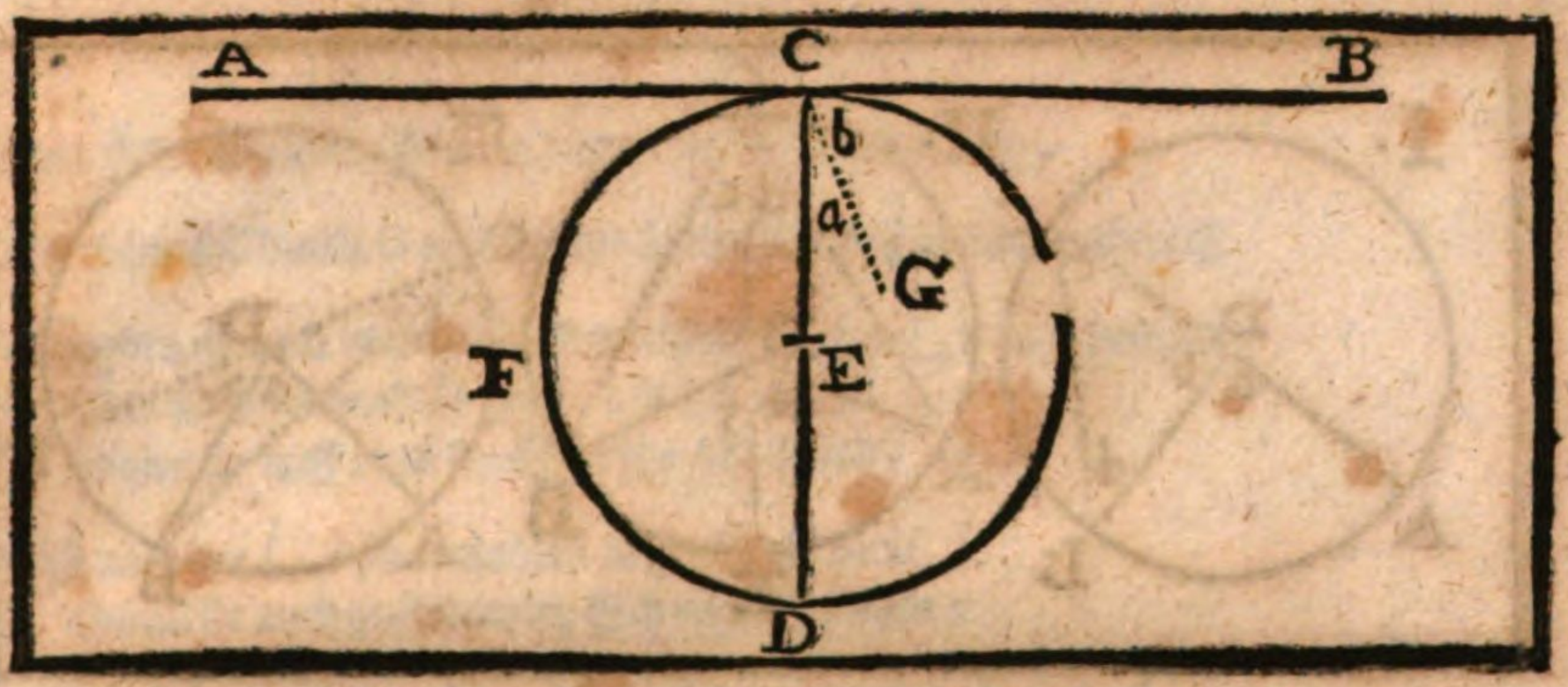
Wenn eine gerade Linie (AB) einen Zirckel (ECF) anrühret, und von dem Mittel-Punct (D) eine gerade Linie zu dem Anrührungs-Punct (C) gezogen wird: so stehet solche Linie (DC) Bleyrecht auff der anrührenden Linie (AB).

Beweiß.

Will mans nicht gestehen, sondern einwenden, daß eine andere, gleich wie DG, Bleyrecht auff der Linie AB stehe.

So folget, daß der ∠ a ein rechter seye. d. 10. def. 1.
Und deßwegen wird der ∠ b ⌝ seyn müssen, d. 17. Cor. 1. 1.
Und hingegen die Seiten DC ⌜ als die Seiten DG. d. 19 1.
Die Linie DC ist unterdessen ⌐, der Linie DH. d. 15. def. 1.
Dahero müsste DH (so nur ein Theil von DG) ⌜ seyn, als die gantze DG, welches ungereimt ist.
Deßwegen schliesset man, daß die Linie DC die Bleyrechte allein, und keine andere dieselbe seyn könte.

Welches zu beweisen ware.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (AB) einen Zirckel (DFC) anrühret, und man auß solchem Anrührungs-Punct (C) eine andere Linie Bleyrecht (als wie CED) ziehet, so wird in der gezogenen Bleyrechten Linie (CD) deß Zirckels Mittel-Punct seyn.

Beweiß.

Wer es nicht glauben wolte, sagend, der Mittel-Punct möchte wohl anderwertig, gleich wie in G, gesetzt werden.

So hange alsdann G, C zusammen.

Darauff folget, daß die Linie GC müsste auff der Linie AB ⊥ stehen.

Und der ∠ b. ein rechter seyn. 𝔇. 18. 3. 𝔇. 10. def. 1.

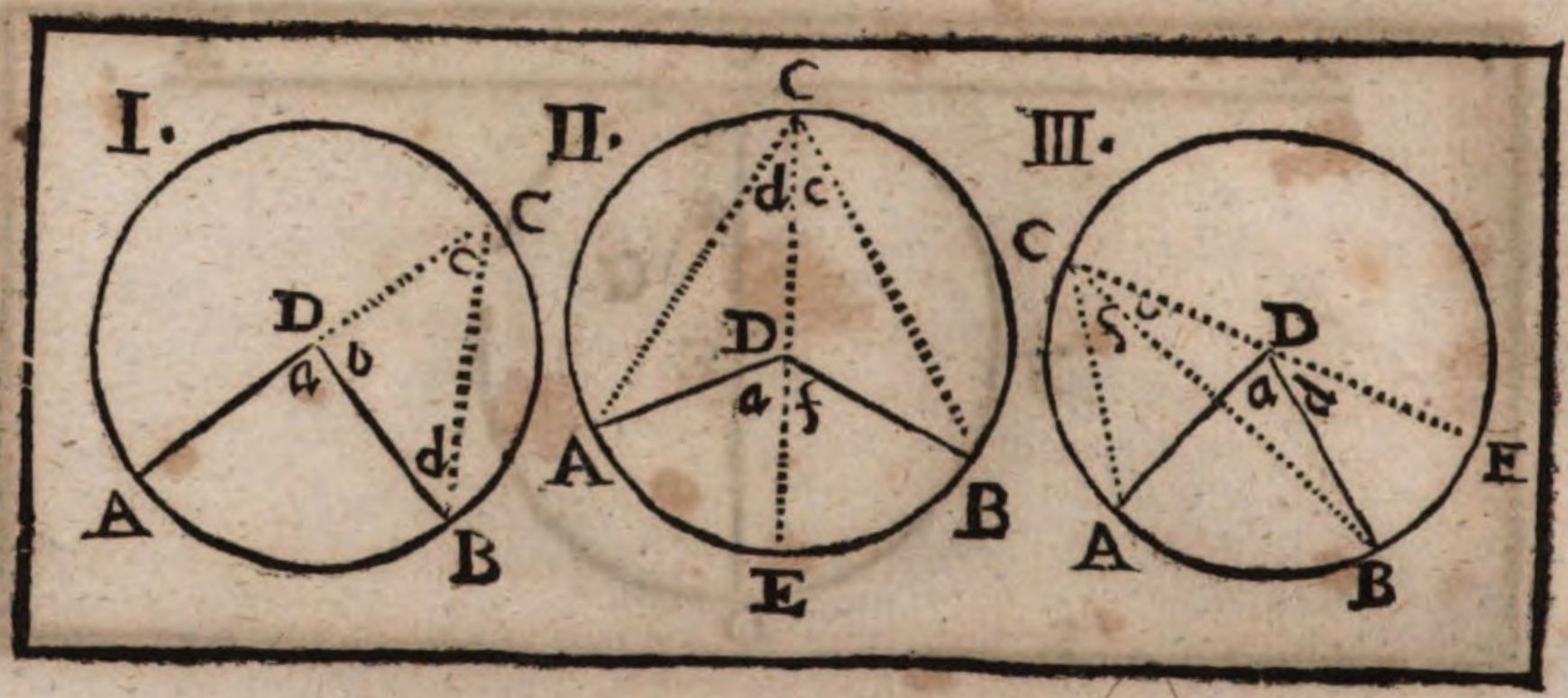
Die Linie CD aber, stehet durch die Vorgab ⊥ auff der Linie AB:

Deßwegen wird auch der ∠ b + a ein rechter seyn müssen. 𝔇. 10. def. 1.

Und dahero solte der ∠ b □ seyn, dem ∠ b + a, ein Theil seinem gantzen, so nicht möglich ist.

Dahero ist es für eine Warheit anzunehmen, daß in der ⊥ CD der Mittel-Punct seyn müsse, und nicht anderwertig.

Welches zu beweisen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

In einem Zirckel auff einerley Umbkreiß-Stück oder Bögen (gleich wie AB) ist der Mittel-Puncts-Winckel (a) noch einmahln so groß, als der Winckel (c), welcher auff bemeldtem Umbkreiß-Stück stehet.

Dreyerley Fähle begeben sich in dieser Vorgab.

Erstlich, wenn die Linien AD, und DC in einer geraden Linie AC fort stehen.

Beweiß I.

Dieweilen im △ ADB die Seiten CD verlängert ist in A.
so wird der ∠ a □ seyn, denen zween ∠ c, und d. [d. 32. I.
Die zween ∠ c, und d aber seynd einander □ wegen gleicher Seiten, [d. 15. def. I.
Darumb wird deß Mittel-Puncts ∠ a noch einmahlen [und 5. I.
so groß seyn, als der ∠ c.

II.

Wenn die gerade Linien, so den ∠ begreiffen, weder in einer geraden Linie fort stehen, noch sich einander durchschneiden, als wie AD. AC. BD. BC.

So ziehe durch die ∠ C, und D die gerade Linie CDE,
Demnach wird der ∠ a noch einmahlen so groß seyn, als der ∠ d.
auch der ∠ f. wird noch einmahln so groß seyn, als der ∠ c. [d. d. Vor.
Letzlich wird auch der ∠ a + f noch einmahln so groß seyn,
als der ∠ d + c. (dann klar ists, wann zwey Grösse, andern zweyen Grössen, so zweymal grösser seynd, eine jede der Seinen, hinzu gesetzt werden, daß auch die Summa der einen Grösse zweymahlen grösser seye, als die Summa der andern.

III.

Wann sich die Linien AD, BC einander durchschneiden,

So ziehe auß C durch D eine gerade Linie CDE biß in den Umbkreiß.

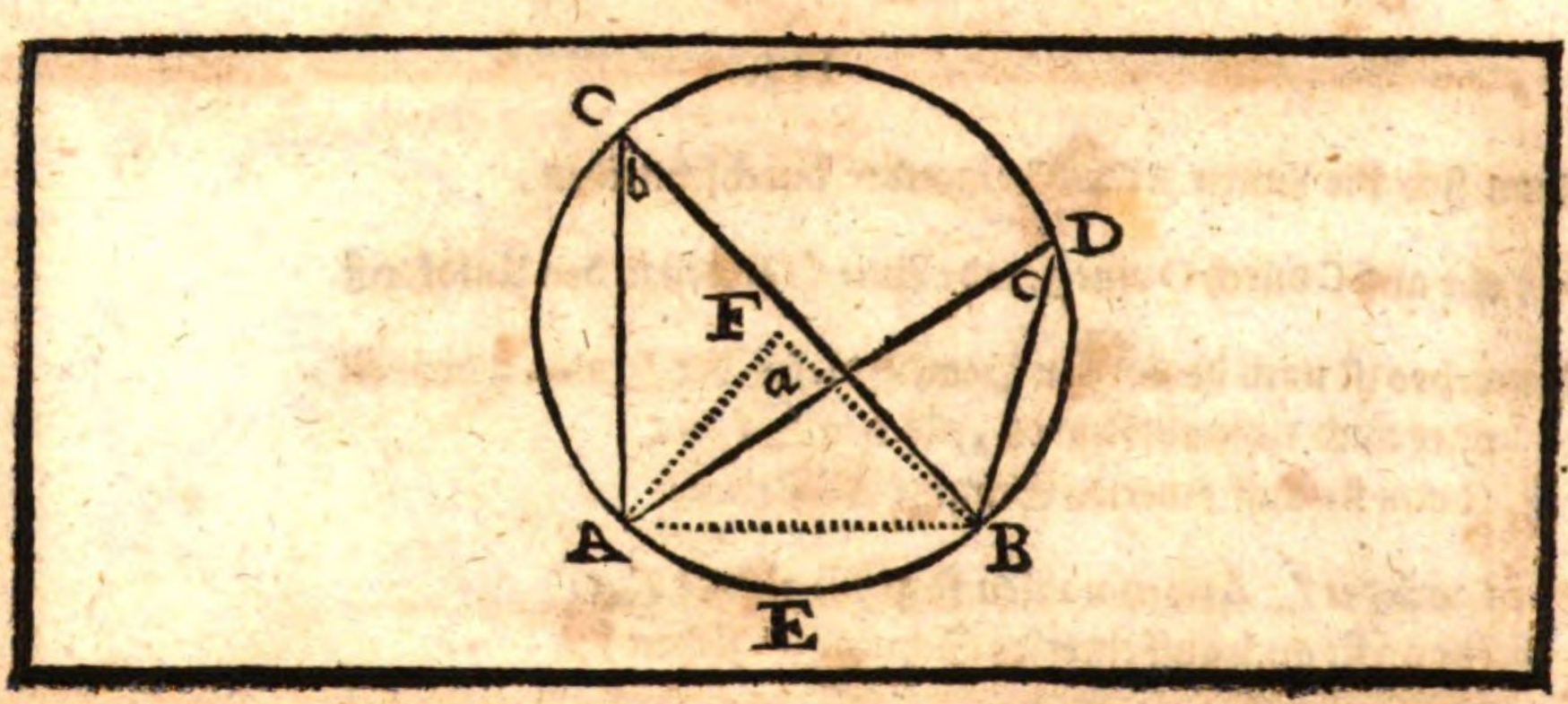
Nunmehro ist nach dem ersten Beweiß dieser, der ∠ a + d doppelt,
oder noch einmahl so groß, als der ∠ f + c.
(dann sie auff einerley Schnitze AE stehen)

So ist auch der ∠ d zweymahlen so groß, als der ∠ c.
(dann sie auch auff einerley Schnitze BE stehen)

Wann man nun diese ∠ d, und c auß ihren gantzen ∠ a + d,
und f + c abziehet,

So ist klar, daß auch der überbliebene ∠ a noch einmahln
so groß, oder doppelt seyn werde, deß überbliebenen ∠ f. d. 15. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

In einem Zirckel (ABC) seynd die Winckel (b und c), welche in einerley Schnitze (ACDB) stehen, einander gleich.

Zubereitung.

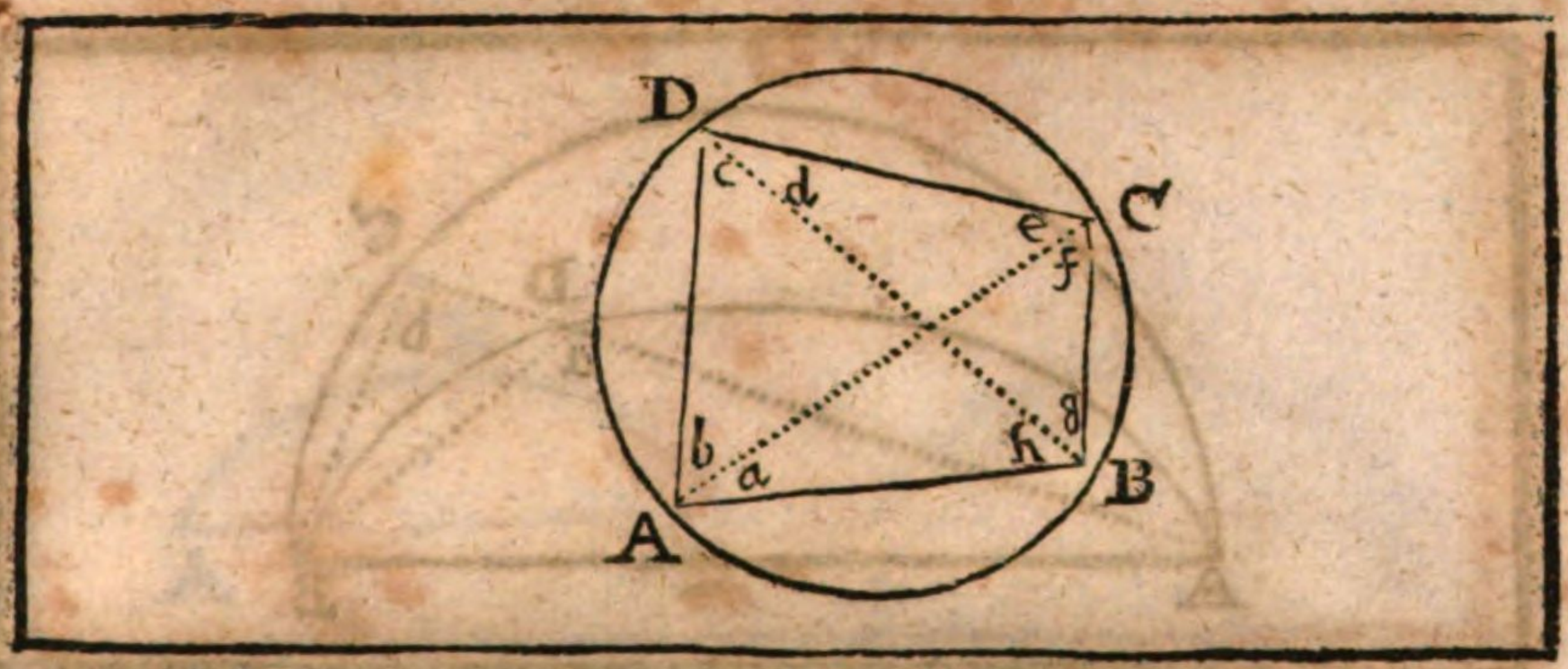
Ziehe auß dem Mittel-Punct F, die Puncten A, B mit geraden Linien zusammen.

Beweiß.

Der ∠ a ist so wohl doppelt deß ∠ b, als deß ∠ c, d. 20. 3.

Darumb wird der ∠ b ☐ seyn dem ∠ c. d. 7. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine vierseitige geradtlinische Figur (ABCD) in einem Zirckel eingeschrieben wird: so seynd die zween Winckeln (c + d und h + g, oder e + f, und b + a), welche über Eck einander über stehen, zweyen rechten Winckeln gleich.

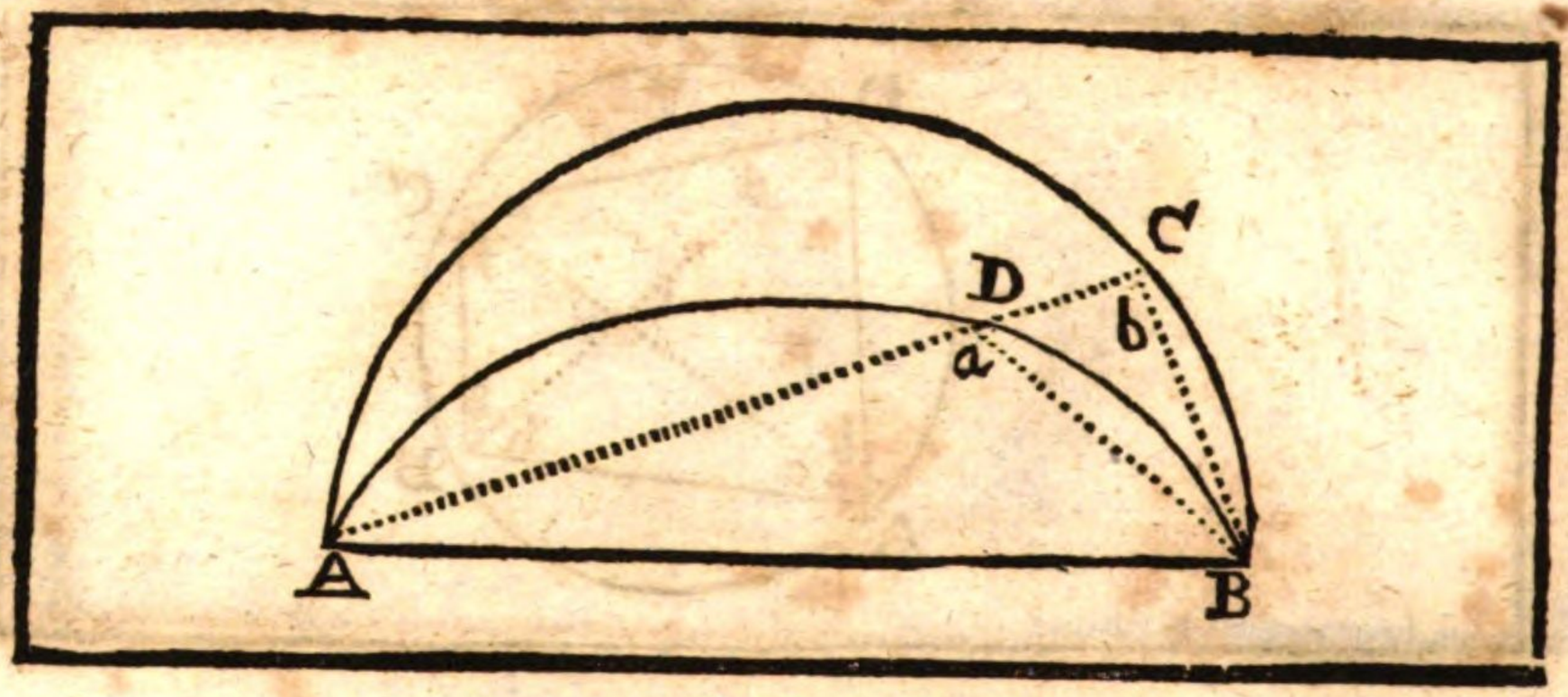
Zubereitung.

Ziehe AC, DB zusammen.

Beweiß.

Weilen die ∠ ADB, ACB in einerley Schnitze ADCB
und auch die ∠ BDC, und CAB in einerley Schnitze BADC
stehen,
So ist der ∠ c ⊓ dem ∠ f: und der ∠ d ist ⊓, dem ∠ a. d. 21. 3.
also wird der gantze ∠ c + d ⊓ seyn denen zween ∠ f und a,
die zwey ∠ f, und a aber sambt dem dritten ∠ h + g
seynd ⊓, zweyen rechten Winckeln. d. 32. 1.
Folget dann, daß auch der ∠ c + d sambt dem ∠ h + g ⊓
seye, zween rechten Winckeln. u. s. f.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIII. Vorgab.

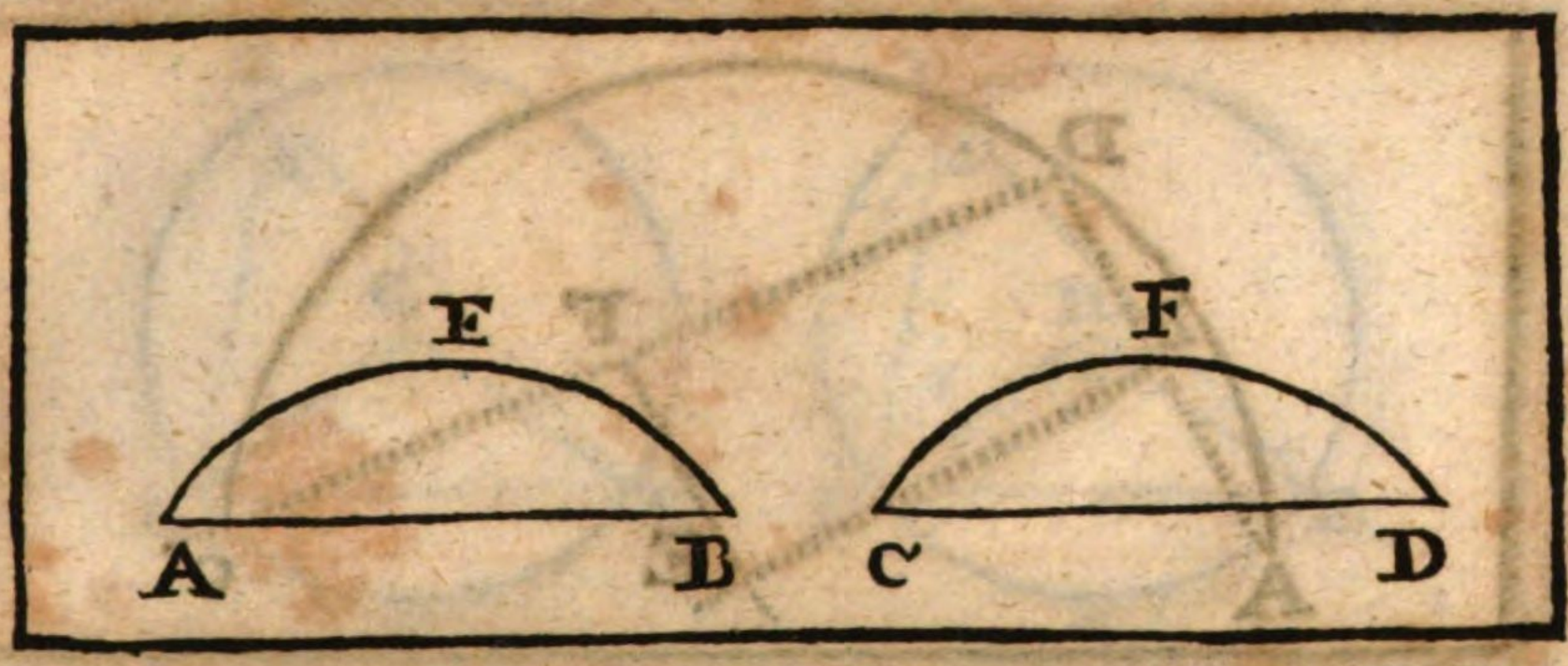
Betrachtung.

Zwey gleichformige und zugleich ungleiche Schnitze (ADB ACB) kan man nicht auff einer geraden Linie (AB) und auff einerley Seiten stöhlen.

Beweiß.

Seye ADB der kleinere, ACB aber der grössere gleichförmige Schnitz.
Wenn es nun möglich ist, so stöhle man beyde auff die gerade Linie AB, und ziehe auß A nach Gefallen die gerade Linie AC, welche den Schnitz ADB in D durchschneide, und den Schnitz ACB in C berühre.
Hange D, B, und C, B zusammen.
Weilen nun die zwey Schnitze einander gleichförmig seynd, d. d. Vorg.
So wird der ∠ a ⌐ seyn müssen dem ∠ b. d. 10. def. 3.
Welches aber ungereimt ist, daß der aussere ∠ a ⌐ seye, dem innern ∠ b wider die d. 32. 1.
Dahero können nicht zwey gleichförmige, und zugleich ungleiche Schnitze auff eine gerade Linie AB, und auff einerley Seiten gestöhlt werden.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIV. Vorgab.

Betrachtung.

Auff gleichen geraden Linien (AB, CD) seynd die gleichförmige Schnitze (AEB, CFD) einander gleich.

Beweiß.

Dieweilen AB [] gesetzt wird, der Linie CD: b. d. Vorg.

Wenn man sie auff einander legt, so werden sie sich durchauß auff einander schicken, und keine die andere übertreffen.

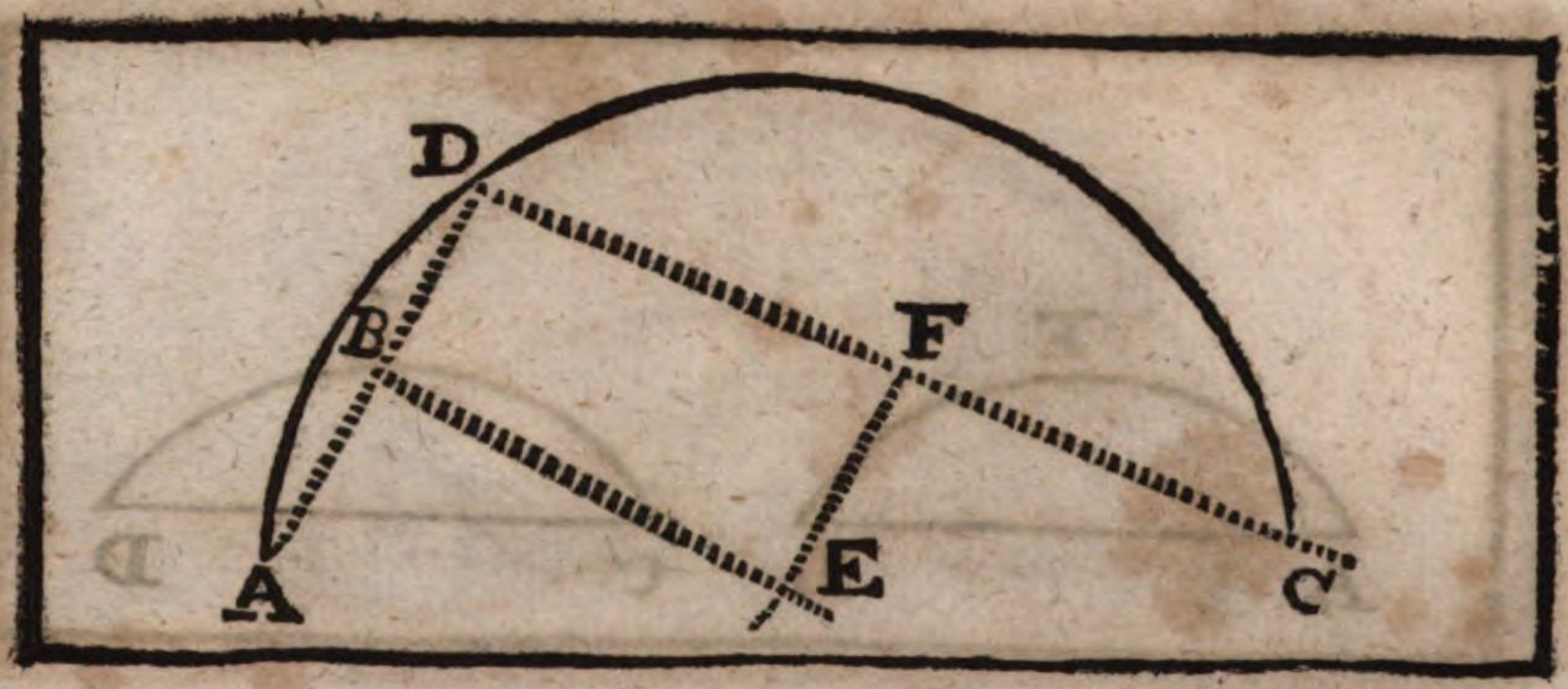
Darumb wird auch uothwendig der Schnitz AEB auff den Schnitz CFD einfallen müssen, und durchauß einander gleich seyn. b. 8. ax. l.

Sonsten, wann sie nicht eintreffeten, müste entweders der eine, oder der andere Schnitz hinauß, oder hinein in den ersten oder andern fallen, und dardurch ungleich einander werden;

Zwey gleichförmige, und zugleich ungleiche Schnitze aber können nicht auff einerley gerade Linien gestellt werden.

Dahero sie nothwendig einander gleich seyn müssen.

Welches zu beweisen ware.



Die XXV. Vorgab.

Handgriff.

Einem vorgegebenen Schnitz (ADC) seinen gehörigen gantzen Zirckel-Kreiß zu erfüllen.

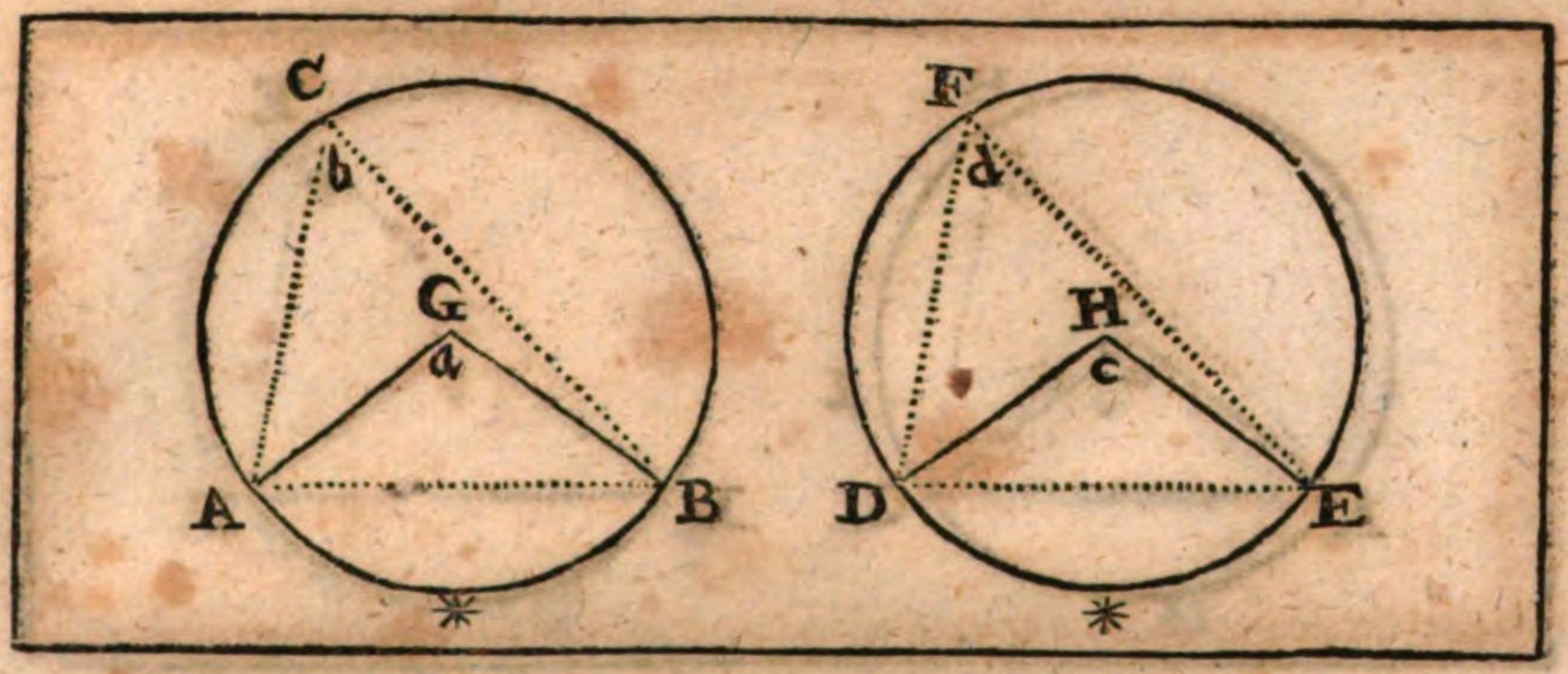
Handgriff.

Mercke in dem gegebenen Schnitz drey Puncten A, D, C.
Ziehe solche nach Gefallen zusammen mit geraden Linien AD, DC.
Zertheile die Linien AD, DC in mitten B, und F.
mit denen ⊥ BE, FE, welche sich durchschneiden werden in dem Punct E. [d. 10. 1. d. 11. 1.]
Der Punct E hernach wird der Mittel-Punct seyn,
Worauß mit der Weite EC, oder EA der übrige Zirckel-Kreiß kan erfüllet werden.

Beweiß.

Der Mittel-Punct ist in denen zwey Linien BE, FE. [d. 1. Cor. 1, 3.]
Darumb wird solcher nothwendig in dem Durchschnitz-Punct E seyn.
Dahero kan auß solchem Mittel-Punct E der Schnitz ADC zu einem gantzen Zirckel erfüllet werden.

Welches zu machen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (A *BC, D *EF) stehen die gleichen Winckeln (a und c, oder b und d) auff gleichen Umbkreiß-Stücke, oder Schnitze (A *B, D *E). die Winckeln hernach mögen so wohl bey denen Mittel-Puncten (G, H), oder in denen Umbkreissen stehen (gleich wie in C, E.)

Zubereitung.

Ziehe A, B, und D, E mit geraden Linien zusammen.

Beweiß.

In dem △ AGB seynt die zwo Seiten GA, GB ⊓, denen zwo Seiten HD, HE in dem △ DHE, und der ∠ a ist ⊓, dem ∠ c. — d. d. Vorg. u. 15. def. 1. d. d. Vor.

Darumb wird auch die Basis AB ⊓ seyn, der Basis DE. — d. 4. 1.

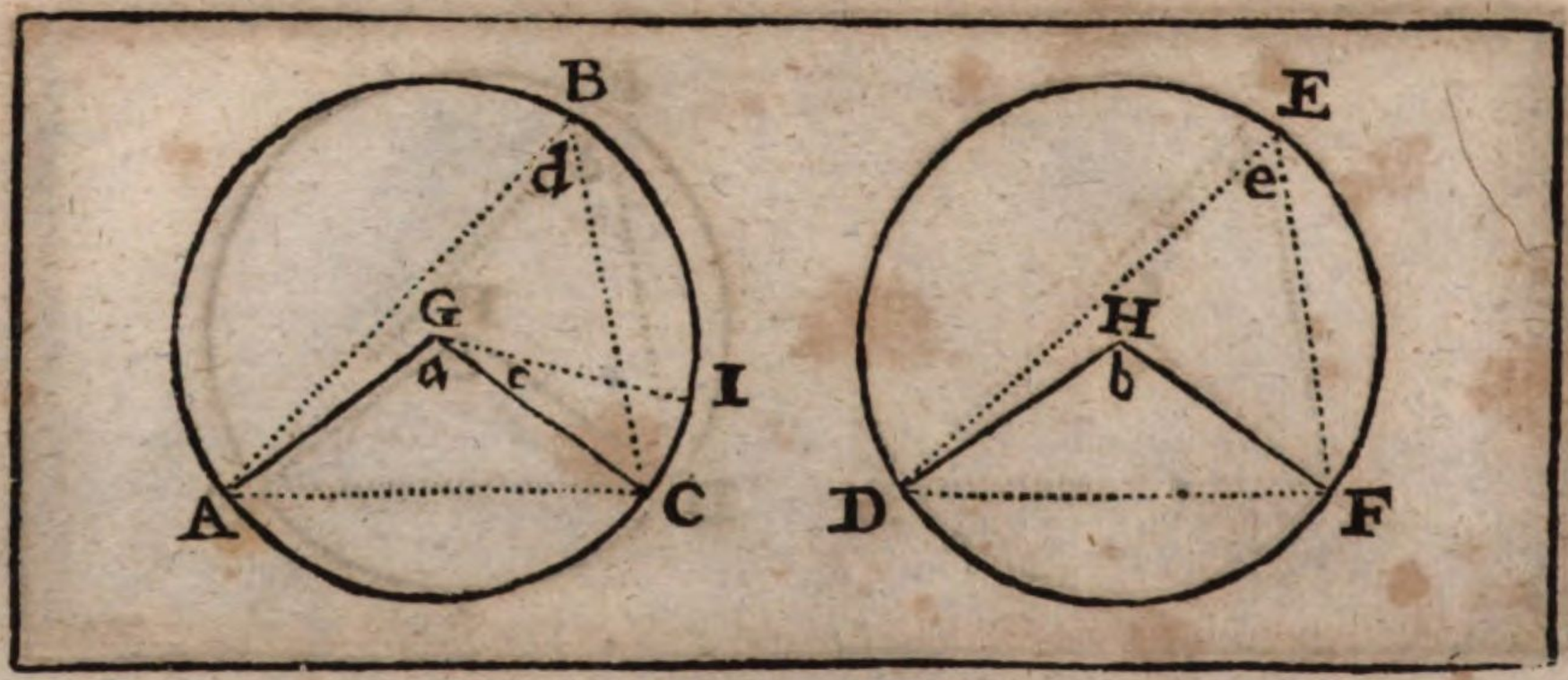
Unterdessen seynd die ∠ b, und d geradt die Helffte deren zweyen gleichen ∠ a, und c — d. 20. 3.

Folget, daß auch der ∠ b ⊓ seye, dem ∠ d. — d. 7. ax. 1.

Dahero wird der Schnitz ACB gleichförmig seyn, dem Schnitz DEF, und wegen der gleichen Linien AB, und DE werden die Schnitze ACB, und DEF. auch einander gleich seyn. — d. 10. def. 3. d. 24. 3.

Wann man nun von denen gleichen Zirckeln ACB, und DEF, die gleiche Schnitze ACB, und DFE darvon ziehet; So wird überbleiben das Umbkreiß-Stuck A *B ⊓ dem Umbkreiß-Stücke D* E.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (ABC, DEF) unterspannen die gleiche Umbkreiß-Stücke (AC, DF) gleiche Winckeln, es mögen die Winckeln hernach, entweder bey denen Mittel-Puncten (G, H) oder in denen Umbkreissen (B, E) stehen.

Beweiß.

Gesetzt, man sagte, daß die Winckeln einander ungleich wären, nemlich, daß der Mittel-Puncts-∠ a ⌝ wäre, als der Mittel-Puncts-∠ b.

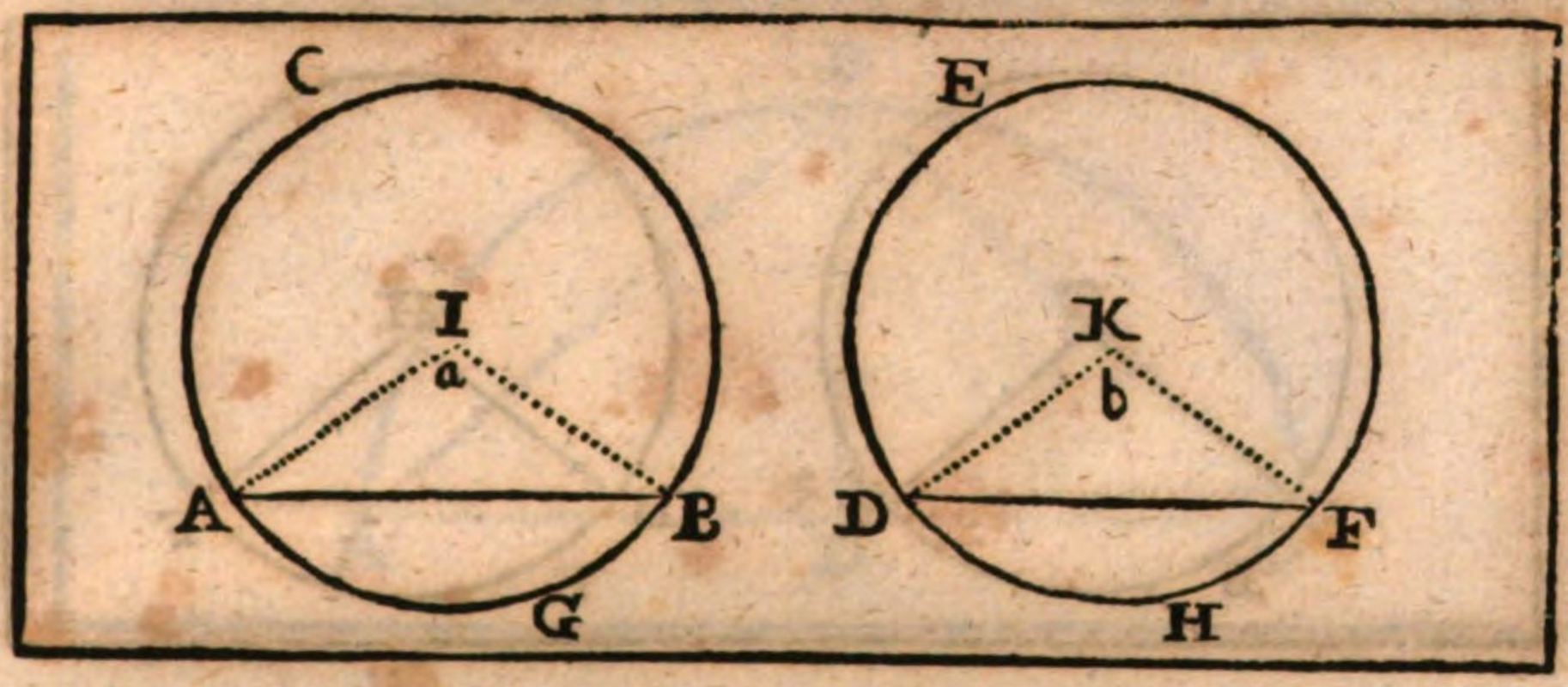
So mache (wann es seyn kan) den ∠ a + c ⌝, dem ∠ b, und ziehe die Linie GI.

Darauff folget, daß das Umbkreiß-Stück ACI ⌝ wäre, dem Umbkreiß-Stück DF. d. 26. 3.
das Umbkreiß-Stück DF aber ist ⌝ dem Umbkreiß-Stücke AC gegeben worden. d. d. Vorg.

Darumb solte auch das Umbkreiß-Stück AC ⌝ seyn, dem Umbkreiß-Stücke ACI; Ein Theil seinem gantzen, so nicht seyn kan.

Dahero ist zu sagen, daß der ∠ a auch ⌝ seye, dem ∠ b. { d. 7. ax.
Und folgends der ∠ d ⌝ dem ∠ e. { und 20. 3.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (ACB, DEF) schneiden die gleiche gerade Linien (AB, DF) gleiche Umbkreiß-Stücke ab, also, daß das eine grössere Stück (ACB) gleich seye dem andern grössern (DEF), und das eine kleinere (AGB) dem andern kleinern (DHF).

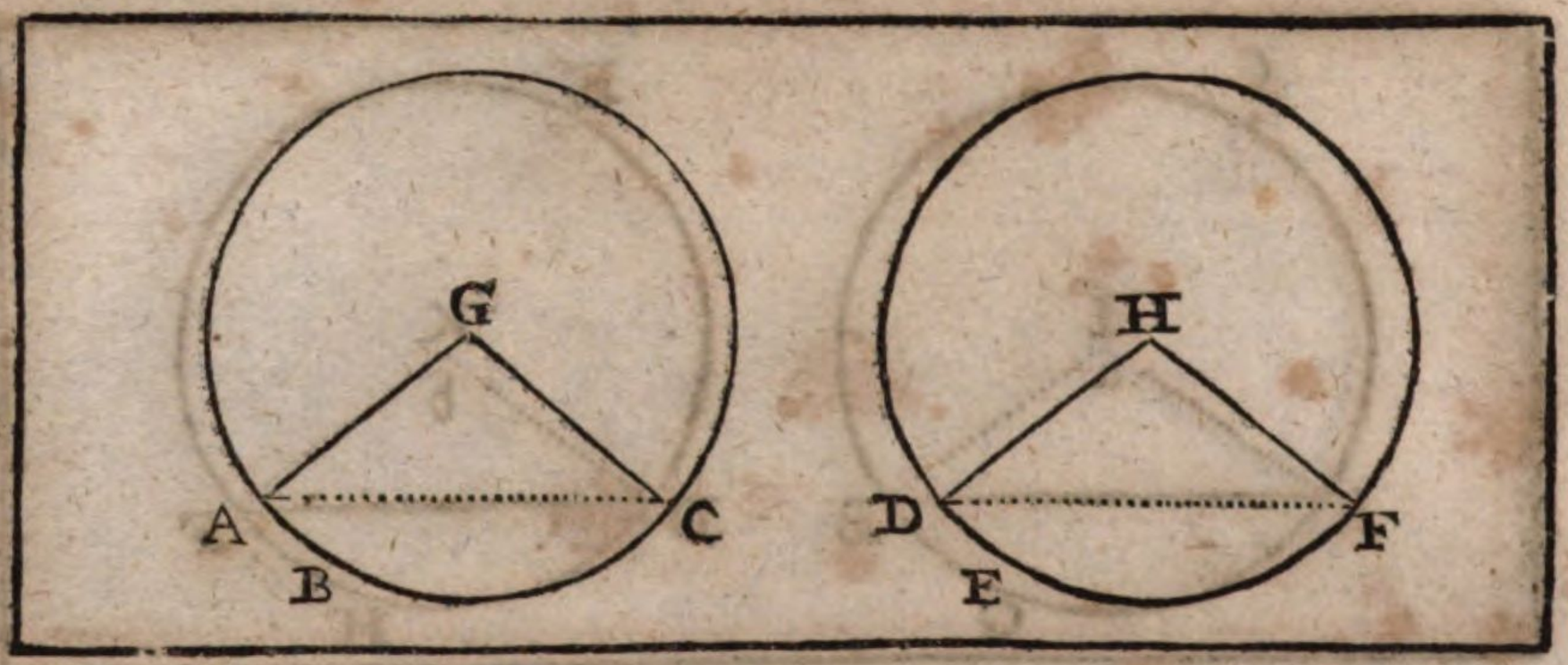
Zubereitung.

Ziehe auß denen Mittel-Puncten I. und K die Puncte A, I; I, B; und D, K; K, F zusammen.

Beweiß.

In dem △ AIB seynd die drey Seiten ⊓, denen drey Seiten deß △ DKF.	d. d. Vorg. u. 15. def. 1.
Darumb wird der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ b.	d. 8. 1.
Und folgends das kleinere Umbkreiß-Stück AGB wird ⊓ seyn, dem kleinern Umbkreiß-Stück DHF.	d. 26. 3.
Wenn man nun diese gleiche Umbkreiß-Stücke von denen gleichen Zirckeln abziehet: So wird überbleiben auch das grössere Umbkreiß-Stück ACB ⊓, dem grössern Umbkreiß-Stück DEF.	d. 3. ax.

Welches zu machen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (ABC, DEF) werden von gleichen Umbkreiß-Stücken (als wie ABC, DEF) gleich gerade Linien (AC, DF) unterspannet.

Zubereitung.

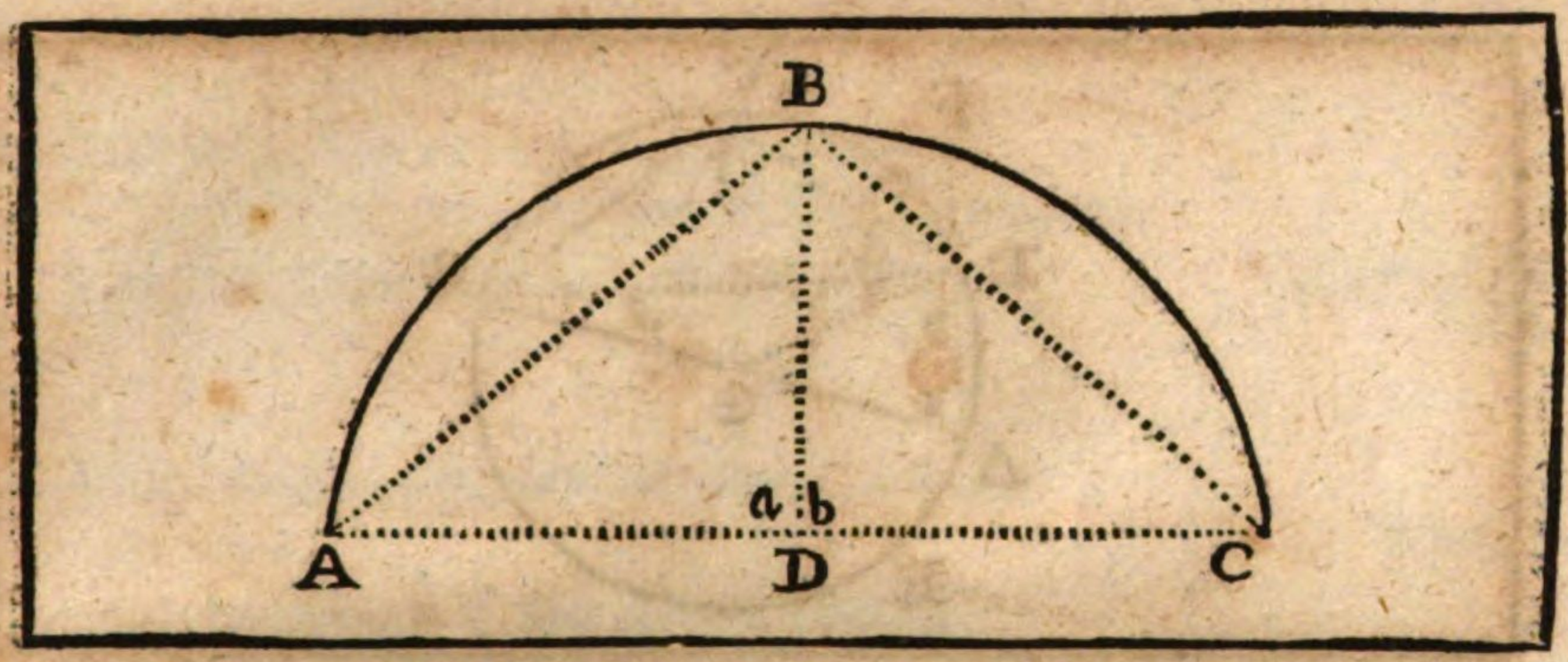
Hange auß denen Mittel-Puncten G, und H
die Puncte A, G; G, C; und D, H; H, F zusammen.

Beweiß.

In dem △ AGC seynd die zwo Seiten AG, GC ⌐,
denen zwo Seiten DH, HF in dem △ DHF, d. 15. def. I.
und der ∠ G ⌐ dem ∠ H. d. 27. 3.

Dahero wird auch die Basis AC ⌐ seyn der Basis DF. d. 4. I.

Welches zu beweisen ware.



Die XXX. Vorgab.

Handgriff.

Ein Stück (ABC) von einem gegebenen Umbkreiß in zwey gleiche Theil (in B) zu zertheilen.

Handgriff.

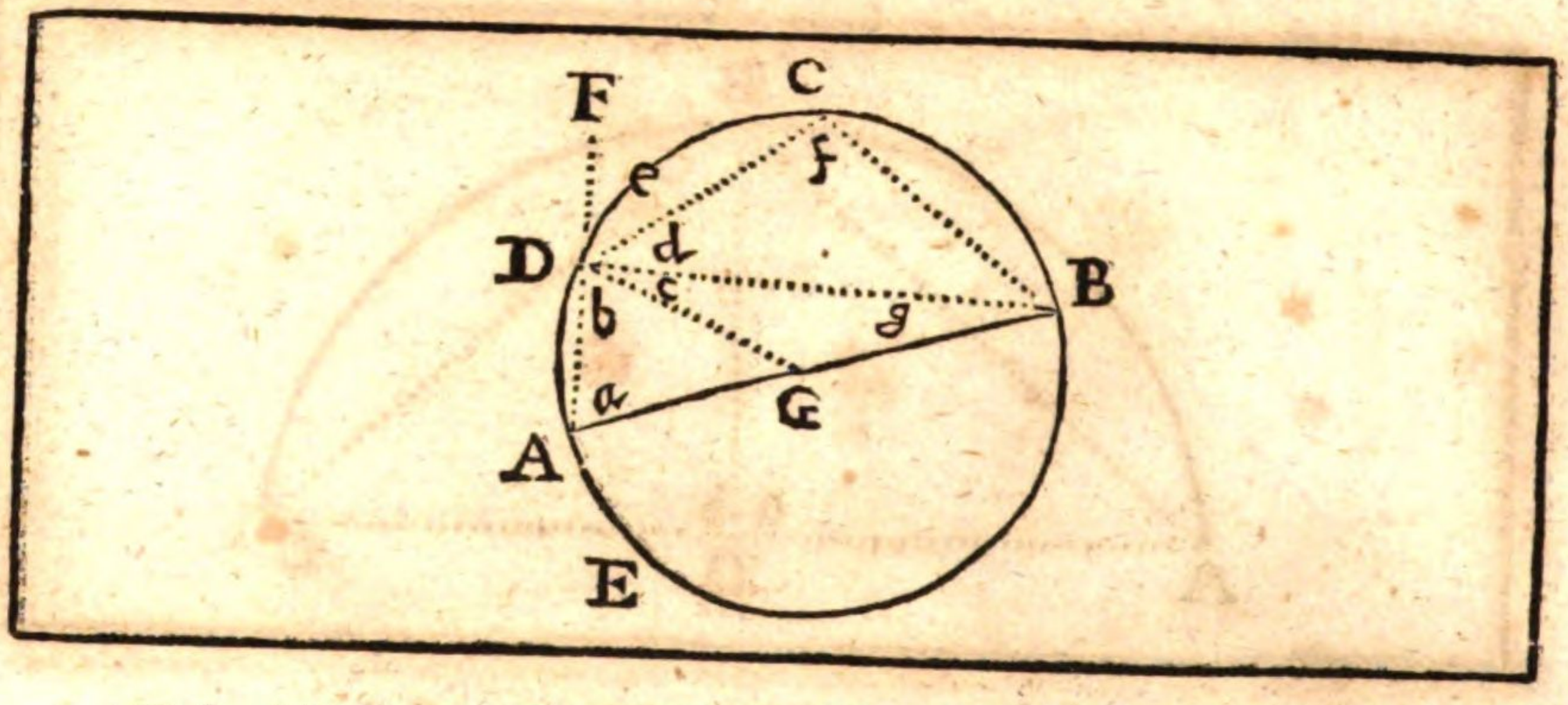
Ziehe die äusserste Ende deß Stücks ABC
mit einer geraden Linie AC zusammen.
Zertheile AC in mitten D entzwey. d. 10. 1.
Auß D erhöhe die ⊥ DB biß an dem Umkreiß, d. 11. 1.
So wird der Umbkreiß ABC mitten entzwey in
dem Punct B zertheilet worden seyn.

Zubereitung.

Hange A, B; und C, B zusammen.

Beweiß.

In dem △ ADB seynd die zwo Seiten AD, und BD ⊓
denen zwo Seiten CD, und DB in △ CDB,
und der ∠ a ⊓ dem ∠ b. d. 15. def. 1.
Dahero wird auch die Basis AB ⊓ seyn der Basis BC; d. d. Hand.
Und folgends wird das Umbkreiß-Stück AB ⊓ seyn d. 4. 1.
dem Umbkreiß-Stück CB, d. 28. 3.
Welches zu machen ware.



Die XXXI. Vorgab. Betrachtung.

In einem Zirckel (ADCBE) ist jener Winckel (b + c), welcher in halben Umbkreiß (ADCB) stehet, ein Rechter.

2. Welcher aber in einem grössern Schnitz (DAEB), als wohl ein halber Zirckel ist, stehet, derselbe Winckel (a) ist kleiner, als ein Rechter.

3. Der aber in einem kleinern Schnitz (DCB), als ein halber Zirckel ist, stehet, solcher Winckel (f) ist grösser, als ein Rechter.

4. Und über das ist der Winckel (BDA), welchen man auff der geraden Linie (DB), und mit dem Umbkreiß-Stücke (DAEB) deß grössern Schnitz machet, grösser als ein rechter.

5. Der Winckel aber deß kleinern Schnitz (nemlich CDB), welchen man auff der geraden Linie (BD) und mit dem Umbkreiß-Stück (BDC) deß kleinern Schnitz machet, wird kleiner seyn, als ein rechter Winckel.

Zubereitung.

Auß dem Mittel-Punct G ziehe die gerade Linien GD und verlängere AD in F hinauß.
Seye AGB der Diameter des Zirckels ADCBE.

Beweiß I.

In dem △ AGD ist der ∠ b ⊓ dem ∠ a. [d. 15. def. 1.
Item in dem △ DGB ist der ∠ c ⊓ dem ∠ g. [d. 5. 1.
Darumb wird der gantze ∠ b + c ⊓ seyn, denen ∠ a und g. d. 5. 1.
Unterdessen ist auch der äussere ∠ e + d ⊓,
beyden innern ∠ a, und g sammentlich d. 32. 1.
Folget, daß auch der ∠ b + c ⊓ seye dem ∠ e + d. d. 1. ax
Und deßwegen seynd diese beyde ∠ b + c, und d + e Rechte. d. 10. def. 1.

II.

Dieweilen der ∠ b + c ein rechter ∠ ist, so folget,
Daß der ∠ a (so in dem grössern Schnitz, als der halbe Zirckel ist, stehet) kleiner seye, als ein rechter. d. Cor. 1. 17. 1

III.

Nun in der vierseitigen Figur ADCB ist der ∠ a ⌐, als ein rechter. d. d. Vor.
Die zween überstehende ∠ aber a, und f solten ⌐ seyn, zween rechten Winckeln. d. 22. 3.
Darumb wird nothwendig der ∠ f ⌐, als ein rechter ∠ seyn. d. 5. ax.

IV.

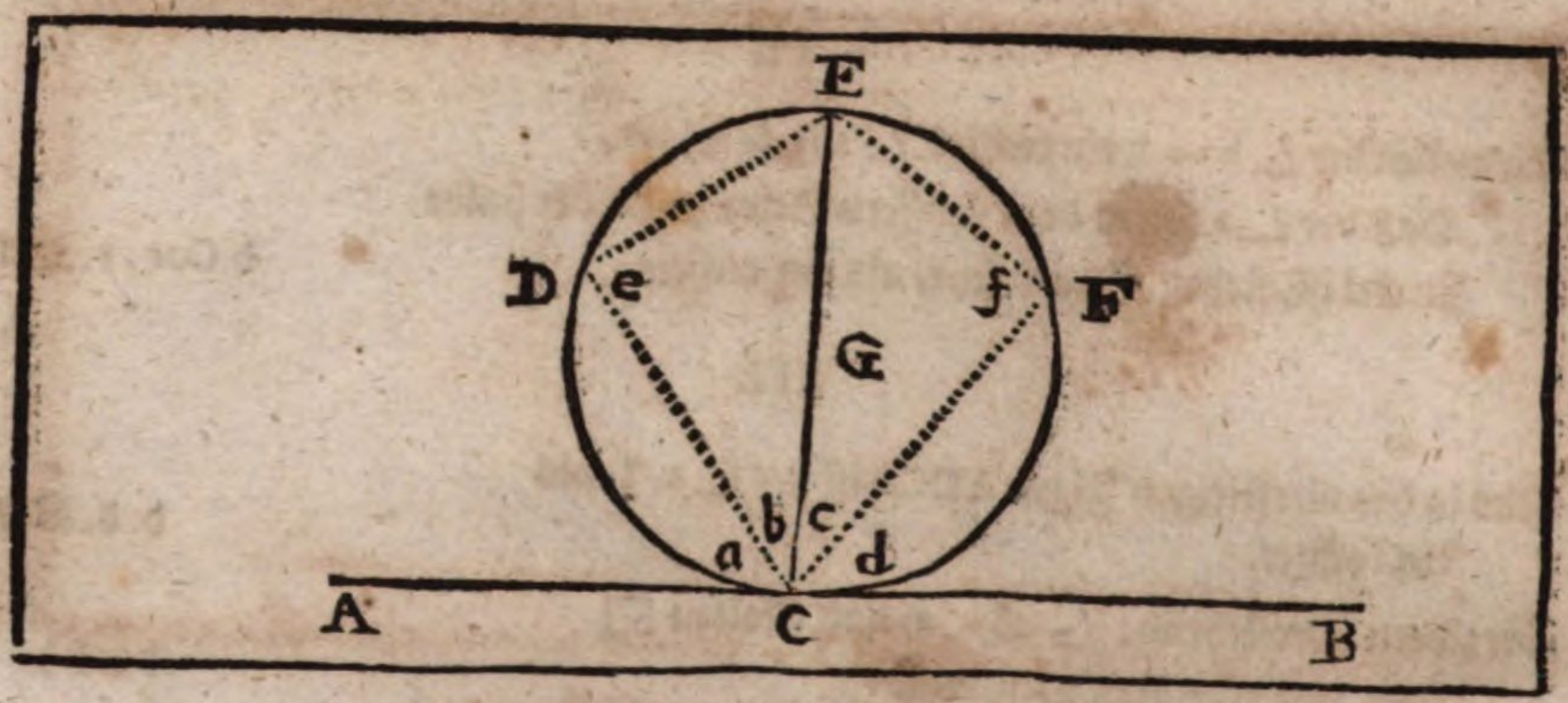
Weiters ist klar, daß derjenige ∠, (welcher auff der geraden DB und mit dem Umbkreiß deß grössern Schnitz DAEB gemacht wird) grösser seye, als der rechte ∠ b + c, so von denen geraden BD, und AD ist gemacht worden: die Ursach ist begreifflich, weilen zu diesen noch das hohle Umbkreiß-Stück DA darzu kommen ist.

V.

Also ist der eine ∠ (welcher auff der geraden BD, und mit dem Umbkreiß deß kleinern Schnitz DCB beschlossen wird) kleiner, als der rechte ∠ e + d, welcher von denen zwo geraden BD, DF ist gemacht worden: die Ursach ist sichtbarlich, indeme der gebogene Umbkreiß den rechten ∠ e + d nicht gar außfüllet.

Folge deß ersten Theils.

In einem jeden △ ist ein solcher Winckel, welcher ⌐ ist denen zweyen übrigen Winckeln, ein rechter Winckel.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (AB) einen Zirckel (CDEFG) anrühret, und von dem Anrührungs-Punct (C) eine andere gerade Linie (CE), welche den Zirckel durchschneidet (als wie in E) gezogen wird: so seynd die Winckeln, welche sothane Linie mit der anrührenden machet, gleich denen Winckeln, so auff der andern Seiten in dem Zirckel-Schnitz stehen, (das ist, der Winckel c + d ist gleich dem Winckel e, und der Winckel a + b ist gleich dem Winckel f.)

Zwey Fähle können sich hierinnen begeben.

I.

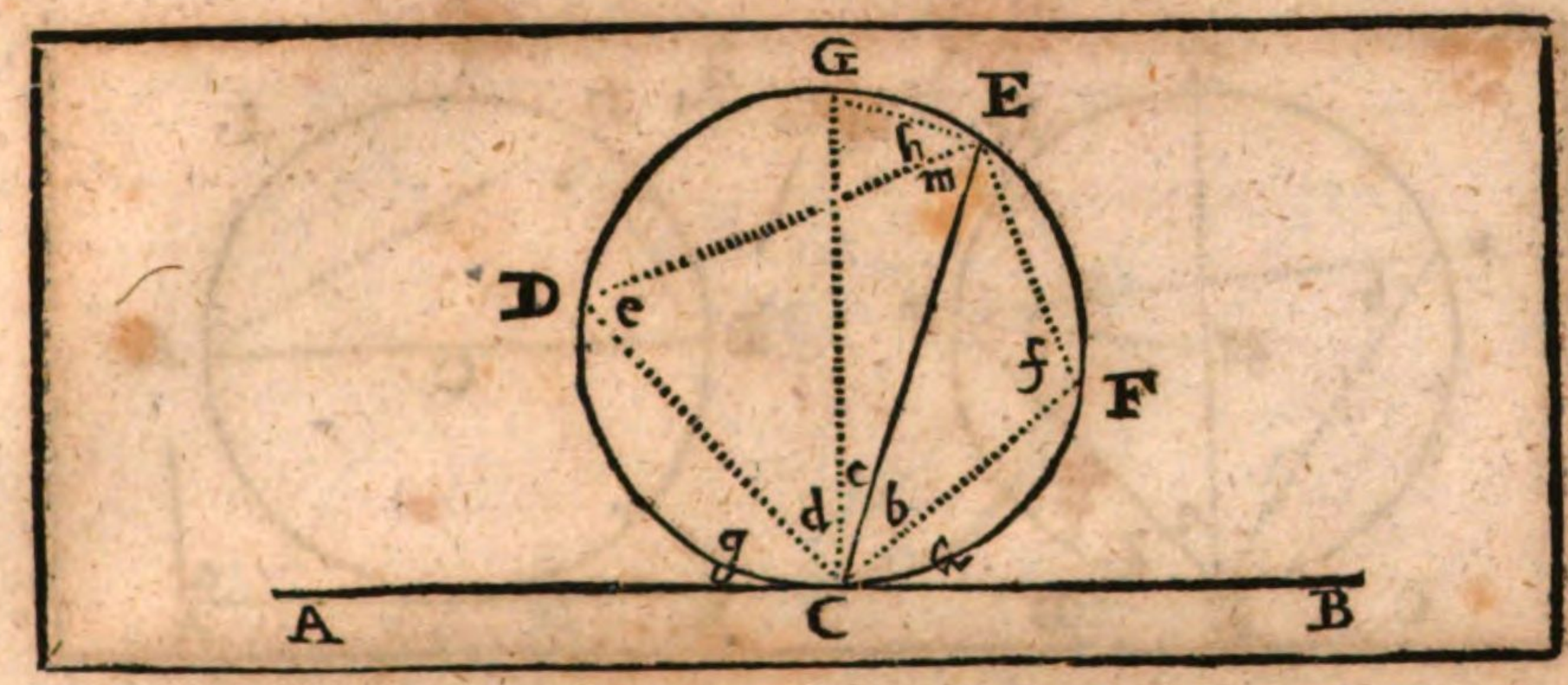
Wenn die Linie CE durch den Mittel-Punct G gehet.

Beweiß.

So ist klar, daß die ∠ e, und f, so in dem halben Umbkreiß stehen, beyde rechte seynd. 3. 31. 3.
die ∠ a + b, und c + d seynd auch beyde rechte. 3. 18. 3.
Darumb wird der ∠ e □ seyn dem ∠ c + d.
oder der ∠ f wird □ seyn dem ∠ a + b.

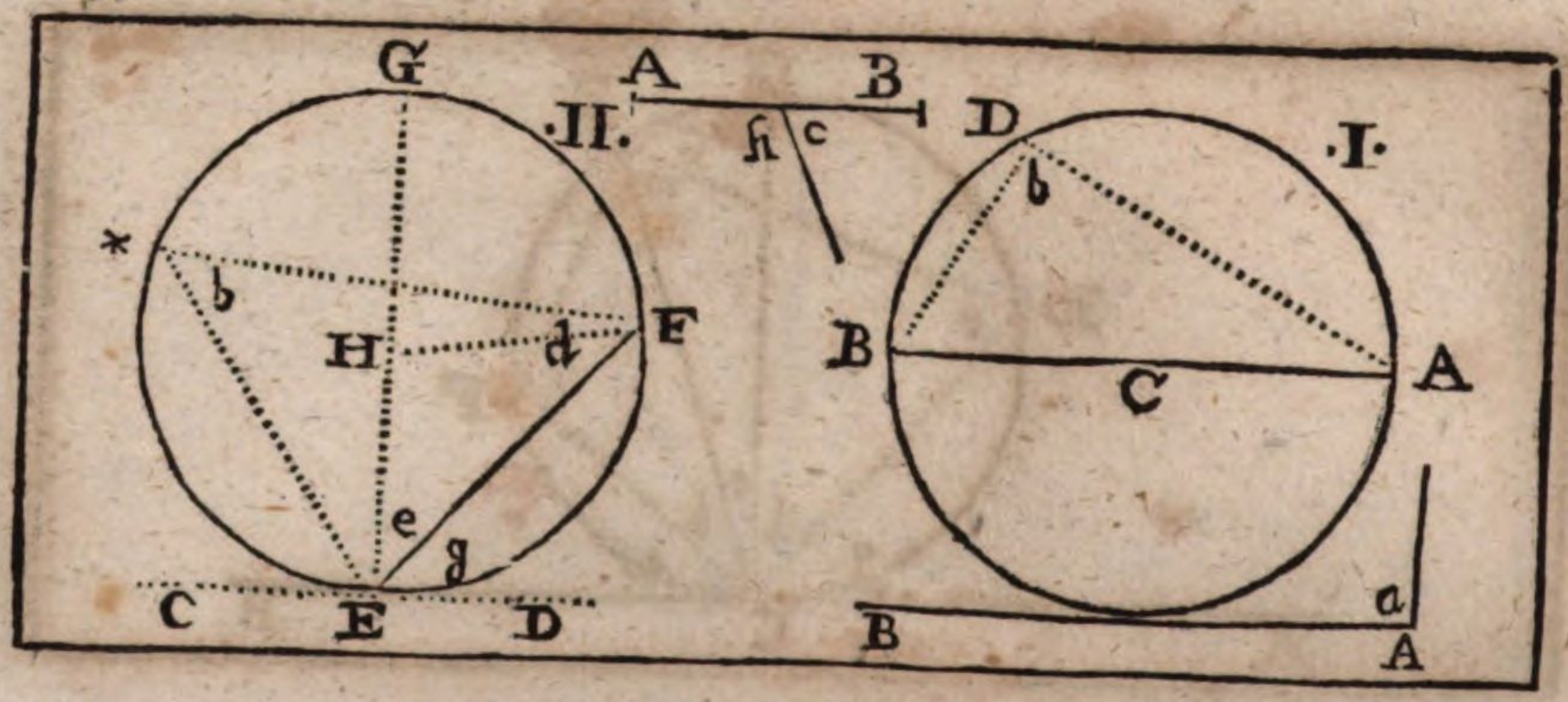
II.

Wenn aber die Linie CE nicht durch den Mittel-Punct G gehet, sondern auff eine andere Seiten hinauß, als wie in E.



Alsdann erhöhe auß C die ⊥ CGJ und hange GE zusammen.
Mache hernachmal in denen zweyen Schnitzen CDGE, und CEE
nach Gefallen die ∠ e, und f.
Weilen in dem △ CGE der ∠ h + m ein rechter ist, d. 31. 3.
so seynd auch die übrige zween ∠ G und c □, einem rechten. d. 32. Cor. 1.
Unterdessen ist der ∠ c + b + a auch □ einem rechten. d. d. Hand.
Dahero werden die zween ∠ G + c □ seyn, dem ∠ c + b + a.
Wenn man nun beyderseits den gemeinen ∠ c darvon abziehet,
So wird überbleiben der ∠ G □, dem ∠ b + a.
Der ∠ G aber ist □ dem ∠ a, dann sie in einerley Schnitze
CDGE stehen.) d. 21. 3.
Darumb wird der ∠ e □ seyn, dem ∠ b + a.
Feruers, meilen GEFC, als eine vierseitige Figur,
in dem Zirckel eingeschrieben ist,
So werden die zween gegen über stehende ∠ G, und f □,
seyn zween rechten ∠. d. 22. 3.
Die zween ∠ c + b + a, und d + g aber, seynd auch □ zween
rechten ∠. d. 13. 1.
Dahero seynd die ∠ G und f □, denen zween ∠ c + b + a,
und d + g.
Der ∠ G aber ist schon bewiesen worden □, dem ∠ b + a. d. d. Vorg.
Wenn man beyderseits die gleiche ∠ G, und b + a abziehet,
So wird überbleiben der ∠ f □ dem ∠ c + d + g.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXIII. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie (AB) ein Zirckel-Schnitz zu beschreiben, in welchem ein Winckel, der einem andern vorgegebenen geradtlinischen (a) gleich seye, stehen kan.

Drey Fähle hat diese Vorgab.

Fig. I. Handgriff.

Wenn der vorgegebene ∠ a ein rechter Winckel ist.
So zertheile nur die gleichgenommene gerade Linie AB in Mitten C. d. 10. I.
Schreibe hernach mit der Weite AC, oder BC einen halben Zirckel-Kreiß.
Mache darein an den halben Umbkereiß BDA nach Gefallen den ∠ b, so ist es gethan.

Beweiß.

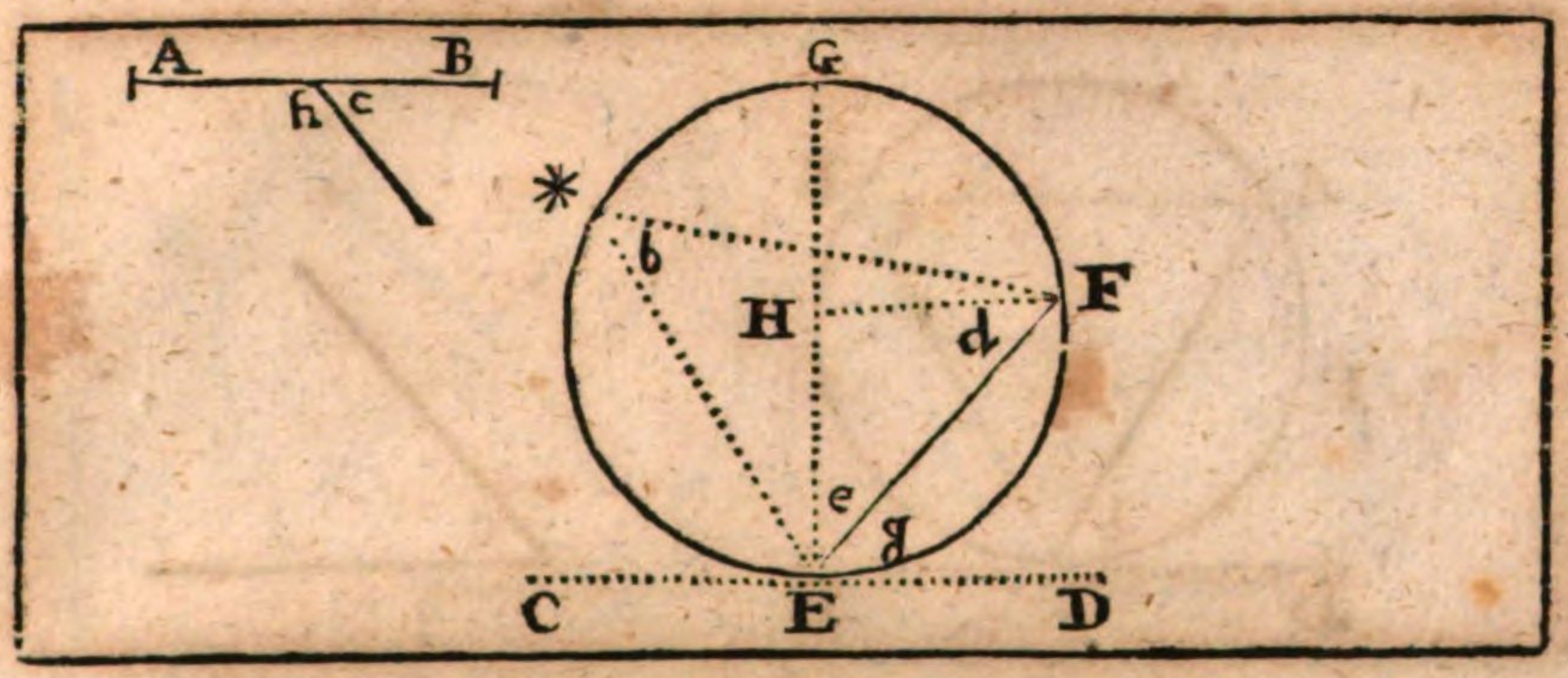
Dann weilen der ∠ b in halbem Circkel-Kreiß stehet. d. d. Hand
So ist der ∠ b ein rechter, und dahero ⊓ dem ∠ a. d. 31. 3.

Fig. II.

Wenn der vorgegebene ∠ c ein scharffer Winckel, und die Länge der vorgegebenen Linie AB ist.

Handgriff.

Ziehe nach Gefähr die gerade CD. d. 23. I.
Darauff mache den ∠ FED, oder den ∠ g ⊓, dem ∠ c, und EF ⊓, der AB. d. 11. I.
Auß dem Puuct E erhöhe auff der Linie CD die ⊥ EG.
Mache den ∠ d ⊓, dem ∠ e. d. 23. I.
So wird die gezogene FH den Diameter EG im Punct H durchschneiden.



Schreibe auß H mit der Weite HE, oder HF einen Zirckel (dann wegen dergleichen ∠ d, und e werden die zwo Seiten EH, und FH einander ⊓ seyn, und dahero gleich von dem Mittel-Punct H abstehen, und der gezogene Kreiß, so wohl durch das Ende E, als durch das Ende F gehen).

Nun sage ich, daß in dem Schnitz E * GF ein jeder nach Gefallen genommener Winckel, gleich wie der ∠ b, ⊓ seye, dem vorgegebenen ∠ c.

Beweiß.

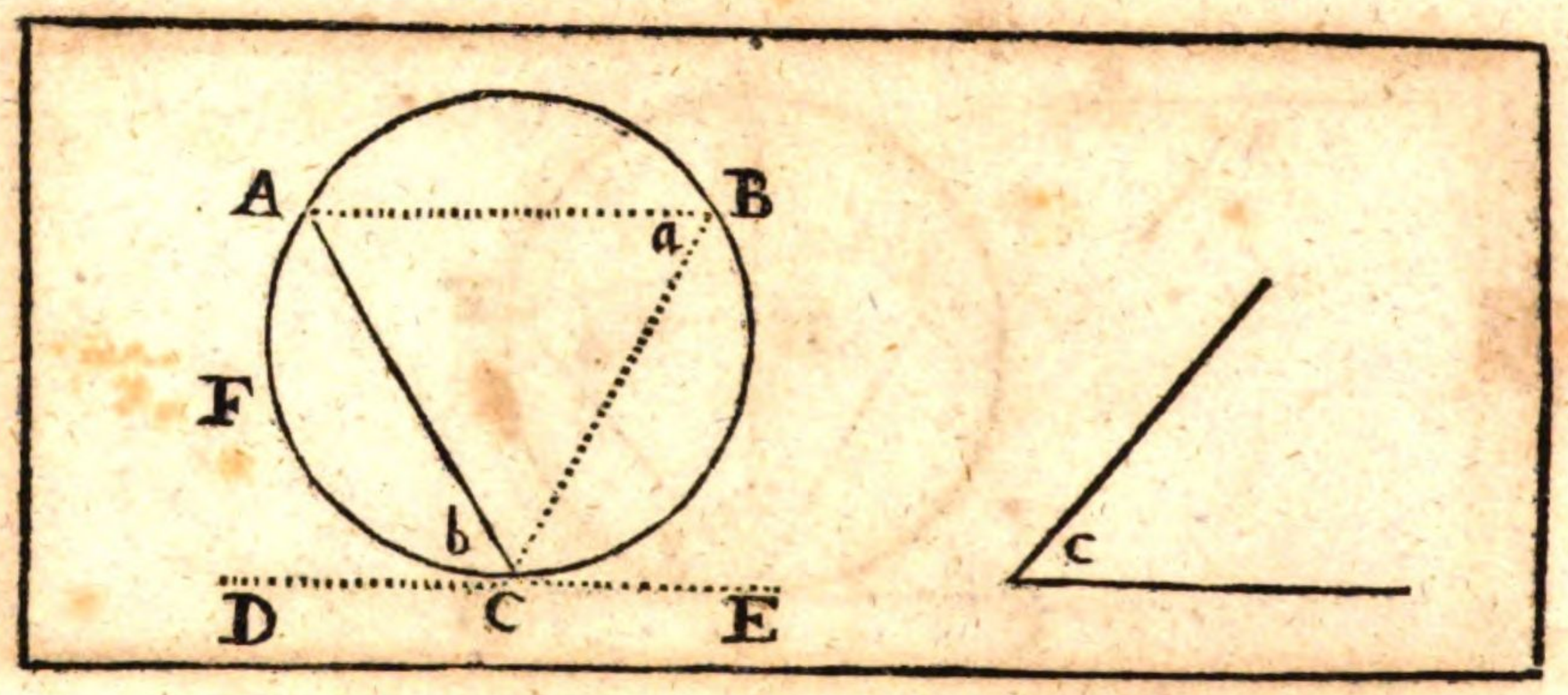
Der ∠ b ist ⊓ dem ∠ g. d. 32. 3.
der ∠ g ist ⊓ gemacht worden dem ∠ c.
Darumb wird auch der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ c.

III.

Solte letztlich der vorgegebene Winckel ein stumpffer ∠ seyn, gleich wie der ∠ h.

So ist eben darzu der vorgehende Handgriff, und Beweiß anzuwenden, damit der Winckel FED ⊓, dem ∠ h möge verfertiget werden.

Welches zu machen ware.



Die XXXIV. Vorgab.

Handgriff.

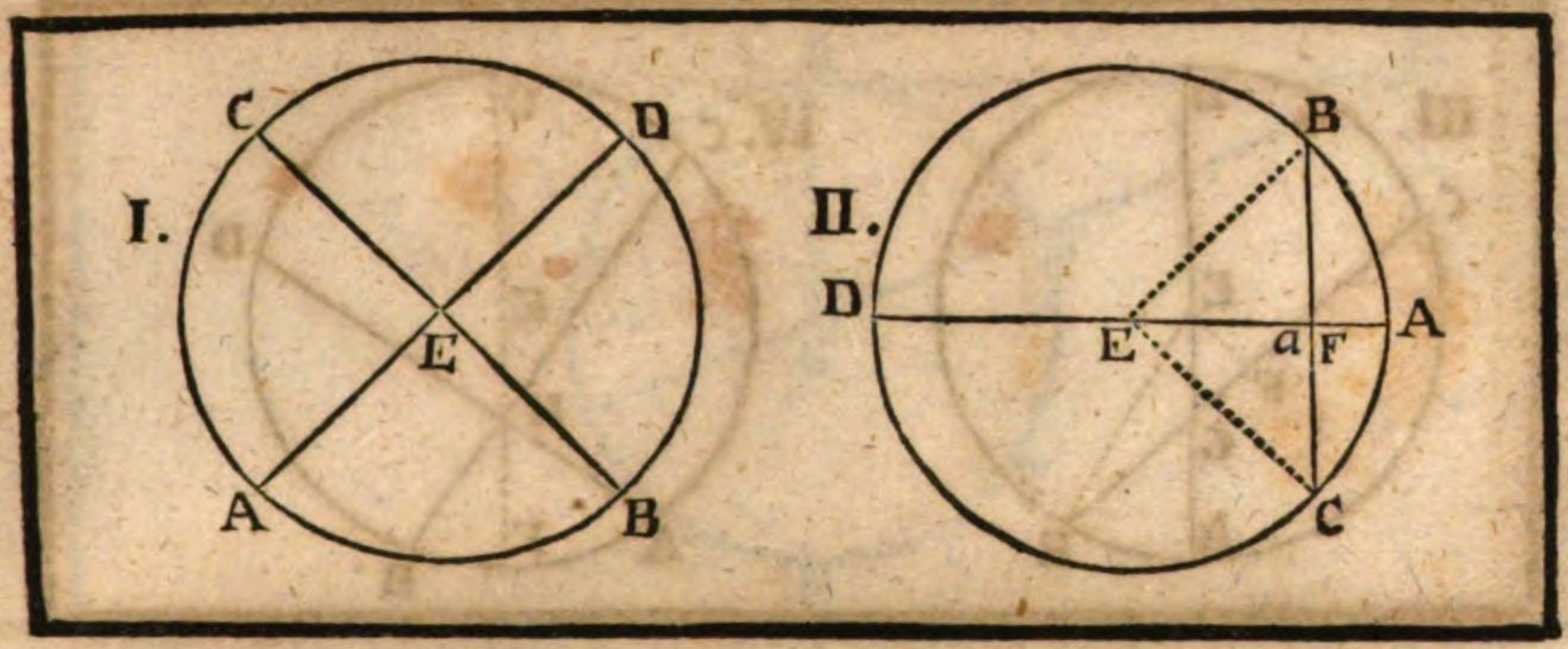
Von einem vorgegebenen Zirckel (ABCF) einen Schnitz (ABC) abzuschneiden, in welchem Schnitz ein Winckel (gleich wie a) stehen kan, der einem vorgegebenen geradtlinischen Winckel (c) gleich sey.

Handgriff.

Ziehe die anrührende DE, d. 17. 3.
Mache auff dem Anrührungs-Puncten C den
∠ b ⌐ dem vorgegebenen ∠ c. d. 23. 1.
Die gezogene gerade AC wird alsdann den Zirckel-Schnitz ABC machen, in welchem ein Winckel nach Gefallen (gleich wie der ∠ a) stehen kan, so gleich einem andern vorgegebenen geradtlinischen ∠ h seyn werde.

Beweiß.

Der ∠ a ist ⌐, dem ∠ b. d. 32. 3.
Der ∠ b aber ist ⌐ gemacht worden, dem ∠ c. d. d. Hand.
Darumb wird der ∠ a in dem Stück ABC auch ⌐
seyn, dem vorgegebenen ∠ c.
Welches zu machen ware.



Die XXXV. Vorgab. Betrachtung.

Wenn sich in einem Zirckel (ABCD) zwo gerade Linien (AD, BC) einander durchschneiden: so wird die Winckel-rechte Figur, welche von denen zween Theile (AE, ED) der einen Linie (AD) gemacht ist, gleich seyn, der Winckel-Rechten Figur, welche von denen zween Theilen (CE, EB) der andern Linie (CB) begriffen wird.

Vier unterschiedene Fähle findet man in dieser Vorgab.

Beweiß I. Fig. I.

Wenn sich die zwey Linien AD, BC just im Mittel-Punct B einander durchschneiden,

So ist klar, daß die vier gerade Linien AE, ED, und CE, EB einander gleich seynd. d. 15. def. 1.

Dahero wird das □ auff AE ⊓ seyn, dem □ auff EB. d. Cor. 3. 46. 1.

Fig. II.

Wenn nur die eine, als wie AD, durch den Mittel-Punct E gehet, und die andere BC, ausser den Mittel-Punct gleich entzwey theilet, nemlich im Punct F.

Ziehe alsdann EB, und FC zusammen:

So ist der ∠ a erstlich ein rechter Winckel. d. 3. 3.

Hernach, weilen die Linie AD in zwey gleiche Theile in E, und in zwey unaleiche Theile in F zertheilet ist:

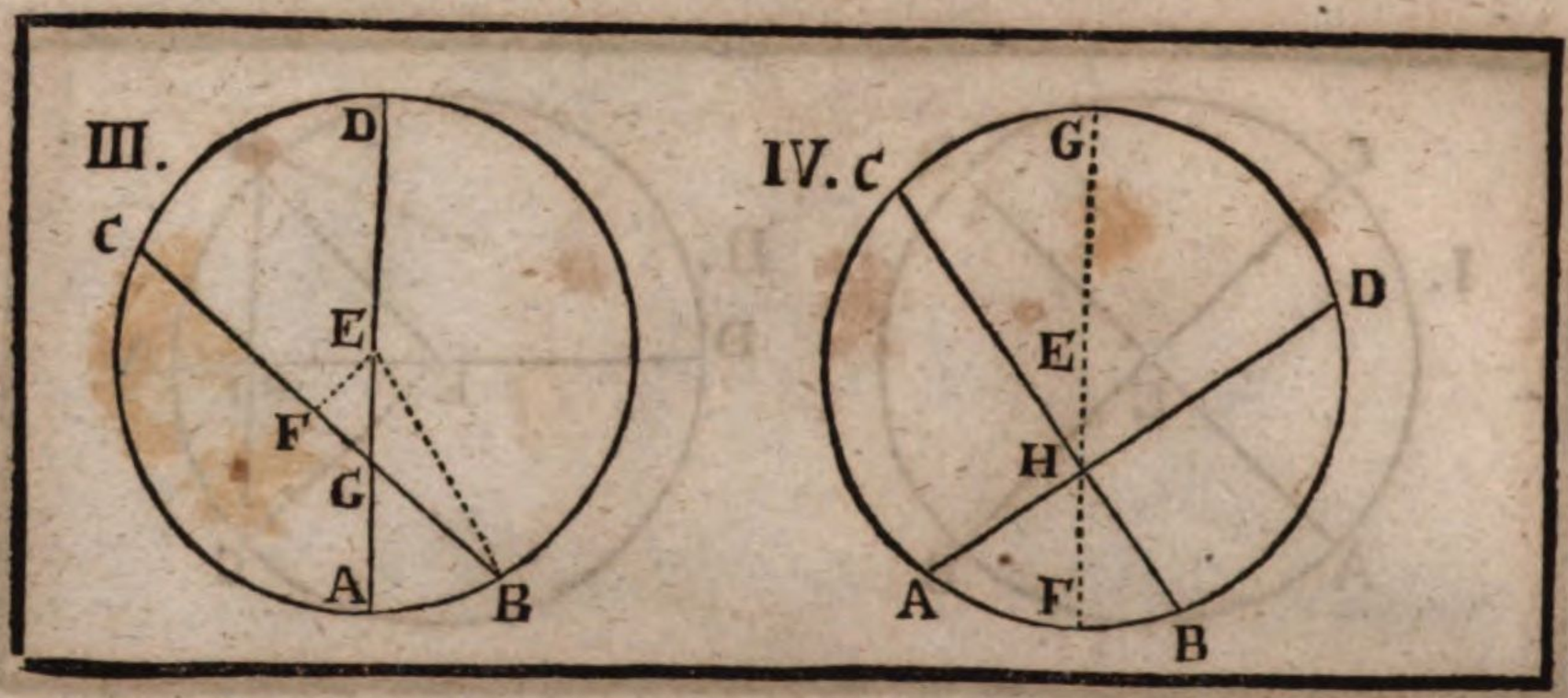
so wird das ▭ DFA sambt dem □ auff der Mitten EF ⊓ seyn, dem □ auff der halben von DA das ist auff EA, oder EB. d. 5. 2. / d. 15. def. 1.

Das □ aber auff EB ist ⊓ denen □ auff EF, und FB. d. 47. 1.

Wenn man beyderseits das gemeine □ auff EF abziehet,

So wird überbleiben das ▭ DFA ⊓, dem □ auff FB,

(dann FB ⊓ ist gegeben worden der FC).

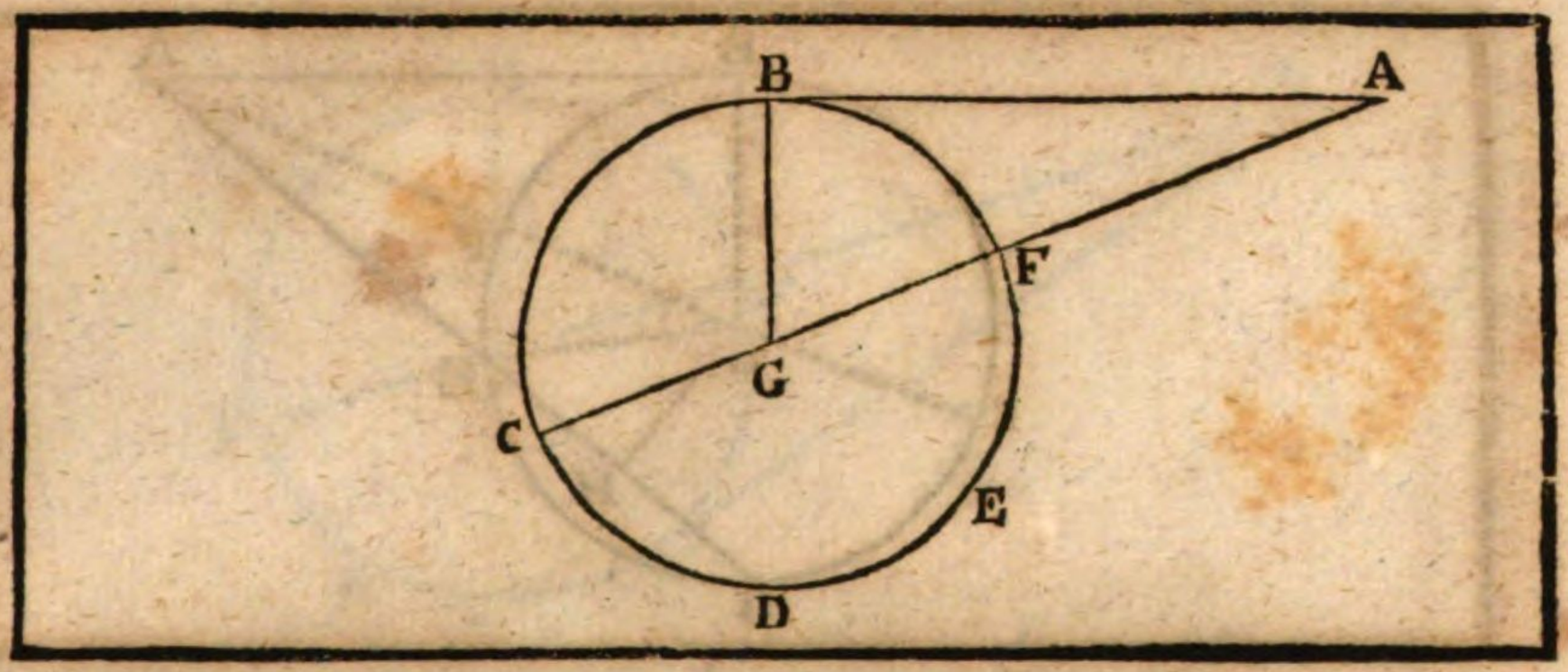


II.

Wenn aber eine, als wie AD, durch den Mittel-Punct E gehet,
und zertheilet die andere in ungleiche Theile, als wie im
Punct G.
So lasse auß dem Mittel-Punct E die ⊥ EF auff die Linie CB fahlen. d. 12. 1.
welche hierdurch geradt entzwey werde getheilet seyn. d. 3. 3.
Hange EB zusammen,
Nun ist das ▭ CGB sambt dem □ auff FG, ⌐
dem □ auff FE.
d. 5. 2.
setze hinzu beyderseits das gemeine □ auff FE,
So wird das ▭ CGB sambt denen □ auff FG
und FE ⌐ seyn, denen zwey □ auff FB, und FE.
Denen zwey □ auff FB, und FE ist aber ⌐, das □ auff EB. d. 47. 1.
und denen zwey □ auff FG, und FE ist ⌐, das □ auff EG. d. dieselbe.
Darumb wird das ▭ CGB sambt dem □ auff EG ⌐
seyn, dem □ auff EB, oder auff dergleichen EA. d. 15. def. 1.
Unterdessen ist dem □ auff EA ⌐, das ▭ DGA
sambt dem □ auff EG.
d. 5. 2.
Dahero wird das ▭ CGB sambt dem □ auff EG ⌐ seyn,
dem ▭ auff DGA sambt dem □ auff EG.
Nehme hinweg beyderseits das gemeine □ nuff EG
So wird überbleiben das ▭ CGB ⌐, dem ▭ DGA.

IV.

Wenn aber gar keine Linie durch den Mittel-Punct E gehet,
sondern sich beyde einander ungleich in H durchschneiden;
Alsdann ziehe durch den Durchschnitz-Punct H den Diameter FHG,
so wird das ▭ DHA ⌐ seyn, dem ▭ GHF. d. d. 3. Fahl.
Das ▭ GHF ist aber ⌐, dem ▭ CHB: eben d. d. 3. Fahl.
Darumb wird das ▭ DHA auch ⌐ seyn dem ▭ CHB. d. ax. 1. 1.
Welches zu beweisen ware.



Die XXXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn ausserhalb eines Zirckels (BCDEF) ein gewisser Punct nach Gefallen (gleich wie in A) genommen wird, und von selben zwo gerade Linien zu dem Zirckel gezogen werden, deren eine (AC) den Zirckel durchschneidet, die andere aber (AB) den Zirckel nur anrühret: so wird die Winckelrechte Figur, welche gemacht ist von der gantzen durchschneidenden (CFA), und dem äussern Theil (FA) von dem Punct auß, biß an den Umbkreiß, gleich seyn, dem Quadrat, welches auff der anrührenden (BA) gemacht wird.

Zwey Fähle können allhier vorkommen.

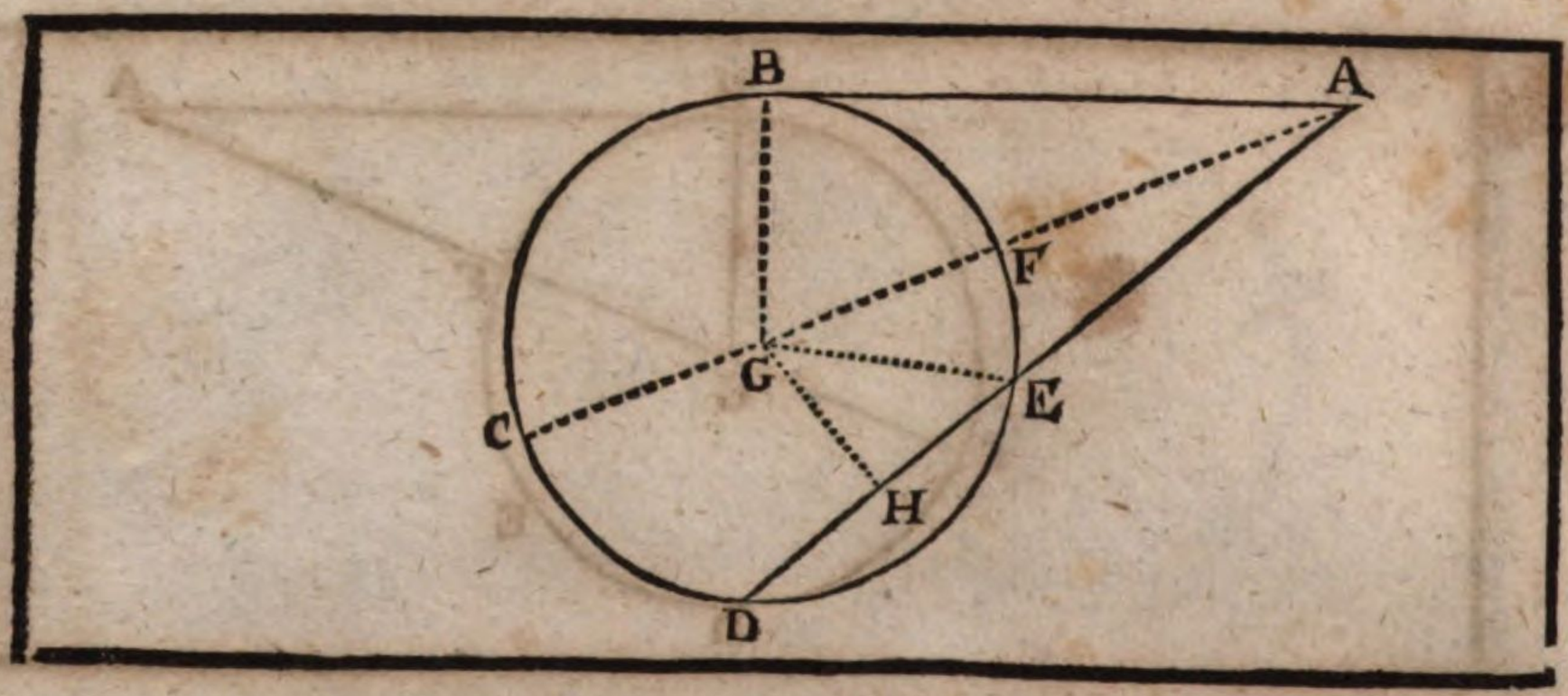
I.

Wenn die durchschneidende CFA durch den Mittel-Punct G gehet;
Alsdann ziehe GB zusammen.

Beweiß.

Weilen die gerade Linie CF in zwey gleiche Theile in G zerschnitten, und ihr eine andere gerade Linie FA ist daran gestossen worden.

So wird das ▭ CAF sambt dem □ auff FG, oder dergleichen GB ⌐ seyn, dem □ auff GA. [d. 15. def. 1. d. 6. 2.
das □ auff GA aber, ist ⌐, denen zwey □ auff GB, und BA. [d. 47. 1.
Wenn man beyderseits das gemeine □ auff GB abziehet,
So überbleibet das ▭ CAF ⌐, dem □ auff BA.



II.

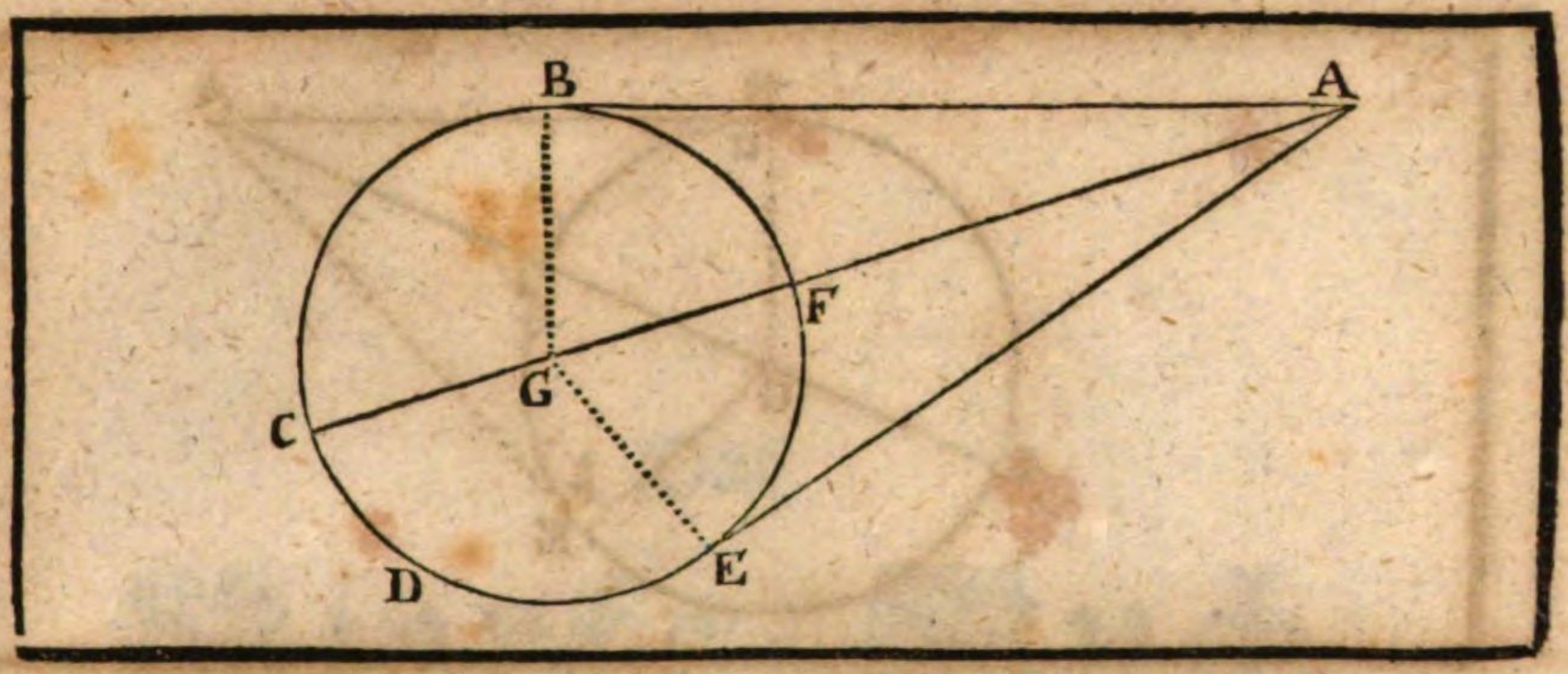
Wenn die gerade DA nicht durch den Mittel-Punct G gehet,
So ziehe durch den Mittel-Punct G die gerade CA,
und hange G, E; und G, B zusammen.

Hernach auß G lasse herunter die ⊥ GH auff die Linie DA fallen. d. 12. I.
durch welche die Linie DE gleich entzwey im Punct H zertheilet wird d. 3. 3.

Weilen nun das ▭ DAE sambt dem □ auff HE ⌐
ist, dem □ auff HA. d. 6. 2.

Wenn man beyderseits das gemeine □ auff HG hinzu setzet;
So wird das ▭ DAE sambt denen □ auff HE, und HG
⌐ seyn, denen zwey □ auff HA, und HG
Denen □ auff HE, und HG ist unterdessen ⌐, das □ auff GE, d. 47. I.
und denen □ auff HA, und HG ist ⌐, das □ auff GA, d. d. selb.
Dahero wird das ▭ DAE sambt dem □ auff EG ⌐
seyn, dem □ auff GA.
Unterdessen ist das ▭ CAF sambt dem □ auff GF,
oder (dergleichen GE) auch ⌐, dem □ auff GA. d. 6. 2.
Deßwegen wird das ▭ DAE, sambt dem □ auff GE
⌐ seyn, dem ▭ auff CAF, sambt dem □ auff GE. d. I. ax. I.
Ziehe darvon beyderseits das gemeine □ auff GE,
So wird überbleiben das ▭ DAE ⌐, dem ▭ CAF.
Das ▭ CAF ist aber ⌐, dem □ auff BA, d. d. Vor.
Folget, daß auch das ▭ DAE ⌐ seye, dem □ auff BA.

Welches zu beweisen ware.



Folge.

I.

Wenn in einem Punct ausserhalb deß Zirckels etliche durchschneidende gezogen werden: so werden alle diese Winckelrechte Figuren, welche auff jedweder gantzen durchschneidenden nnd seinen ausseren Theil von dem Umbkreiß, biß an dem Punct gemacht werden, einander gleich seyn.‖

II.

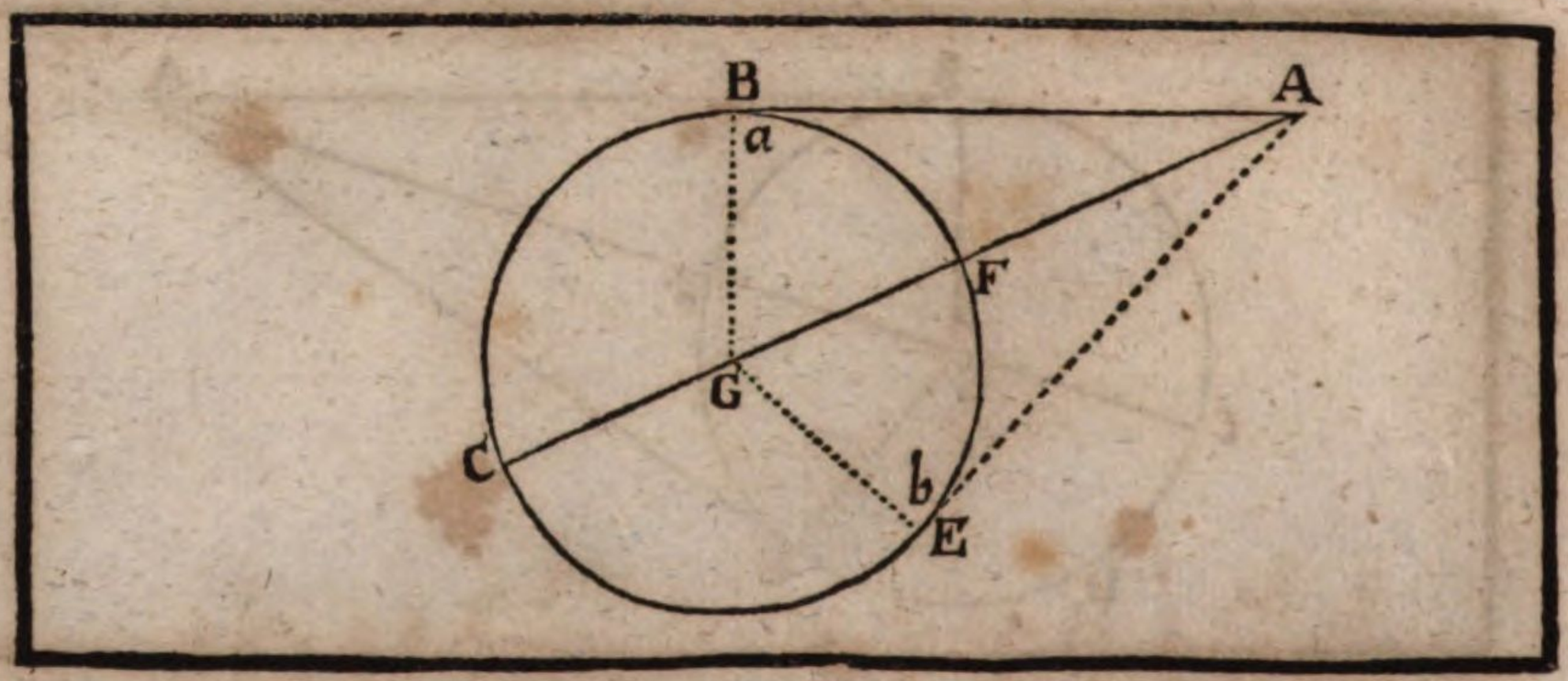
Wenn zwey anrührende Linieu BA, EA: in einem Punct A gezogen werden: so werden solche Linien einander ⌐ seyn, das ist BA, wird gleich seyn der EA.

III.

Auß einem Puncten ausserhalb deß Zirckels, können nicht mehr, dann zwo gerade Linien AB, AE gezogen werden, welche den Zirckel berühren.

IV.

Wenn zwey gleiche Linien auß einem Punct ausserhalb deß Zirckels in dem gebogenen Umbkreiß gezogen werden, deren eine den Zirckel berühret, so wird auch die andere denselben berühren.



Die XXXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn ausserhalb eines Zirckels ein Punct (als wie A) genommen wird, und von solchem zwo gerade Linien gezogen werden, deren die eine (BA) in äussern Umbkreiß fahlet, die andere (AC) aber den Zirckel durchschneidet: und ferners das Quadrat auff dieser einfallenden (BA) gleich ist, der Winckelrechten Figur, welche auff der gantzen durchschneidenden (CA) und seinem außwendigen Theil (FA) gemacht wird: so wird die einfallende Linie (AB) den Zirckel berühren.

Zubereitung.

Auß A ziehe die anrührende Linie AE. d. 17. 3.
Hange G, E; und G, B zusammen.

Beweiß.

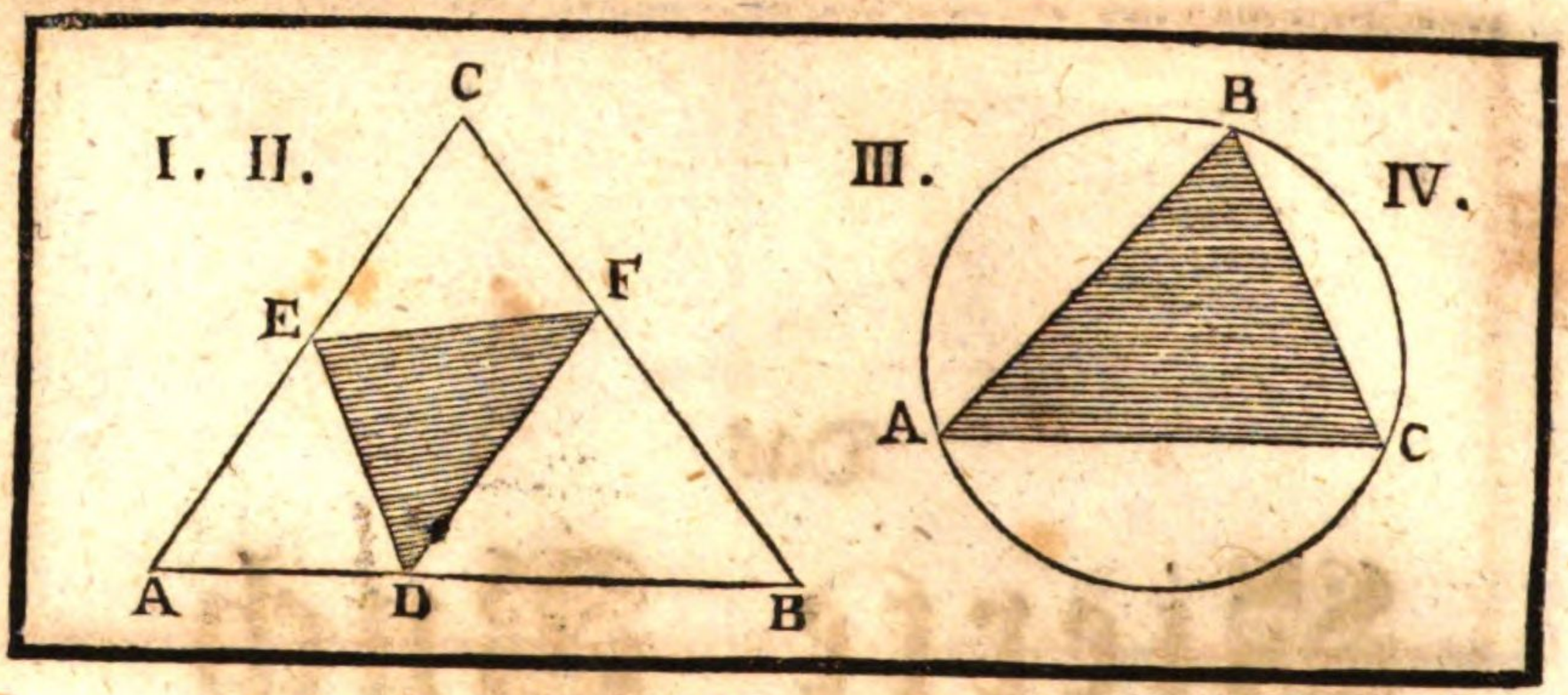
Das □ auff AE ist ⊓, dem ▭ CAF. d. 36. 3.
dem ▭ CAF aber ist ⊓, das □ auff BA. d. d. Vorg.
Dahero wird das □ auff AE ⊓ seyn, dem □ auff BA, d. 1. ax. 1.
und folgends die Seiten AE ⊓ seyn, der Seiten BA. d. 4. an. 46. 1.
Die Seiten GB ist auch ⊓, der Seiten GE, d. 15. def. 1.
und die Basis GA ist beyden △ gemein.
Darumb wird der △ GBA ⊓ seyn, dem △ GEA. d. 8. 1.
Ferner ist der ∠ b ein rechter Winckel {d. 18. 3.
Folget, daß auch der ∠ a ein rechter Winckel seye, {und Zub.
Deßwegen wird die Linie AB den Zirckel anrühren. d. Cor. 16. 3.
Welches zu beweisen ware.

Das

Vierte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort = Erklärungen.

I.

Man sagt, daß eine geradtlinische Figur in einer andern geradtlinischen Figur seye recht eingeschrieben, wenn jede Winckel der innern, jede Seiten der äussern Figur berühret.
Also ist in dem △ ACB der △ EFD recht eingeschrieben;
Dann die drey ∠ D, E, F, die drey Seiten AB, AC, CB
Deß △ ACB berühren. Fig. I.

II.

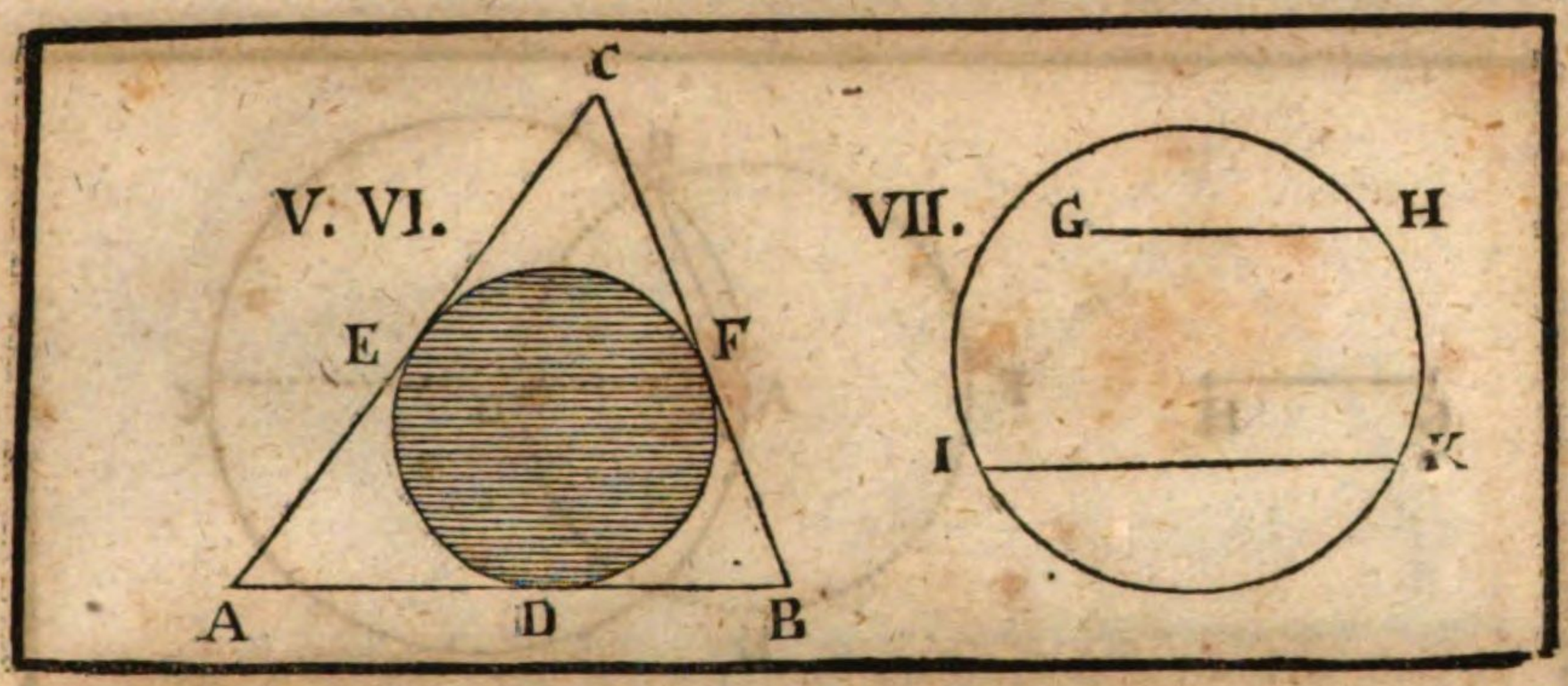
Gleicherweise sagt man, daß eine geradtlinische Figur umb eine andere geradtlinische Figur seye recht beschrieben, wenn jede Seiten der äussern jede Winckel der innern Figur berühret: als wie der Triangel ABC ist recht umbschrieben umb den Triangel DEF. Fig. II.

III.

Eine geradtlinische Figur aber wird recht in einem Zirckel eingeschrieben, wenn alle Winckeln solcher Figur den inwendigen Umkreiß deß Zirckels anrühren. Fig. III.

IV.

Herentgegen ist eine geradtlinische Figur recht umb einen Zirckel beschrieben, wenn alle Seiten solcher Figur deß Zirckels äusserlichen Umbkreiß anrühren. Fig. IV.



V.

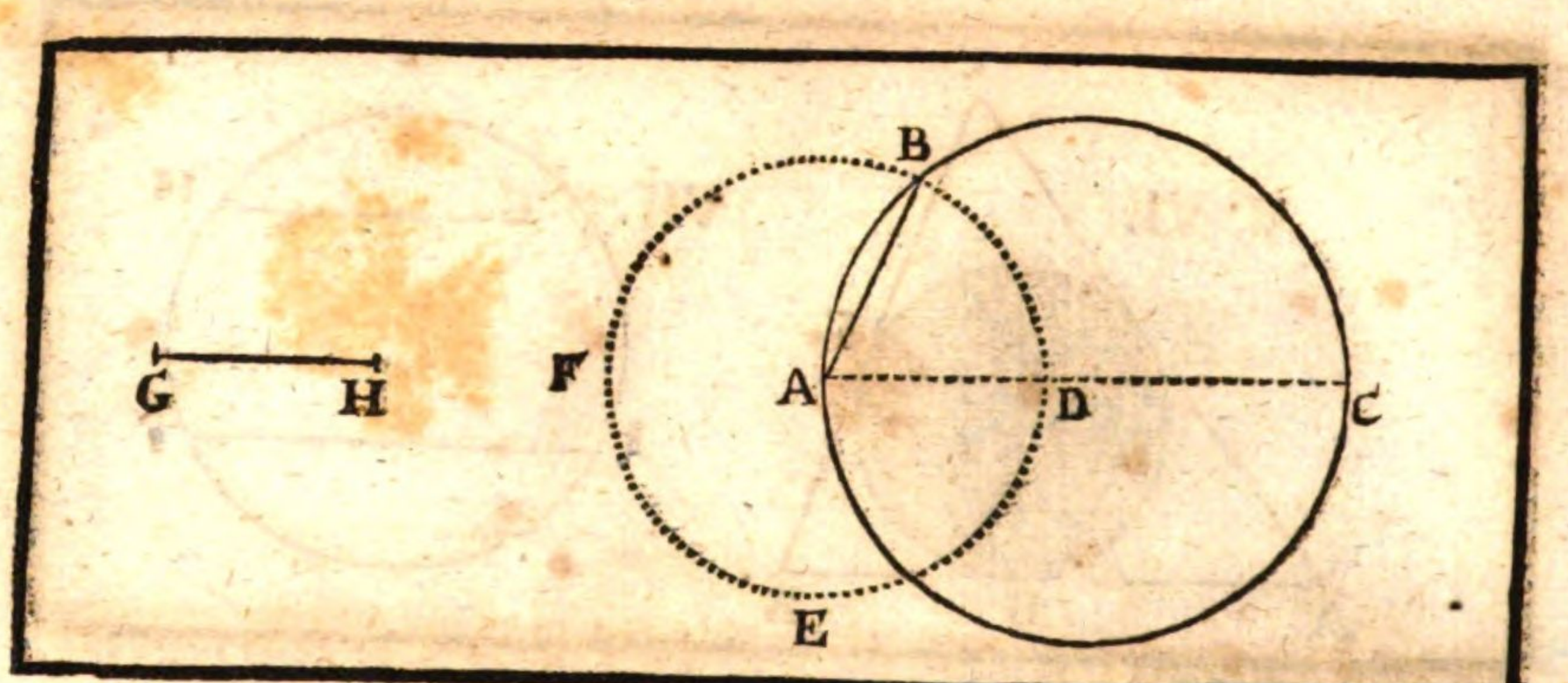
Man saget auch, daß ein Zirckel in eine geradtlinische Figur recht eingeschrieben seye, wenn er mit seinem Umbkreiß alle Seiten solcher Figur anrühret, als wie DEF.

VI.

Ein Zirckel aber ist umb eine geradtlinische Figur recht beschrieben, wenn er mit dem innern Umbkreiß alle Winckeln solcher Figur anrühret. Fig. VI.

VII.

Eine gerade Linie im Zirckel gestölter, ist genant, wenn derselben beyde Ende den innern Umbkreiß deß Zirckels anrühren;
Also ist die Linie IK, in dem Zirckel gestellt, nicht aber die Linie GH.



Die I. Vorgab.

Handgriff.

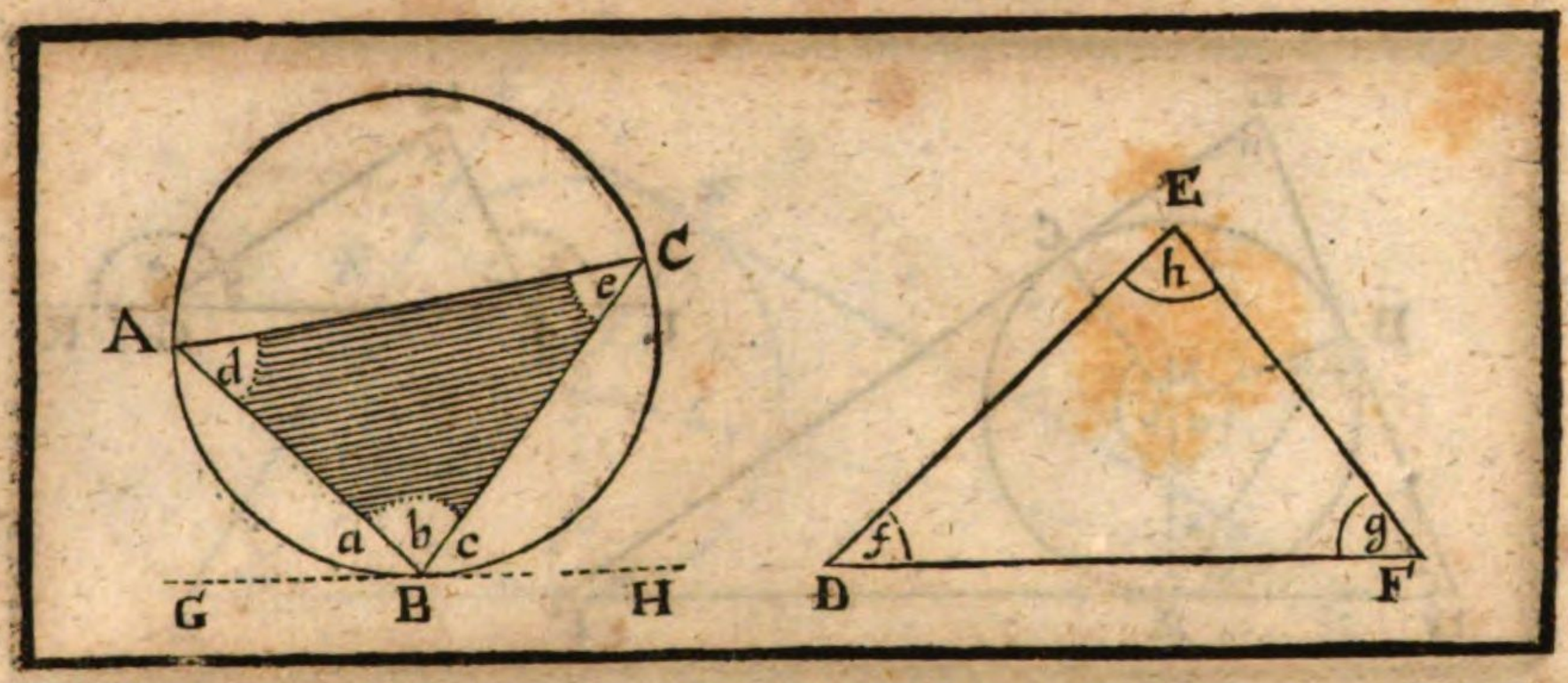
In einem vorgegebenen Zirckel (ABC) eine gerade Linie (AB) zu stellen, welche gleich seye, einer andern vorgegebenen geraden Linie (GH); diese aber muß nicht grösser seyn, als deß vorgegebenen Zirckels Diameter (AC).

Handgriff.

Ziehe in dem Zirckel den Diameter ADC:
Und wenn die gegebene Linie GH ⊓ wäre, dem Diameter, so würde diese Vorgab schon verfertiget seyn,
Seye aber GH kleiner, als der Diameter ADC.
Mache dahero das Stück AD ⊓, der Linie GH: d. 3. I.
Auß A mit der Weite AD schreibe den Zirckel DEF, welcher den ersten in dem Punct B durchschneide.
Ziehe AB zusammen;
So wird die Linie AB ⊓, der Linie GH in dem Zirckel ABC gestellt seyn.

Beweiß.

Die Linie AB ist ⊓, der Linie AD: d. 15. def. I.
AD ist aber ⊓ gemacht worden, der Linie GH. d. d. Hand.
Darumb wird die Linie AB auch ⊓ seyn, der Linie GH.
Unterdessen berühren beyde Ende A, und B den innern Umbkreiß deß Zirckels ABC sichtbarlich.
Dahero ist die AB, oder GH in dem Zirckel ADC gestellt worden. d. 7. def. 4.
Welches zu machen ware.



Die 11. Vorgab.

Handgriff.

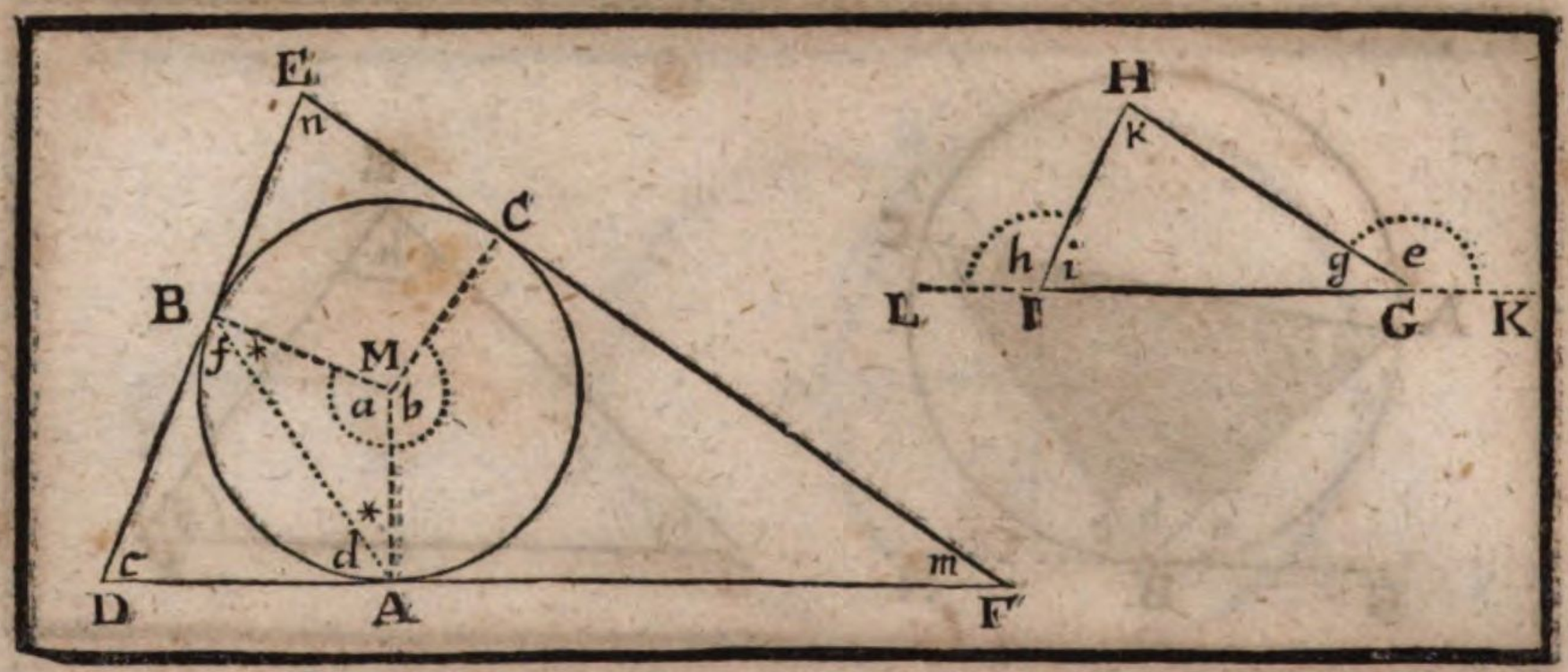
In einem vorgegebenen Zirckel (ABC) einen Triangel (ABC) einzuschreiben, dessen drey Winckeln insonderheit gleich seynd, dreyen andern Winckeln, eines andern vorgegebenen Triangels (DEF).

Handgriff.

Ziehe nach Gefallen die anrührende GH, welche den Zirckel ACB im Punct B berühre. d. 17. 3.
Mache den ∠ a □, dem ∠ f, und ziehe BA in dem Umbkreiß. d. 23. 1.
Mache auch den ∠ c □, dem ∠ g, und ziehe BC in dem Umbkreiß.
Hange letzlich A, C zusammen, so ist es verfertiget.

Beweiß.

Der ∠ e ist □, dem ∠ a. d. 32. 3.
Der ∠ a aber ist □ gemacht worden, dem ∠ f. d. d. Hand.
Dahero wird der ∠ c auch □ seyn, dem ∠ f.
Auff solche Weise ist auch der ∠ d □ dem ∠ g.
Und folgends wird der dritte ∠ b □ seyn, dem ∠ h. d. 1. Cor. 32. 1.
Also seynd in dem △ ABC die drey Winckel insonderheit □, denen drey Winckeln insonderheit deß △ DEF:
Der △ ABC ist auch in dem Zirckel eingeschrieben. d. 3 def. 4.
(dann alle drey Winckeln den Zirckel inwendig sichtbarlich berühren).
Welches zu machen ware.

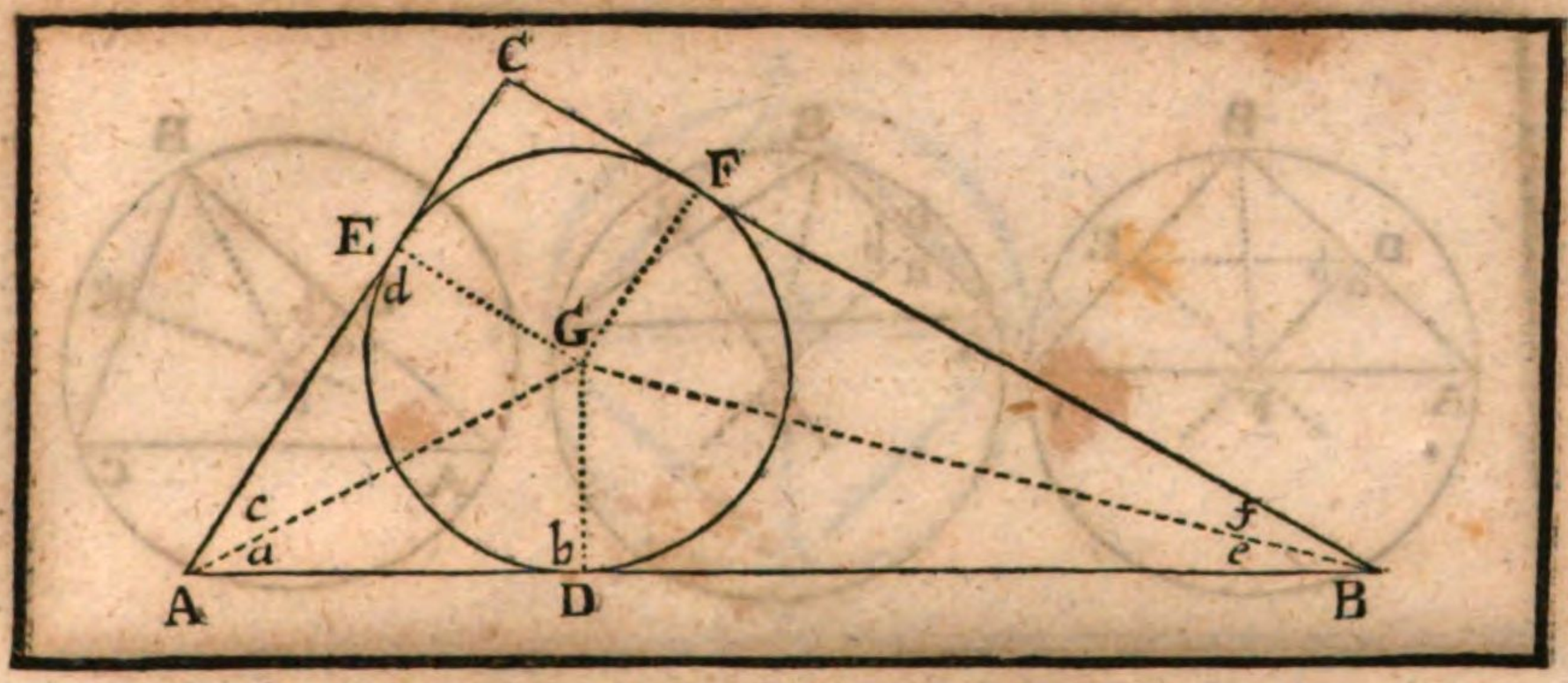


Die III. Vorgab. Handgriff.

Umb einen vorgegebenen Zirckel (ABC) einen Triangel (DEF) zu schreiben, dessen drey Winckel insonderheit gleich seynd, andern dreyen Winckeln insonderheit, eines andern vorgegebenen Triangels (GIH).

Handgriff.

Verlängere die Seiten GI zu beyden Seiten in L, und K nach Gebühr,
Hernach ziehe auß dem Mittel-Punct M deß Zirckels ABC
die gerade Linie MB nach Gefähr.
Mache den ∠ a ⌐, dem ∠ h, und den ∠ b ⌐ dem ∠ e. d. 23. 1.
Ziehe ferners am Ende deren drey Linien MB, MA, MC
die anrührende Linien DE, DF, FF, welche sich letzlich
werden zusammen stossen, und den △ DEF gestalten.
Dessen drey Winckel a insonderheit ⌐ seynd, denen drey
Winckeln insonderheit deß △ GHI.
Zuberaitung. Ziehe B und A zusammen.
Beweiß. Jetzund stehet zu beweisen, daß die drey Linien sich endlich
zusammen stossen, und einen △ gestalten müssen.
Dann die überzwergs gezogene Linie AB die zwey ∠ f und d ⌐ macht,
als zwey rechte ∠.
(massen der ∠ f + *, und d + * 2 rechte seynd gemacht worden.) d. d Hand.
Dahero werden die zwey anrührende Seiten ED und DF gegen D
nothwendig zusammen kommen. d. 11. ax.
Eben dieses ist von denen zwey andern Seiten zu sagen.
Also werden sie endlich den △ DEF gestalten müssen, d. d Hand.
Welcher umb den Zirckel ABC recht umbschrieben ist. und 4. def. 1.
Weiters, indeme in der vierseitigen Figur BMAD die zween
∠ f + *, und d + * zween rechte Winckeln seynd. d. 18. 3.
So werden auch die übrige zween ∠ a und c ⌐ seyn zween rechten ∠. d 1. ann. 32. 1
Unterdessen seynd auch die zween ∠ h und i ⌐ zween rechten Winckeln. d. 13. 1.
Dahero werden die 2 ∠ a und c sammentlich ⌐ seyn, denen 2 ∠ h u. i sammentlich.
Wenn man aber beyderseits die gleiche ∠ a und b darvon ziehet,
So wird überbleiben der ∠ c ⌐, dem ∠ g
Auff diese Beweiß-Art wird auch der ∠ m ⌐ seyn, dem ∠ g.
Und letzlich der ∠ n ⌐, dem ∠ k. Welches zu machen ware. d. 1. Cor. 32. 1.



Die IV. Vorgab.

Handgriff.

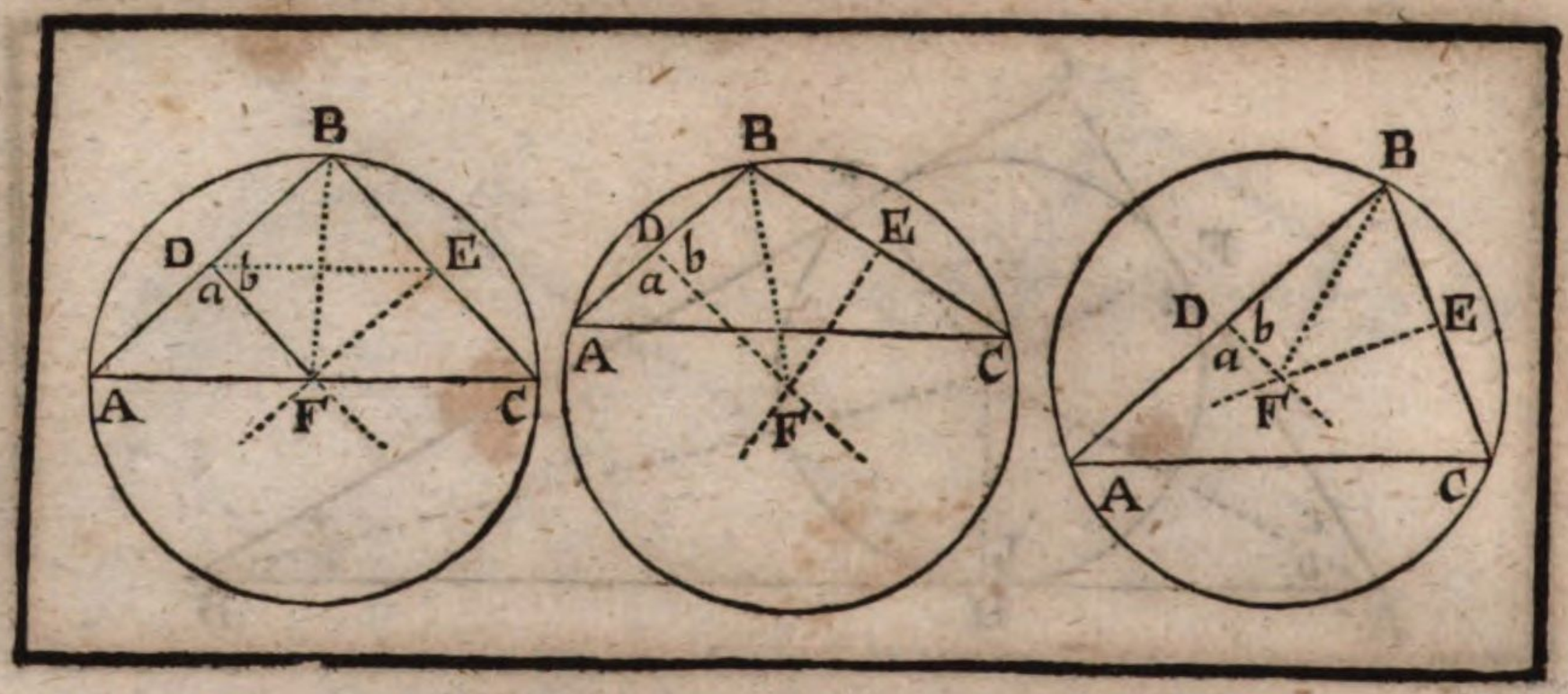
In einem vorgegebenen Triangel (ABC) einen Zirckel (DEF) zu schreiben.

Handgriff.

Zertheile geradt entzwey die zween ∠ c → a, und f → e. d. 9. 1.
mit denen geraden Linien AG, und BG, welche sich nothwendig in einen Punct, gleich wie in G, werden zusammen stossen, d. 11. ax. 2.
Auß dem Punct G ziehe die drey Linien GE, GD, GF, welche auff denen dreyen Seiten AC, AB, BC ⊥ stehen, d. 12. 1.
Alsdann schreibe auß dem Punct G mit der Weite GD, den Zirckel DEF, welcher auch durch die zween Puncten E, und F gehen, und die drey Seiten deß △ ABC anrühren werde. Und dahero ist der Zirckel DEF eingeschrieben. d. 5. def. 4.

Beweiß.

In dem △ GDA seynd die zwey ∠ b, und a □, denen zwey ∠ d, und c in dem △ GEA: und die Seiten AG ist beyden △ gemein. d. d. Hand.
Darumb wird auch die Seiten GD □ seyn, der Seiten GE: d. 26. 1.
Eben auff solche Art wird bewiesen, daß FG □ seye, GE, und deßwegen seynd alle drey Linien EG, DG, und FG einander gleich. d. 1. ax. 1.
Unterdessen hat man mit der Weite GD einen Zirckel geschrieben, welcher die Seiten AB berühret hat.
Folget, daß auch nothwendig durch die andere zwey äusserste Puncten E, und F der Zirckel gehen, und dahero die andere zwey Seiten anrühren muß.
Welches zu machen ware.



Die V. Vorgab.

Handgriff.

Umb einen jeden vorgegebenen Triangel (ABC) einen Zirckel zu schreiben.

Handgriff.

Zertheile nach Gefallen zwey Seiten, als wie AB, BC in mitten entzwey in denen Puncten D, E: d. 10. I.

Auß denen Puucten D, und E ziehe die zwo gerade Linien, DF, und EF, welche auff denen Seiten AB, BC ⊥ stehen; Diese zwo ⊥ hernach, werden nothwendig in einem Punct, gleich wie F, zusammen kommen müssen, welches im Anfang der dritten Vorgab dieses Buchs schon genugsam ist bewiesen worden. d. 11. ax. I.

Letztlich auß dem Punct F mit der Weite FA schreibe einen Zirckel ABC, welcher mit seinem Umbkreiß auch die andere zween Winckeln anrühren werde. Und dahero ist umb den △ ein Zirckel beschrieben worden. d. 6. def. 4.

Ziehe vorhero F, B zusammen.

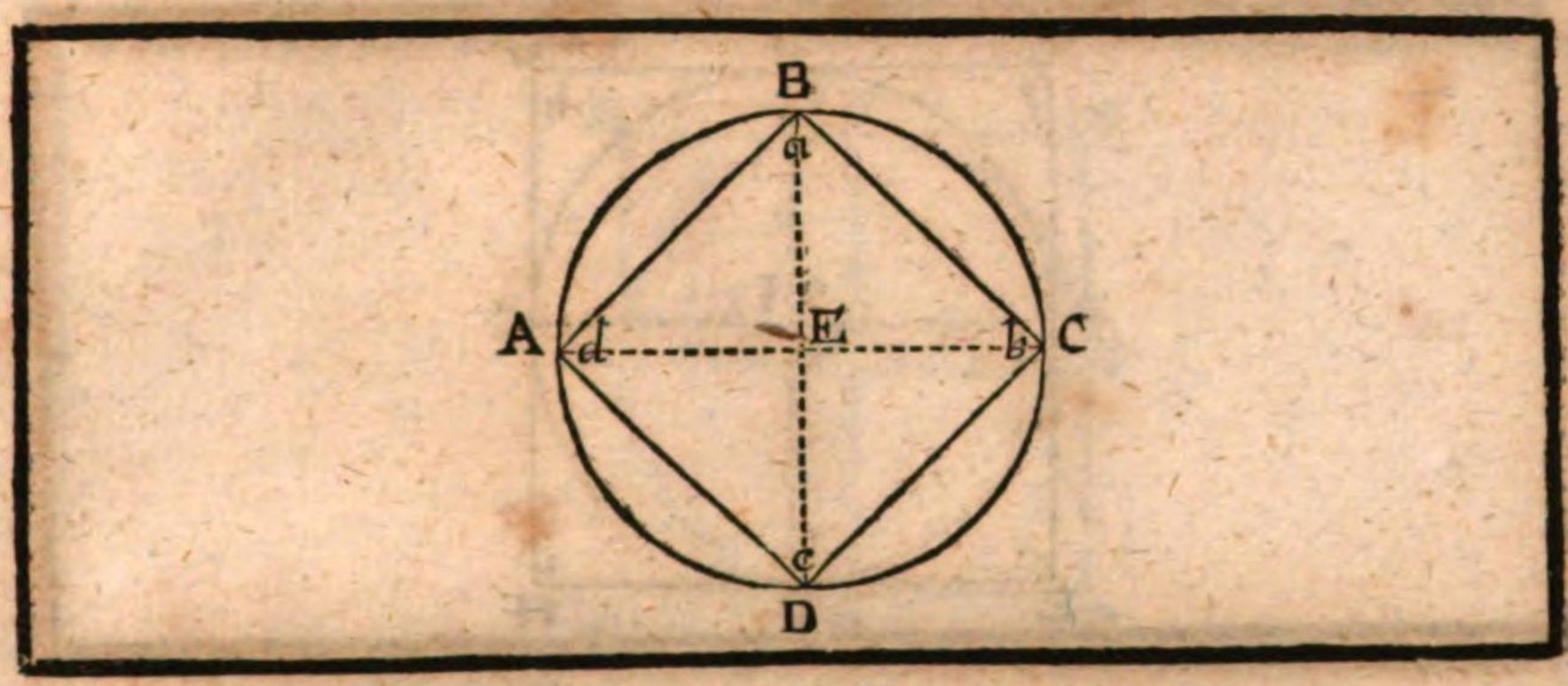
Beweiß.

In dem △ BFD ist die Seiten BD ⊓, der Seiten DA im △ AFD. d. d. Hand.
Und die Seiten DF ist beyden △ gemein.
Und der ∠ b ⊓, dem ∠ a. d. d. Hand.

Folget, daß auch die Seiten BF ⊓ seye, der Seiten AF: d. 4. I.
Nach dergleichen Beweiß-Art, wird auch FC ⊓ seyn der FB:

Dahero seynd alle drey Linien FA, FB, FC einander gleich, d. I. ax. I.
Und deßwegen gehet der Zirckel, welcher auß dem Punct F mit der Weite AF beschrieben wird, auch durch die andere zween Puncten BC, und also berühret er alle drey ∠ deß △ ABC.

Welches zu machen ware.



Die VI. Vorgab.

Handgriff.

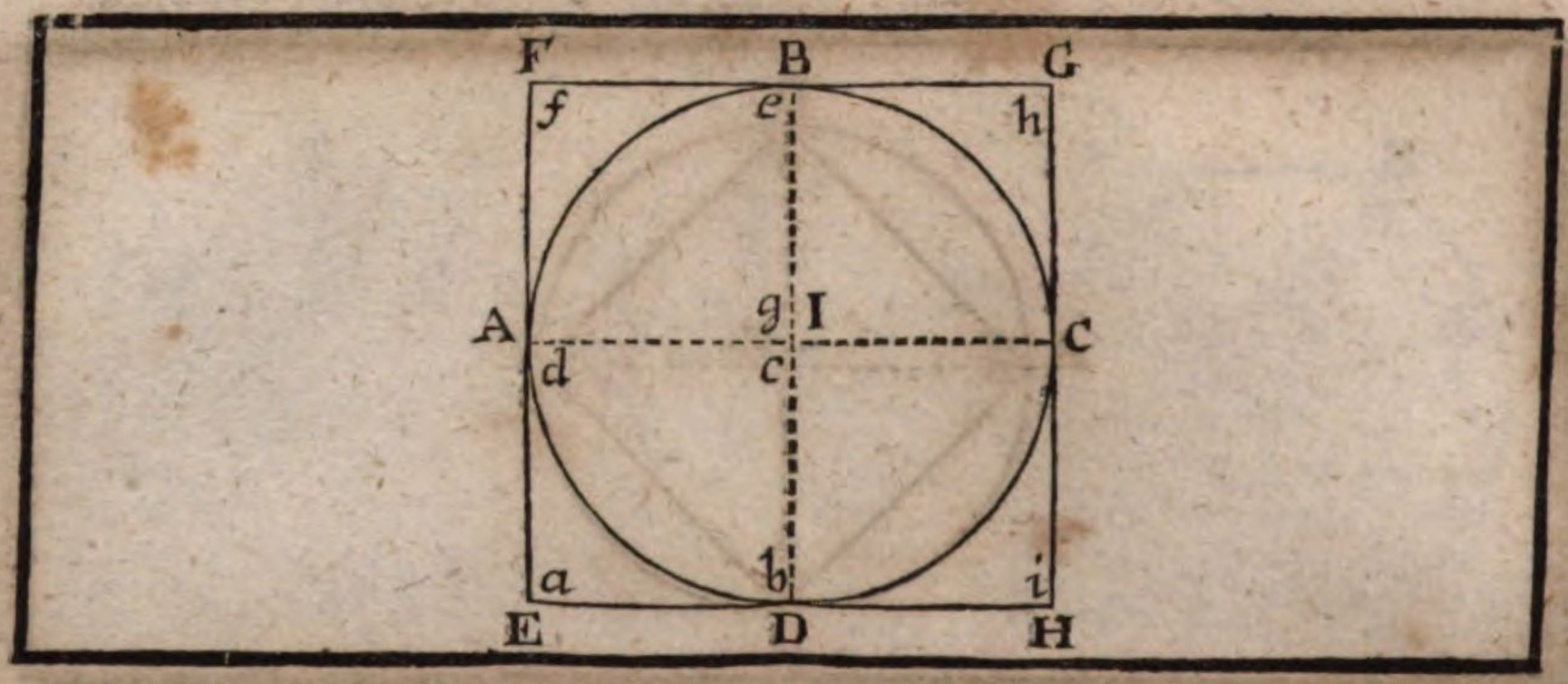
In einem vorgegebenen Zirckel (ABCD) ein Quadrat einzuschreiben.

Handgriff.

Ziehe die zwey Diameter AC, BD, welche sich im Mittel-Punct E, ⊥ durchschneiden. — d. 11. 2.
Hange alsdann AB, CD zusammen,
So ist das □ ABCD in dem vorgegebenen Zirckel verfertiget.

Beweiß.

Dieweilen die vier ∠ umb E rechte seynd, — d. d. Hand.
und die Liuien EA, EB, EC, ED einander gleich: — d. 15 def. 1
Folget, daß auch die Linien AB, BC, CD, AD einander werden gleich seyn, — d. 4. 1.
Dahero ist die Figur gleichseitig.
Nun stehen die vier ∠ a, d, b, c in einem halben Umbkreiß. — d. 31. 3.
Deßwegen werden sie vier rechte ∠ — d. 29. def. 1.
und die Figur ABCD ein wahrhafftes □ seyn,
so in dem Zirckel ist eingeschrieben worden.
Welches zu machen ware.



Die VII. Vorgab.

Handgriff.

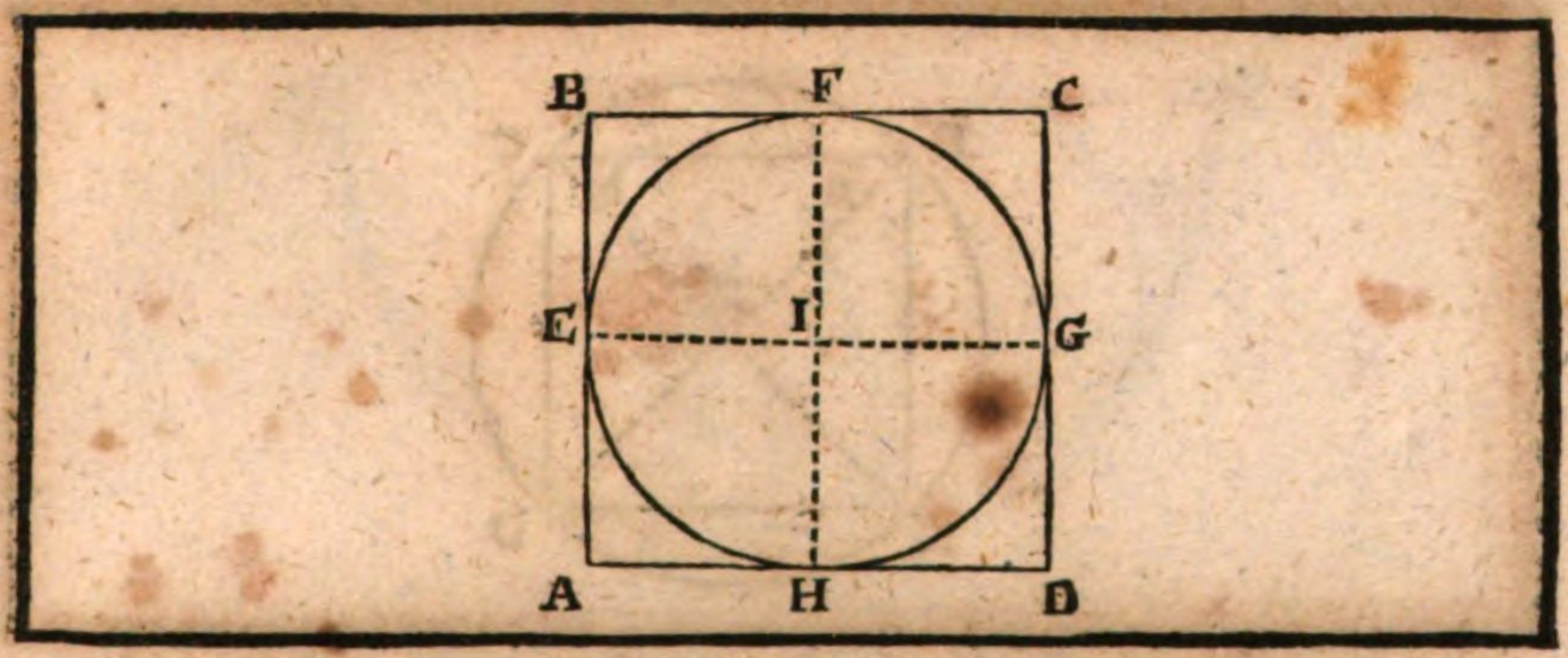
Umb einen vorgegebenen Zirckel (ABCD) ein Quadrat zu schreiben.

Handgriff.

Ziehe die zwey Diameter AC, BD, welche sich in dem
Mittel-Punct I, ⊥ durchschneiden; d. 11. 1.
Ziehe hernach, durch die vier äusserste Puncte A, B, C, D
Die vier anrührende Linien EF, FG, GH, HE, d. 17. 3.
welche sich nothwendig (wie es in der dritten Vorgab
dieses Buchs schon bewiesen worden) in denen vier Puncten
E, F, G, H werden zusammen stossen, und daß □ machen. d. 11. ax. 1.

Beweiß.

Wegen deren zwey rechten ∠ b, und c, wird EH = seyn der AC. d. 28. 1.
Auch wegen deren rechten ∠ e, und g wird FG = seyn der AC. d. 28. 1.
Und also EH =, der FG. d. 30. 1.
Auff solche Weise, weilen auch so wohl EF, als HG = ist der DB,
so wird eben EF = seyn, der HG.
Dahero ist EFGH ein ▭, und zwar ein gleichseitiges. d. 35. def. 1.
Dann alle vier Seiten EF, FG, GH, und HE seynd ⊓, dem [d. d. Vorg,
Diameter. [und 34. 1.
Letztlich, weilen in der vierseitigen Figur AIDE die drey
∠ d, c, und b drey rechte seynd gemacht worden.
So wird der vierdte ∠ a auch ein rechter seyn. d. 1. an. 32. 1.
und folgends die übrige drey ∠ f, b, i in ▭ EFGH drey
rechte seyn. d. 2. an. 46. 1.
Dahero man schliesset, daß EFGH ein □ seye, und daß die vier Seiten
(so umb den Zirckel ABCD beschrieben worden) denselben berühren.
Welches zu machen ware.



Die VIII. Vorgab.

Handgriff.

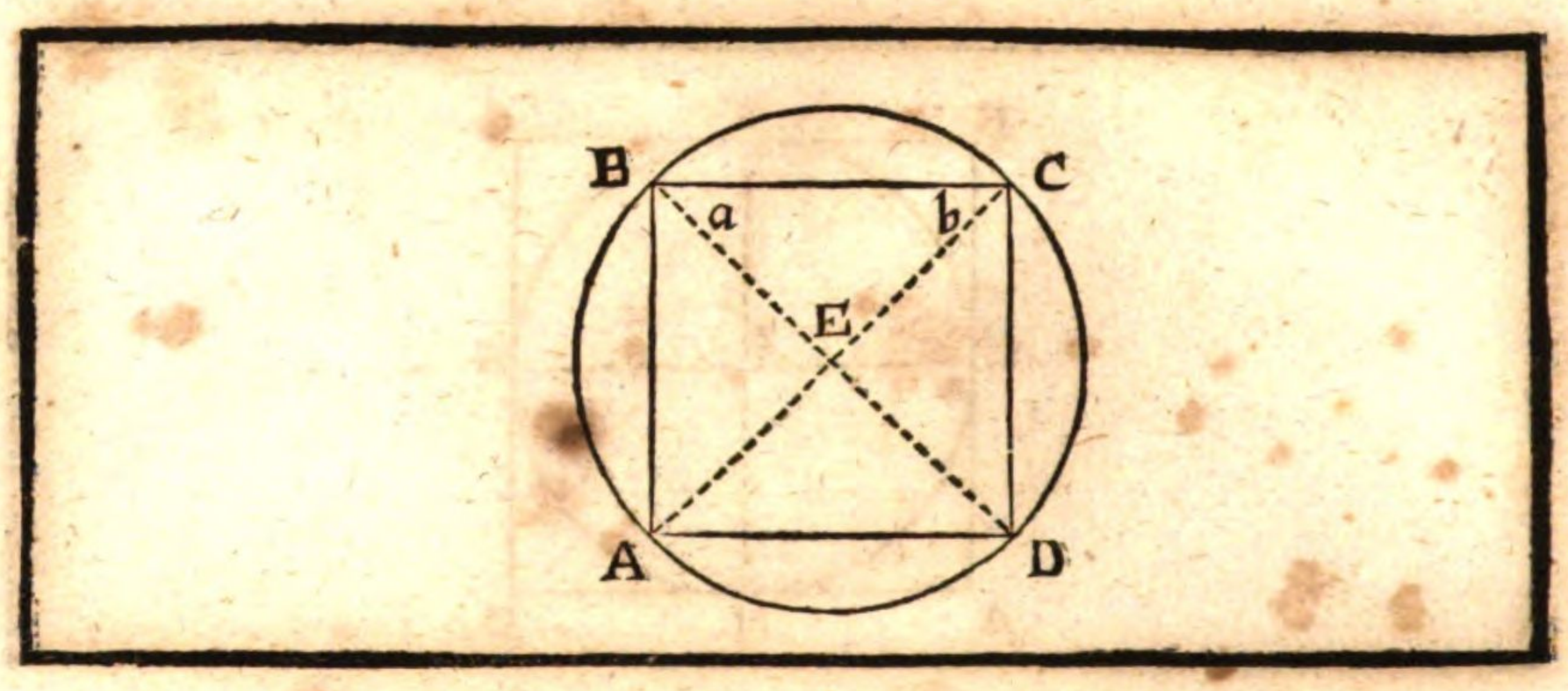
In ein vorgegebenes Quadrat (ABCD) einen Zirckel zu schreiben.

Handgriff.

Zertheile die vier Seiten AB, BC, CD, DA
in zwey gleiche Theile in denen Puncten E, F, G, H. d. 10. I.
Hange EG, und FH zusammen, welche sich durchschneiden
werden in dem Punct I.
Auß I, als dem Mittel-Punct, schreibe mit der Weite IE
einen Zirckel, welcher auch die andere drey
Puncten F, G, H anrühren werde: und dahero der Zirrckel d. 5. def. 4.
in das □ eingeschrieben ist.

Beweiß.

Die Linie BC ist ⊓ und =, der Linie EG. d. 33. I.
Dahero auch die Helffte BF ⊓, und = ist, der Helffte EI.
Es ist auch die Linie AB ⊓, und =, der Linie HF. d. 33. I.
Dahero auch die Helffte BE ⊓, und = ist, der Helffte FI,
Deßwegen ist BFIE ein ▭. d. 35. def. I.
Unterdessen ist EB ⊓, der BF, d. d. Hand.
So folget, daß auch die übersiehende Seiten FI ⊓ seye der EI. d. 34. I.
Auff solche Weise wird auch GI ⊓ seyn, der FI: und letzlich HI ⊓,
der IG.
Und dahero alle vier Linien EI, IF, IG, IH einander gleich: d. I. ax. I.
Worauß man schliesset, daß der Puncten I der Mittel-Punct seye, d. 9. 3.
und wenn man auß demselben Punct mit der Weite IE
einen Zirckel schreibet, solcher auch die andere drey Seiten des
□ ABCD in denen Puncten F, G und H berühren werde. d. I. Cor. 16. 3.
Welches zu machen ware.



Die IX. Vorgab.

Handgriff.

Umb ein vorgegebenes Quadrat (ABCD) einen Zirckel zu schreiben.

Handgriff.

Ziehe die zwey Diameter AC, BD, welche sich in dem Punct E durchschneiden werden.

Auß E, als dem Mittel-Punct, schreibe mit der Weite EA einen Zirckel, dieser wird auch die drey übrige Puncten B, C, D anrühren. Und dahero wird der Zirckel umb das □ geschrieben worden seyn.

Beweiß.

Dieweilen der ∠ a, und b zwey halb rechte Winckel seynd, so wird die Linie EB ⊓ seyn, der Linie EC. d. 34. 1. d. 6. 1.

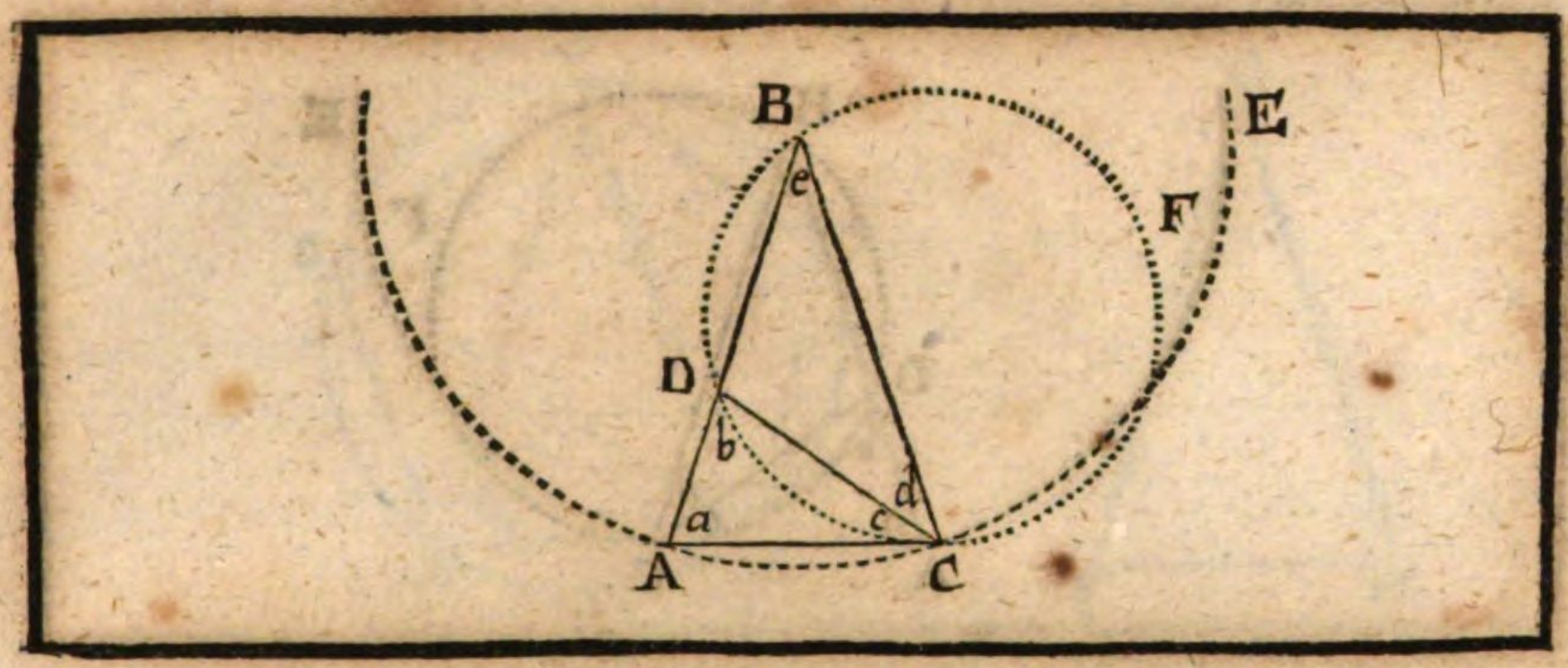
Und auff solche Weise wird auch ED ⊓ seyn der EC, und EA ⊓ der EB, das ist alle vier Linien EB, EC, ED, EA werden einander ⊓ seyn. d. 1. ax. 1.

Derohalben wird der Zirckel, so mit der Weite EA auß dem Punct E geschrieben worden ist, auch die übrige drey Puncten B, C, D anrühren.

Welches zu machen ware.

Anmerckung.

Wann umb den gegebenen Zirckel ein □ geschrieben, und in denselben Zirckel ein □ eingeschrieben wird: so wird das umbschriebene □ doppelt des eingeschriebenen □ seyn. Die Ursach ist, weilen die Seite deß umbschriebenen □ ⊓ ist, dem Diameter deß Zirckels, oder deß eingeschriebenen □ (wie es in der 7. dieses bewiesen ist), das □ aber auff den Diameter ist doppelt deß jenen □, dessen Diameter ist. d. 47. 1.



Die X. Vorgab.

Handgriff.

Einen zwey gleichseitigen Triangel (ABC) zu machen, dessen jeder Winckel insonderheit (a, oder c + d), bey der Basis (AC), zweymahlen so groß seye, als der übrige dritte Winckel (e) bey dem Spitz (B).

Handgriff.

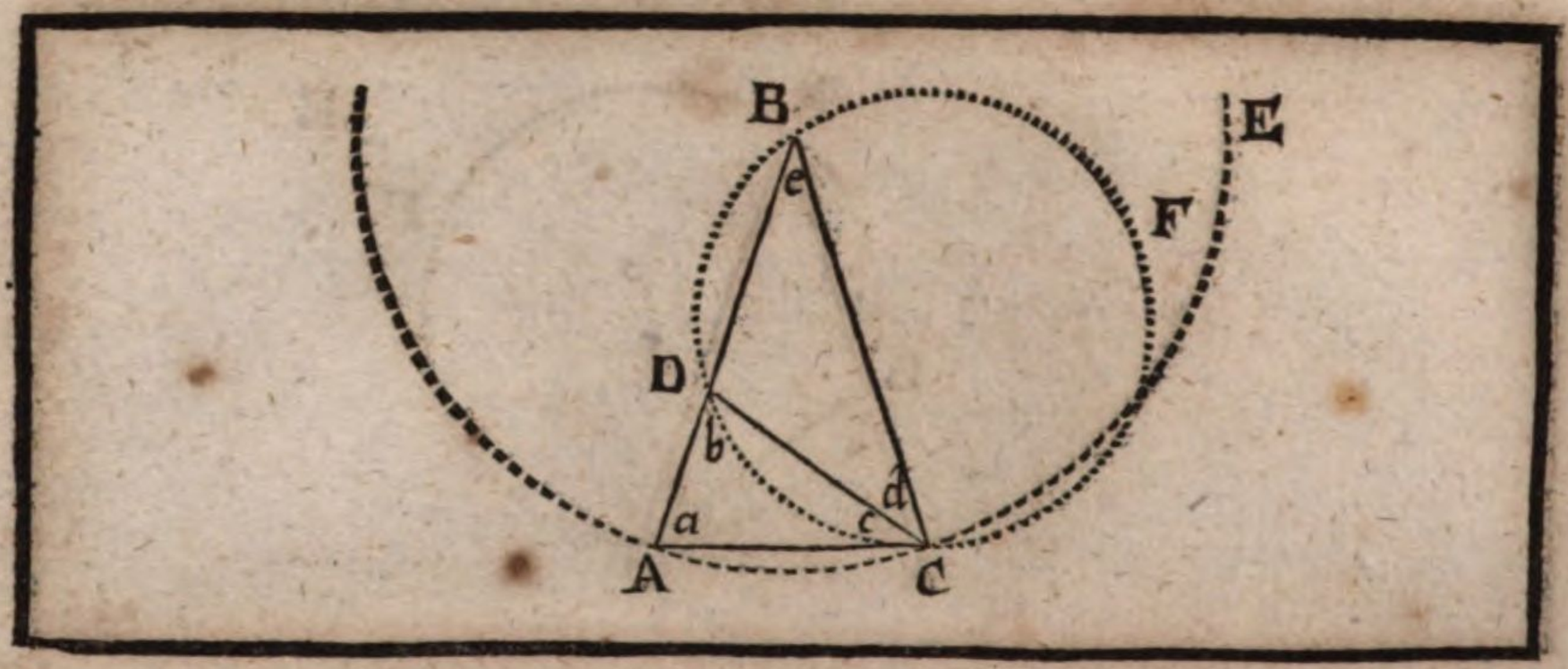
Schreibe nach Gefähr die gerade Linie AB.
Zertheile sie in dem Punct D also; daß das ▭ auff BA, und DA ⊓ seye, dem □ auff BD. d. 11. 2.
Hernach auß B, als auß dem Mittel-Punct, schreibe mit der Weite BA einen Zirckel ACE.
Stelle darein die Linie AC ⊓, dem Stück DB. d. 1. 4.
Hange B, C zusammen: so ist ein solcher △ ABC verfertiget.
Dann der Winckel a, oder c + d bey der Basis AC ist ein jeder insonderheit zweymahl so groß, als der dritte ∠ e bey der Spitze B.

Zubereitung.

Ziehe zusammen D, C, und schreibe umb den △ BDC den Zirckel CDBF. d. 5. 4.

Beweiß.

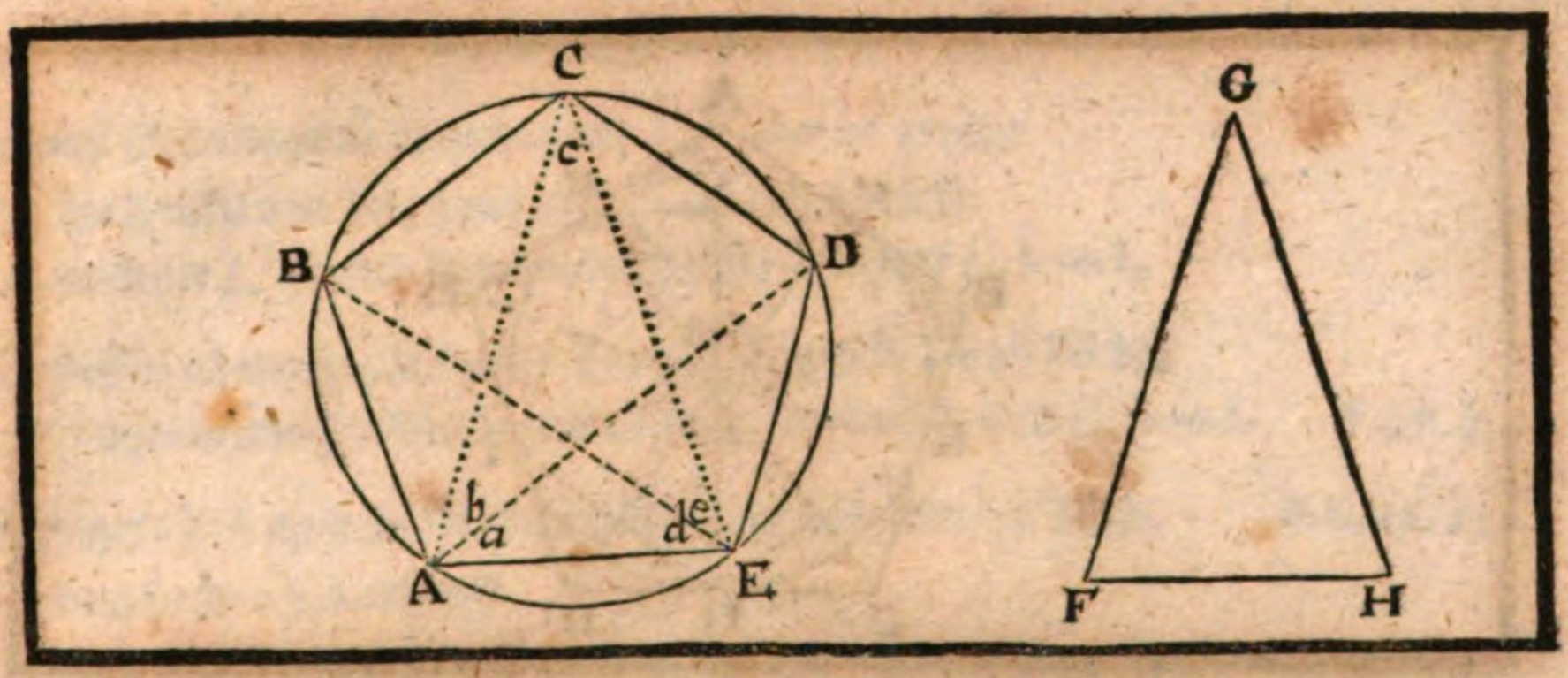
Weilen das ▭ BAD ⊓ ist, dem □ auff DB, oder AC, d. d. Hand.
(dann AC ist ⊓ gemacht worden der DB)
Und die Linie AB den Zirckel CDBF durchschneidet.
So wird nothwendig die Linie AC
solchen Zirckel im Punct C anrühren müssen. d. 37. 3.
Und deßwegen ist der ∠ c ⊓, dem ∠ e, d. 32. 3.
Setze unterdessen beyderseits hinzu den gemeinen ∠ d,
so wird der ∠ c + d ⊓ seyn, dem ∠ e + d.



Nun ist aber, der äussere ∠ b ⊓, beyden innern ∠ e und d. — d. 32. 1.
Also wird auch der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ c + d.
Unterdessen ist die Linie AB ⊓, der Linie BC. — d. 15. def. 1.
und folgends der ∠ a ⊓, dem ∠ c + d, (oder — d. 5. 1.
dem gleichen ∠ b. — d. d. Vor.
Dahero wird auch die Linie DC ⊓ seyn, der Linie AC. — d. 6. 1.
Die Linie AC aber ist ⊓ gemacht worden, der Linie DB. — d. d. Hand.
Darumb wird auch die Linie DB ⊓ seyn, der Linie DC.
und folgends der ∠ e ⊓ dem ∠ d. — d. 5. 1.
Auß dem Vorgehenden aber ist schon bewiesen worden, daß der ∠ b ⊓ seye denen beyden ∠ e nnd d.
Dahero schliesset man, daß der ∠ b zweymahlen so groß seye, als der ∠ e, bey der Spitze B.
Der ∠ b aber, ist auch ⊓ bewiesen worden, dem ∠ a oder dem gleichen ∠ c + d.) — d. d. Vor.
Folget dann letztlich, daß auch der ∠ a, oder c + d, nemlich ein jeder insonderheit, zweymahln so groß seye, als der ∠ e, bey der Spitze B.
Welches zu machen ware.

Folge.

Wenn ein △ auff solche Art gestaltet ist, daß die zwey Winckeln bey der Basis, ein jeder insonderheit zweymahln so groß ist, als der Winckel bey der Spitze: so wird ein solcher Winckel bey der Spitze $\frac{1}{5}$ von 2 rechten (oder $\frac{5}{5}$ seyn, das ist, wann ein jeder Winckel bey der Basis 72 Grad haltet, so wird der Winckel bey dem Spitze 36 Grad haben.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

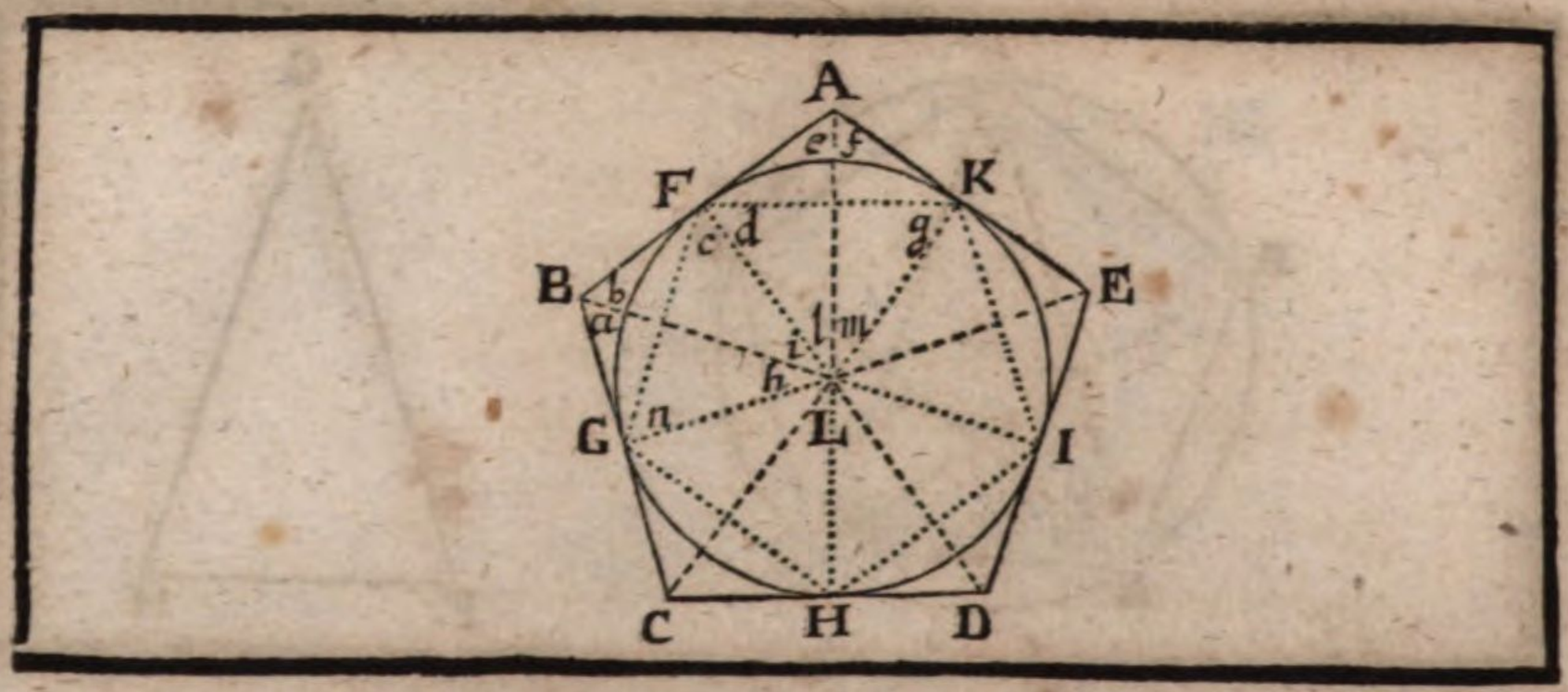
In einem vorgegebenen Zirckel (ABCDE) eine fünff-gleichseitige, und fünff-gleicheckichte Figur zu schreiben.

Handgriff.

Mache nach Gefallen einen zwey-gleichseitigen △ FGH:
dessen zwey ∠ bey der Basis, jeder insonderheit
zweymahlen so groß seye, als der ∠ bey dem Spitze. d. 10. 4.
Einschreibe einen solchen △ in den Zirckel ABCDE: d. 2. 4.
gleich wie allhier der △ ACE ist.
Zertheile die ∠ a + b, und d + e, gerandt entzwey mit denen d. 9. 1.
gezogenen geraden Linien AD, EB an dem Umbkreiß hinein.
Hange letztlich die Puncten A, B, C, D, E zusammen,
so ist es gemacht.

Beweiß.

Weilen die 5 ∠ a, b, c, d, e einander seynd □ gemacht worden: d. d. Hand.
So werden sie auff gleichen Umbkreiß-Stücken ED, CD, EA, AB, BC
stehen. d. 26. 3.
Dahero werden die Linien ED, CD, EA, BC auch einander □, d. 29. 3.
und die Figur fünff-gleichseitig seyn.
Ferners indeme das Umbkreiß Stück BC □ ist, dem Umbkreißstück DE. d. d. Vor.
(wenn man beyderseits hinzu setzet das gemeine Stück BAE)
So wird das Umbkreiß-Stück CBAE □ seyn, dem Stück DEAB.
und folgends der ∠ bey D wird □ seyn, dem ∠ bey C. d. 27. 3.
Auff solche Weiß werden auch die drey übrige ∠ einander □
bewiesen: dahero ist die Figur auch gleich-fünff-eckicht.
Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

Umb einen vorgegebenen Zirckel (FGHIK) eine gleich- fünffseitige, und gleich-fünffeckigte Figur zu schreiben.

Handgriff.

Schreibe in dem Zirckel die gleich-fünffseitige, und gleich-fünffeckichte Figur FGHIK ein. d. 11. 4.

Ziehe auß dem gefundenen Mittel-Punct L in die fünff Ecke die geraden Linien LF, LG, LH, LI, LK; welche den Umbkreiß deß Zirckels berühren.

Auff sothaner Linien Ende F, G, H, I, K, oder Berührung deß Zirckels, ziehe die anrührende Linien AB, BC, CD, DE, EA, welche sich in den fünff Ecken A, B, C, D, E werden zusammen stossen, und die verlangte Figur machen, (wie es in dem vorgehenden schon bewiesen worden ist). d. 17. 3.

Entzwischen ziehe die Puncten LD, LE, LA, LB, LC zusammen.

Beweiß.

Dieweilen auß dem Punct A die zwey Linien AF, AK, (so den Zirckel in denen Puncten F, und K berühren) gezogen seynd. d. d. Hand.

So wird die Linie AF ⊓ seyn, der Linie AK d. Cor. 2. 36. 3.

Nunmehro seynd in dem △ FAL die Seiten AF, und FL ⊓, denen zwo Seiten AK, und KL in dem △ KAL [d. d. Vor. und 15. def. 1.

Die Seiten LA ist auch beyden △ gemein.

Dahero wird der △ FAL ⊓ seyn, dem △ KAL. d. 8. 1.

Und folgends der ∠ I ⊓, dem ∠ m.

Eben auff diese Art, wird der ∠ h ⊓ seyn, dem ∠ i.

Darauß schliesset man aber, daß der ∠ l, oder m geradt
die Helffte von dem gantzen ∠ l + m seyn müsse
auch der ∠ h, oder i geradt die Helffte von dem ∠ h + i.

Unterdessen ist wegen gleicher Seiten und Bögen FK, und FG deß
eingeschriebenen Fünff-Ecks, der ∠ l + m ⊓, dem ∠ h + i. d. 27. 3.

So folget, daß auch die Helffte, nemlich der ∠ i, oder h ⊓ seye, d. 6. ax. 1.
dem halben ∠ l, oder m.

Ferner ist in dem △ FBL der ∠ BEL ⊓, dem ∠ AFL im △ FAL, d. d. Hand.
und der ∠ i ⊓, dem ∠ l: und die Seiten FL beyden △ gemein. d. d. Vor.

Deßwegen wird der △ FBL ⊓ seyn, dem △ FAL, d. 26. 1.
und folgends die Linie BF ⊓, der Linie AF.
Auff solche Weise ist auch EK ⊓, der Linie AK.
Das ist, AF wird geradt die Helffte von AB: und AK von
AE seyn.

Es ist aber bewiesen worden, daß AF ⊓ seye, AK. d. d. Vor.
Deßwegen die gantze Seiten AB ⊓ seyn werde, der gantzen
Seiten AE. d. 2, ax. 1.
u. s. f. werden alle Seiten dieser Figur einander gleich seyn.

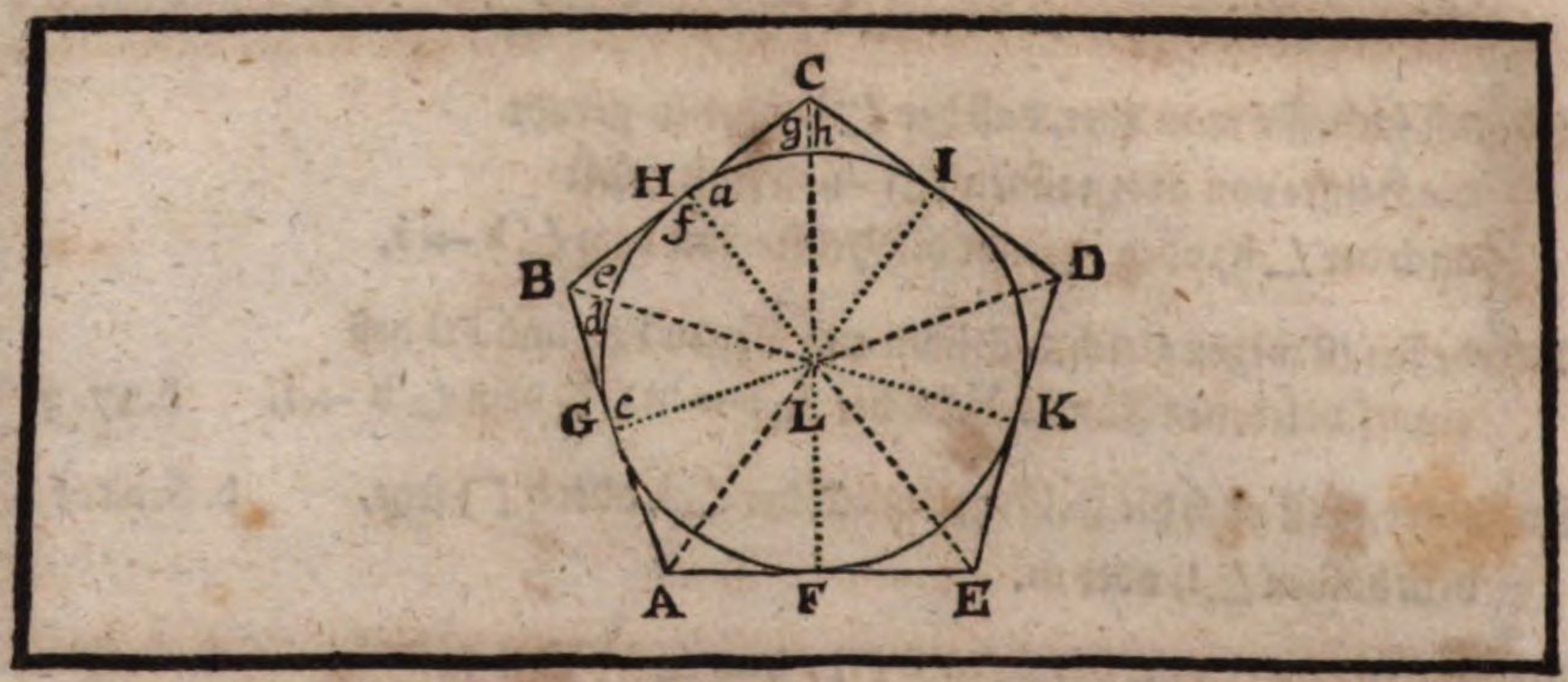
Sie ist auch gleichwincklicht: dann in denen zwey vierseitigen Figuren
LGBF, und LFAK (deren Winckeln sammentlich in einer jeden d. an. 32. 1.
vier rechten gleich seynd) seynd die zwey ∠ bey G, und F. d. d. Hand.
Und abermahlen die zwey ∠ bey F, und K zwey rechte:

So ist auch der ∠ h + i ⊓, dem andern ∠ l + m. d. d. Vor.

Wenn man nun beyderseits die gleichen ∠ von denen vier rechten
abziehet, so wird überbleiben der ∠ a + b ⊓, dem ∠ e + f.
u. s. f.

Dahero ist die umbschriebene Figur auch gleich- fünff-eckicht.

Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Handgriff.

In eine gleich-fünfffeitige, und gleich-fünffeckichte Figur (ABCDE) einen Zirckel (FGHIK) einzuschreiben.

Handgriff

Zertheile geradt entzwey diezween nechst an einander gelegene ∠ d + e, und g + h mit denen geraden Linien BL, und CL, welche nothwendig in einem Punct, als nemlich in L werden zusammen kommen müssen, (dann weder der ∠ e, noch der ∠ g rechte ∠ seynd). — d. 9. I. — d. 11. ax. I. — d. d. Vorg.

Auß L ziehe die Bleyrechte Linien LF, LG, LH, LI, LK auff die Seiten AE, AB, BC, CD, DE. — d. 12. I.

Schreibe letztlich auß dem Punct L mit der Weite LG, oder LH, u. s. f. einen Zirckel, welcher auch die übrige vier Seiten berühren werde.

Beweiß.

In dem △ CHL ist der ∠ a ⊓, dem ∠ f in dem △ BHL und der ∠ g ⊓, dem ∠ e. — d. d. Hand. — d. d. Hand.

Auch die Seiten LH ist beyden △ gemein.

Dahero ist der △ CHL ⊓, dem △ BHL. — d. 26. I.

Und folgends die Linie CH ⊓, der Linie HB.

Also wird auch die Linie BG ⊓ seyn, der Linie GA.

Die gantze Seiten CB, und BA seynd aber einander gleich. — d. d. Vorg.

Dahero werden ihre Helffte, als wie HB und BG, auch einander gleich seyn. — d. 6. ax. I.

Unterdessen ist wegen der rechten ∠ f, und c das □ auff BL ⊓, denen zwey □, so wohl auff LH, und HB, als denen zwey □ auff LG, und BG. — d. 47. I.

Wenn nun beyderseits die □ auff denen gleichen Linien HB, und BG abgezogen werden:

So wird überbleiben das □ auff LH ⌐, dem □ auff LG, und wird auch die Linie LH ⌐ seyn, der Linie LG. d. 4. an. 46. 1.

Auff solche Manier werden die übrige Linien LI, LK, LF einander ⌐ seyn.

Darauß schliesset man, daß der Zirckel, so auß dem Punct E mit der Weite LG beschrieben worden ist, auch die übrige vier Seiten berühren werde. Und dahero in die Figur eingeschrieben seye.

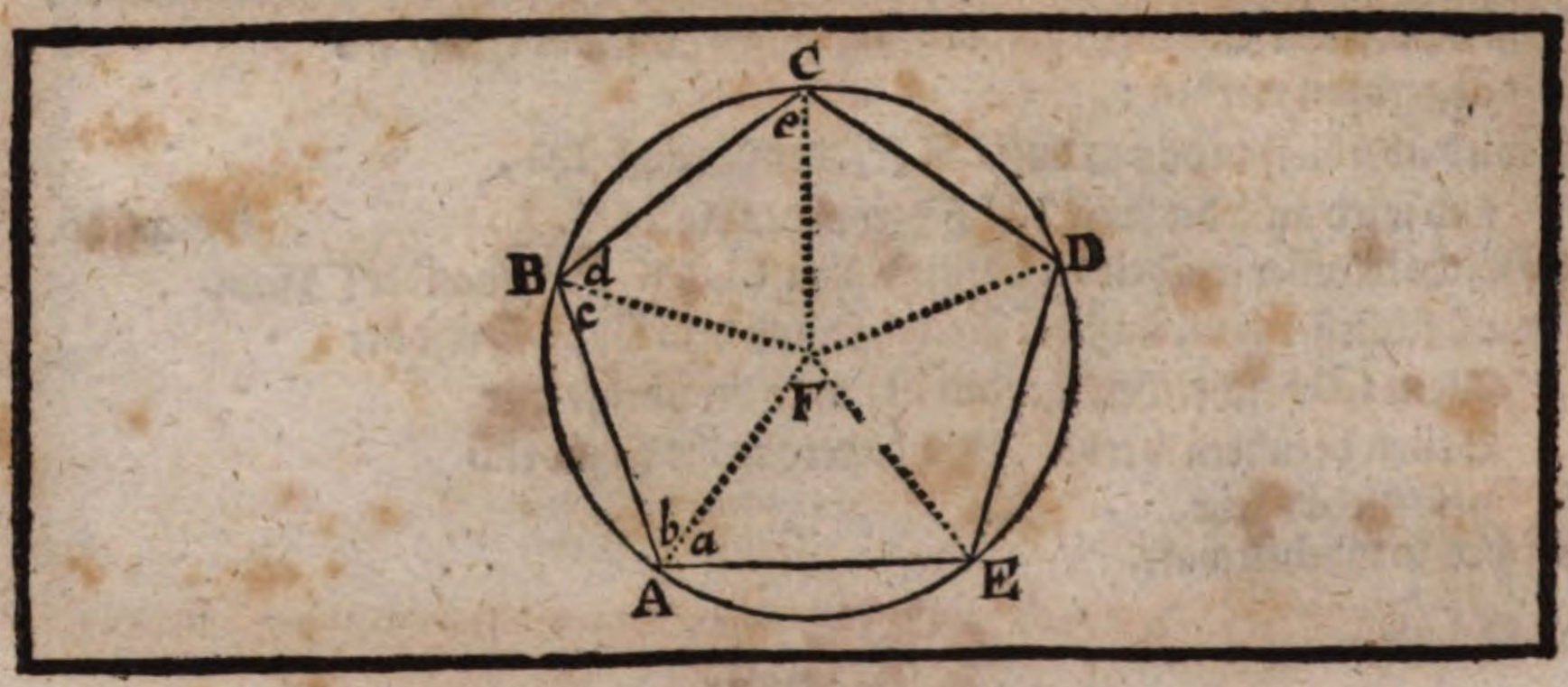
Welches zu machen ware.

Folge.

Wenn in einer gleichseitigen, und gleichwincklichten Figur, die zween nechstgelegene ∠ mit zwey geraden Linien, (welche sich einander durchschneiden) gleich entzwey zertheilt werden; Auß dem Durchschnitts-Punct hernach man auch in die übrige ∠ der Figur gerade Linien ziehet: so werden alsdann die übrige ∠ der Figur hierdurch auch gleich entzwey geschnitten werden.

Anmerckung.

Auff diese Art kan man in eine jede gleichseitige, und gleich-eckichte Figur einen Zirckel einschreiben.



Die XIV. Vorgab.

Handgriff.

Umb eine fünff-gleichseitige, und gleich-fünff-eckichte Figur (ABCDE) einen Zirckel zu schreiben.

Handgriff.

Zertheile geradt entzwey die zween ∠ a + b, und c + d: mit denen zwo geraden Linien AF, BF, welche nothwendig in einem Puncten, als wie hier in F zusammen kommen werden. Welches in dem vorhergehenden schon bewiesen worden ist. d. 9. I. d. 11. ax. I.

Auß F ziehe in die übrige ∠ E, D, C gerade Linien.

Alsdann auß F mit der Weite FA schreibe einen Zirckel, welcher umb die übrige vier Ecke der Figur gehen werde.

Beweiß.

Die gantze ∠ A, B, C, D, E seynd einander ⊓, d. d. Vorg.
Dahero auch ihre Helffte a, b, c, d, e. u. s. f. d. Cor. 13. 4.

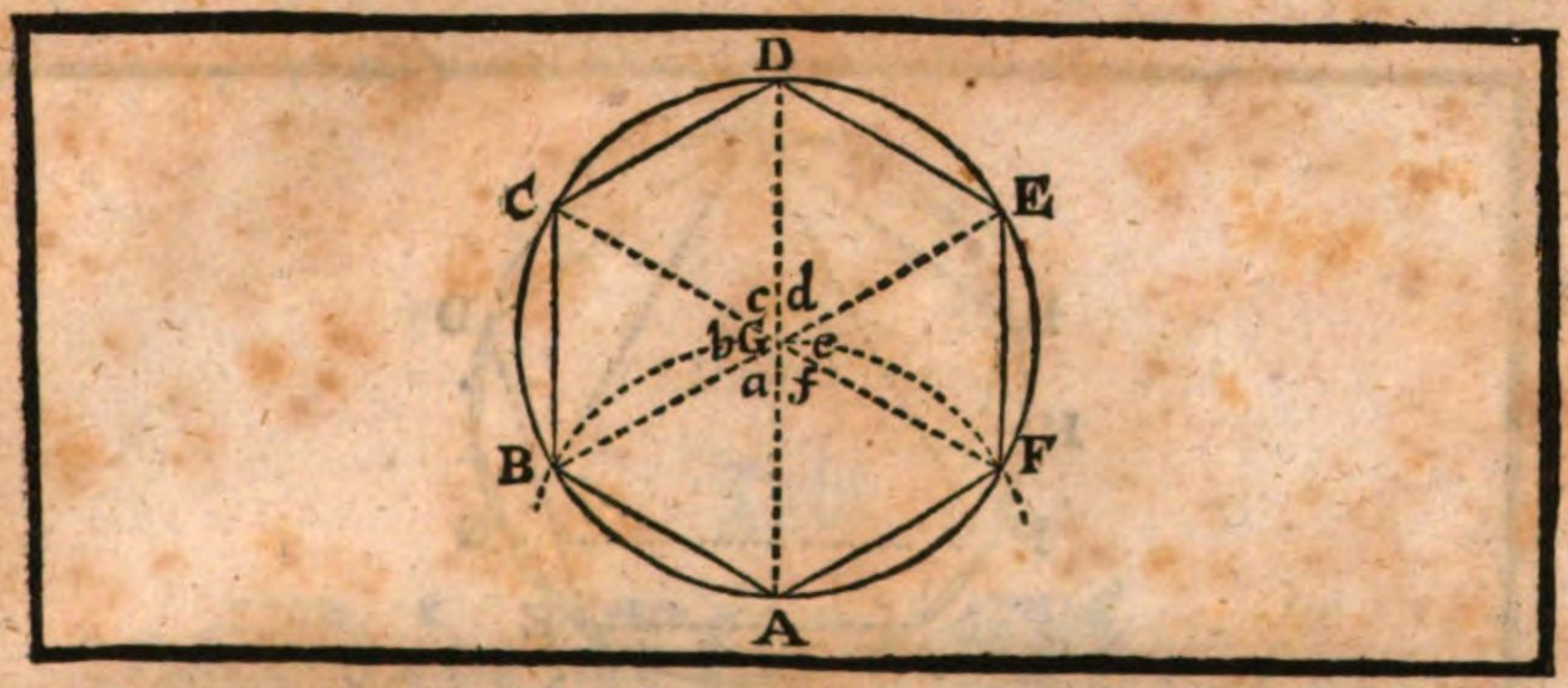
Nun seynd in dem △ CFB die ∠ d, und e ⊓,
den ∠ c, und b im △ BFA
und die Seiten BC ist ⊓, der Seiten BA. d. d. Hand.

Folget, daß auch CF ⊓ seye, der AF: d. d. Vorg.

Auff solche Weise werden alle Linien CF, BF, AF, EF, DF d. 26. I.
einander ⊓ seyn,

Darumb wird der Zirckel, welcher auß F, mit der Weite FA, ist beschrieben worden, auch durch die eusserste Ende, als durch B, C, D, E gehen, und die Ecke der Figur anrühren.

Welches zu machen ware.



Die XV. Vorgab. Handgriff.

In einem vorgegebenen Zirckel eine gleich-sechs-eckichte, und gleich-sechs-seitige Figur (ABCDEF) einzuschreiben.

Handgriff.

Ziehe den Diameter AD. Nehme die Helffte AG, und schreibe auß A einen Zirckel, welcher den vorgegebenen in denen zwey Puncten B, und F durchschneiden, und zwey drey-gleich-seitige △ ABG, und AFG gestalten werde. d. 1. 1.

Auß B, und F ziehe durch den Mittel-Punct G die geraden Linien BGE, FGC, biß in den Umbkreiß, und hange hernach die Puncten A, B, C, D, E, F zusammen, so ist es gemacht.

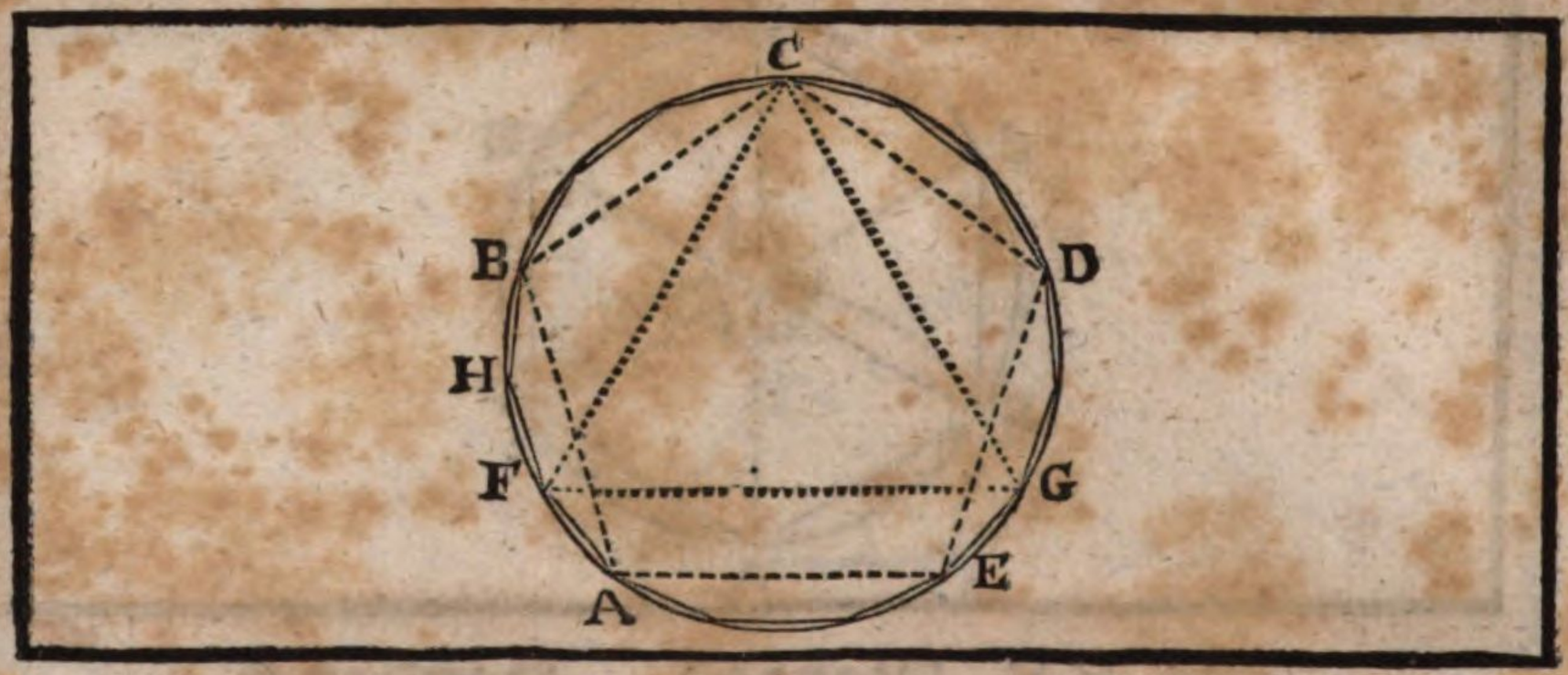
Beweiß.

Die zwey △ BGA, AGF seynd gleichseitig, und gleichwincklicht, { d. d. Hand. und 5. 1.
Dahero geltet ein jeder ∠ darvon, als wie a, und f $\frac{1}{3}$ zweyer rechten. d. 3. Cor. 32. 1.

Und folgends werden die zwey ∠ a und f □, $\frac{2}{3}$ von zweyen rechten seyn.
Unterdessen wegen der geraden Linie BGE, seynd die drey ∠ a + f + e □, zween rechten: d. 13. 1.
Dahero ist auch der ∠ e □, $\frac{1}{3}$ zweyer rechten.
Nun seynd die ∠ a + f + e □, denen überstehenden ∠ d + c + b. d. 15. 1.
Deßwegen werden alle diese sechs ∠ einander □ seyn,
Und folgends werden die sechs Umbkreiß-Stücke, worauff sie stehen, d. 26. 3.
und hernach die sechs Seiten einander □ seyn. d. 29. 3.
Letztlich seynd die sechs ∠ ABCDEF wegen der gleichen ∠ bey dem Mittel-Punct G auch einander □; d. d. Vor.

(Dann ein jeder $\frac{2}{3}$ geltet) dahero ist die Figur auch gleich-eckicht.
Welches zu machen ware.

Folge. Die Seiten eines gleich-seitigen und gleich-eckichten Sechs-Eck ist □, dem halben Diameter desselben Zirckels, in welchen diß Sechs-Eck eingeschrieben ist.



Die XVI. Vorgab.

In einem vorgegebenen Zirckel eine gleich-funfftzehn-seitige, und gleich-funfftzehn-eckichte Figur einzuschreiben.

Handgriff.

Schreibe den gleichseitigen △ FCG in den Zirckel ein, d. 2. 4.
Abermahlen auß C. schreibe die fünff-gleichseitige und gleich-fünff-eckichte Figur ABCDE ein. d. 11. 4.
Zertheile das Umbkreiß-Stück FB gleich entzwey im Punct H. d. 30. 3.
Nun sage ich, daß FH, oder CH ein gleicher Theil oder Seiten von denen funfftzehen seye.

Beweiß.

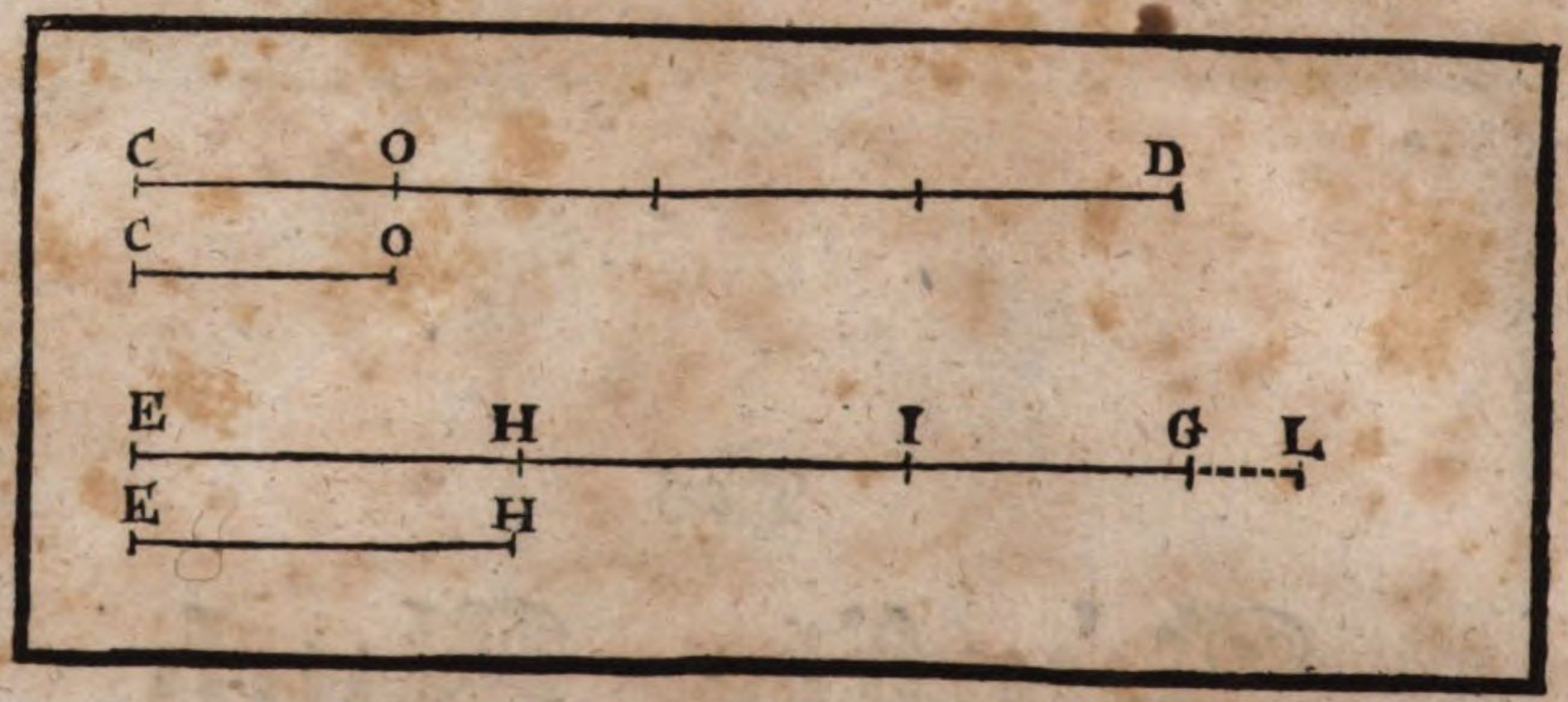
Weilen der gantze Umbkreiß des Zirckels, 15. gleiche Theile halten solte: d. d. Vorg.
So wird die Seiten CF deß △ FCG fünff von diesen gleichen Theilen, das ist $\frac{5}{15}$, unterspannen.
Und die Seiten BC deß Fünff-Ecks, drey von diesen Theilen, oder $\frac{3}{15}$.
Der Unterschied aber zwischen den Bogen CF, und CB ist das Umbkreiß-Stück BF, oder $\frac{2}{15}$. d. d. Hand.
Dahero wird FH, oder FB nothwendig $\frac{1}{15}$, oder nur ein gleicher Theil von den 15. seyn müssen. d. d. Hand.
Ziehet man letzlich FH, oder FB zusammen, und stellet solche Länge 15 mahln in den Zirckel herum,
So wird die verlangte gleich-15-seitige, und wincklichte Figur darauß erwachsen. [d. 4 1. u. 2. 27. 3.
Welches zu machen ware.

Das

Fünffte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort-Erklärungen.

I.

Ein Theil (Pars) ist eine kleinere Grösse, welche in einer grössern etliche mahln begriffen ist, und solche außmesset.

Also wird CO ein Theil der Grösse CD seyn: dann die kleinere CO, die andere und grössere CD viermahlen auffmesset; oder, so ein Ding ist, weilen die grössere CD die kleinere CO viermahlen begreifft, so wird deßwegen CO ein Theil von CD seyn.

Anmerckung.

1.

Das Außmessen und Begreiffen ist zweyerley, wenn ein Theil eine Grösse geradt auffmesset, oder wenn das Gantze diesen Theil geradt begreifft, daß nichts übrig verbleibet, so nennet man einen solchen Theil, einen geradt-auffmessenden Theil, in Latein (pars aliquota). Also ist allhier CO ein geradt-auffmessender Theil der Grösse CD: dann CO die Grösse CD gerad viermahlen auffmesset, (oder so ein Ding) CD begreiffet den Theil CO geradt viermahlen.

2.

Herentgegen ein Theil, welcher eine Grösse nicht geradt auffmesset, oder daß das gantze diesen Theil nicht geradt begreifft, sondern jederzeit etwas zu viel, oder zu wenig überbleibet: so wird ein solcher Theil ein nicht geradt auffmessender (Pars aliquanta) genannt.

Zu einem Exempel, wenn man den Theil EH dreymahln nemmet, so übertreffet er die Grösse EG umb das Stück GL; nemmet man aber EH zweymal, so gehet noch das Stück IG ab; diesem nach wird EH ein nicht geradt auffmessender Theil der Grösse EG genandt.

3.

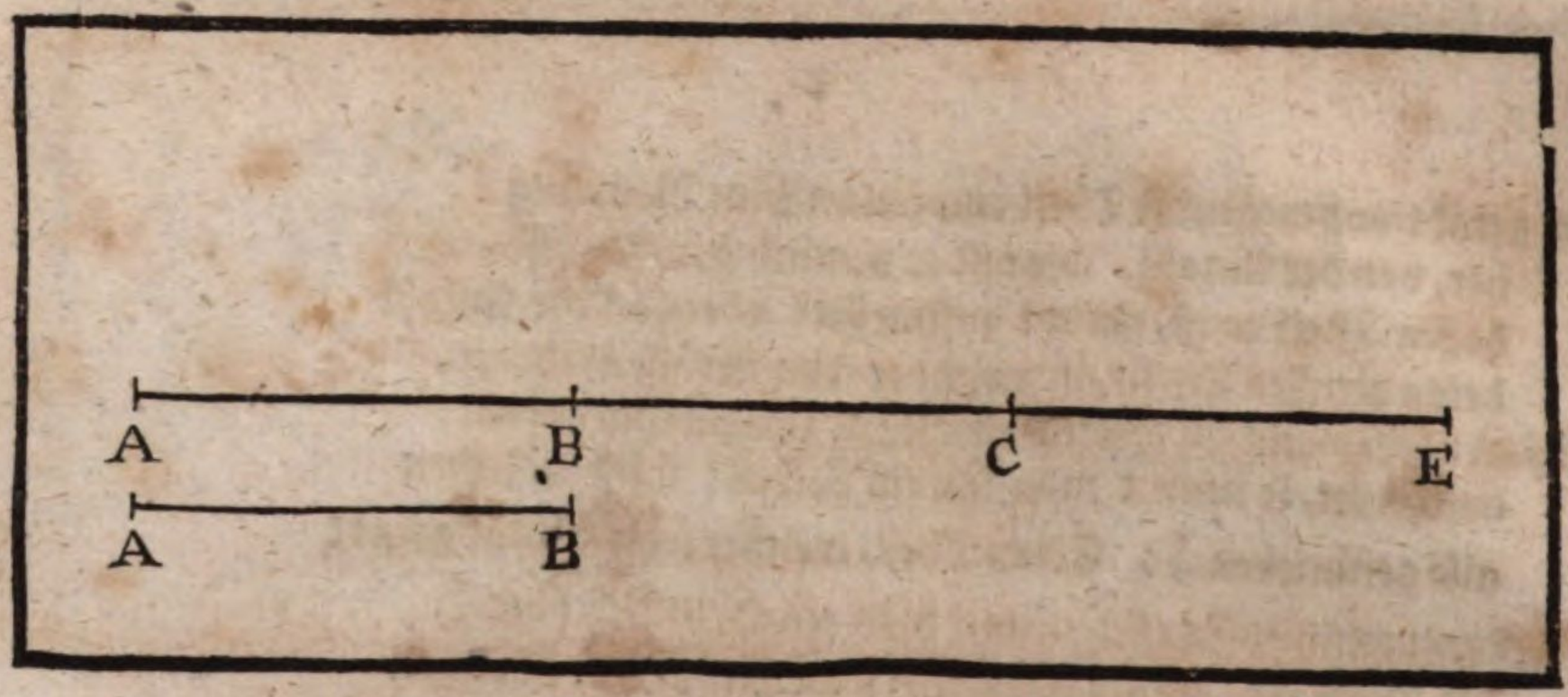
Ein geradt-auffmessender Theil empfanget seine Nennung her, von der Anzahl, wie offt er nemlich seine Grösse, dessen Theil er ist, geradt auffmesset: oder von der Anzahl deren gleichen Theile, in welche er seine Grösse abtheilet. Diesem nach, wann ein Theil seine Grösse zweymahln geradt auffmesset, so nennet man ihn ein halbes; wird in Ziffern also geschrieben $\frac{1}{2}$: Einen Theil, welcher seine Grösse geradt dreymahln auffmesset, nennet man ein Drittheil, oder $\frac{1}{3}$. der viermahln geradt auffmesset seine Grösse, ein Viertheil oder $\frac{1}{4}$. u. s. f.

4.

Es geschicht, daß bißweilen ein nicht geradt auffmessender Theil einer Grösse, dannoch gewisse geradt-auffmessende Theile, welche ihn, und seine Grösse geradt auffmessen, habe, als wie 10 ist ein nicht geradt-auffmessender Theil von 16, hat doch ein gewissen geradt-auffmessenden Theil, nemlich 2. welcher ein Achttheil von 16, und ein Fünfftheil von 10. ist. Deßwegen werden 10. fünff Achttheil von 16. seyn, welches man alsdann auff solche Art schreibet $\frac{5}{8}$.

5.

Man nennet so wohl die geradt, als nicht geradt-auffmessende Theile, Brüche oder Fractionen ihrer Grösse, darvon sie Theile seynd; sie werden also gezeichnet, daß allzeit die Theile von ihrer Grösse oder einer Linien, und ihr gantze Grösse unter der Linien geschrieben seynd. Die oben stehende Zahl oder Theile, werden hernach der Zehler, die unter den Strich aber, oder ihr gantzes, der Nenner genandt. Also in dem Bruch $\frac{2}{3}$. ist 2. der Zehler, und der 3. der Nenner. Von diesen ist ein mehrers in der Rechen-Kunst zu finden.



II.

Eine Grösse, in welcher der kleinere Theil in gewisser Anzahl geradt-auffmessend begriffen ist, nennet man eine vielfache Grösse (multipex).
Die Linie AE ist eine vielfache Grösse der kleinern AB: dann AB dreymahlen genommen, die Grösse AE auffmesset.

Anmerckung.

I.

Eine vielfache Grösse, welche einen kleinern Theil in gewisser Anzahl geradt-auffmessend begreiffet, wird schlecht hin Vielfache (multiplex), die kleinere Grösse aber, oder eine Theil, welcher in der vielfachen geradt begriffen ist, Unter-vielfach (submultiplex) genandt; auff solche Weise ist die Linie AE von 3 Schuh lang, die vielfache, und der Theil, oder die Linie AB, so 2 Schuh lang ist, die Unter-vielfache der Linie AE.

2.

Gleichformig-vielfache Grösse seynd, welche in gleicher Anzahl ihre Theile, deren sie ihre vielfache seynd, begreiffen: oder, so ein Ding ist, welche gleich auffgemessen werden von ihrem Theile. Nach solcher Art seynd zwey Linien, deren eine 25, die andere aber 15 Klaffter lang ist, gleichformig-vielfache Grössen zweyer andern Linien, deren eine 5, die andere aber 3 Klaffter lang ist, die Ursach ist, weilen 25, so offt durch 5, nemlich fünffmahln, als 15 durch 3, nemlich auch fünffmahl geradt auffgemessen wird, Solche Theile 5 und 3 hernach werden auch gleichformige Theile ihrer Grössen 25 und 15 genandt.

III.

Wenn zwey Grösse von einerley Gattung, ihrer Grösse halber, gegen einander gehalten und verglichen werden, so nennet man die Beziehung, welche eine zu der andern hat, eine Verhältnuß (Ratio).

Anmerckung. I.

Durch die Grösse, so in Latein quantitas genannt wird, verstehet man hierinnen nicht allein, was lang, breit und tieff ist, oder andere Außtennung und Dicke hat; sondern man nennet auch dasjene allhier eine Grösse, welches nur das Mehr, und das Weniger leydet. Gleich wie die Gewichter, Stärcke, Bewegung, Stimme, Zeite, Lauff, u. s. f. dann man jederzeit sagen kan, daß Gewicht ist mehr schwer, oder schwerer, als das andere; diese Stärcke ist weniger starck (oder mit einem Wort) schwächer, als die andere; diese Bewegung ist mehr schnell, od er schneller, als die andere; diese Stimme ist ein wenig höher, oder, so ein Ding, höher, als die andere, u. s. f.

2.

Wenn eine Vergleichung angestellt wird, so müssen die zwey Grösse allzeit einerley Gattung, oder Geschlechts seyn: als wie Zahlen gegen Zahlen, Linien gegen Linien, Mässe gegen Mässe, Bewegung gegen Bewegung, u. s. f. beyde hernach können gleich oder ungleich einander seyn.

3.

Wenn nun beyde Sachen, so man gegen einander vergleichet, gleiche Grösse haben; als wie zu einem Exempel, man vergleichet eine gerade Linie von zwey Schuhen, zu einer andern geraden Linie eben von 2 Schuhen lang, so wird demnach in solcher Gegeneinanderhaltung und Vergleichung die Verhältnuß, Eine **Verhältnuß einer Gleichheit** (Ratio Æqualitatis) genandt.

4.

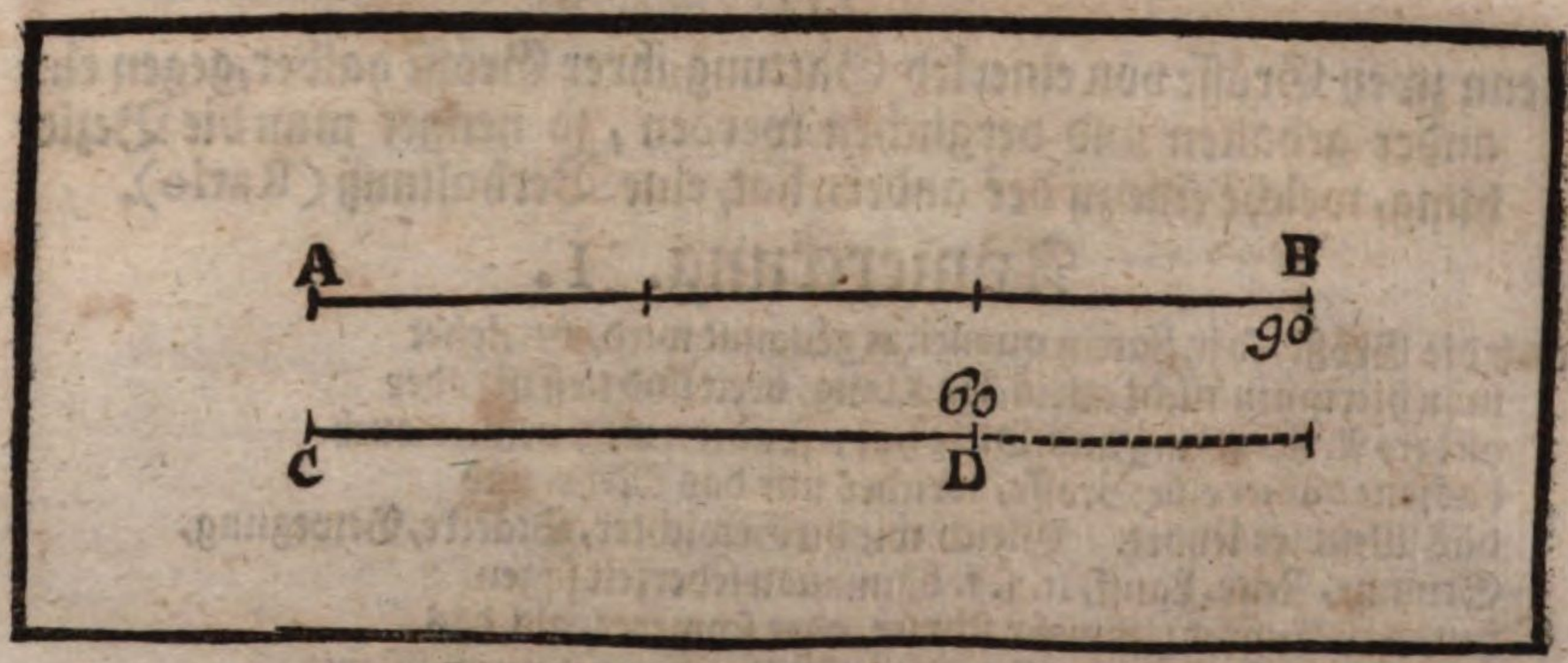
Seynd aber die gegen einander gehaltene Dinge von einer verschiedener Grösse; gleich wie, wann man eine Länge von 4. Schuhen, gegen einer kürtzern von 2 Schuhen vergleichet, so heisset man die Verhältnuß, so eine gegen der andern hat, eine **Verhältnuß einer Ungleichheit** (Ratio inæqualitatis).

5.

Die erste Grösse, oder Sach, so zu der andern in einer Vergleichung gehalten wird, nennet man das **Vorgehende** (Antecedens); die andere aber, zu welcher die erste gehalten worden, das **Nachgehende, oder Folgende** (Consequens).

6.

Eine **Verhältnuß einer grössern Ungleichheit** ist, wann in einer Vergleichung das Vorgehende grösser, als sein Nachgehendes, ist.



Als wie in diesem Exempel, wann eine Linie AB von 90 Schuhe lang zu einer andern, und kürtzern, als wie CD von 60 Schuhe lang verglichen wird.

7.

Eine Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit ist, wann in der Vergleichung, das Vorgehende kleiner, als das Nachgehende, ist: also wann man die kürtzere Linie CD von 60 Schuhen, zu der längern AB von 90 Schuhen haltet und vergleichet.

8.

Die Grösse der Verhältnuß einer Sache zu der andern in einer Vergleichung, wird durch die Zertheilung gefunden. Dann man zertheilet die Anzahl der Grösse deß Vorgehenden, durch die Anzahl der Grösse deß Nachgehenden. Die neu entstandene Anzahl, oder Quotient, weiset hernach die Grösse der Verhältnuß an, umb welche eine die andere übertreffet, oder ob beyde gleich seynd. Zu einem Exempel, es seynd die zwey Linien AB, CD von ungleicher Grösse, die erste ist 90 die andere 60 Schuh lang. Nun zu wissen die Verhältnuß ihrer Grösse, so zertheilet man 90 durch 60, wodurch der Quotient $1\frac{30}{60}$, oder $1\frac{1}{2}$ entstehet, welcher die Grösse der Verhältnuß der Linie AB, zu der Linie CD ist; und sagen will, daß erstlich die Linie AB einmahln so groß seye, als die Linie CD, hernach über diß, daß die Linie AB noch die Helffte von der Linie CD habe. Das ist, die Linie AB ist anderthalb mahl so groß, als die Linie CD Wann nun die andere Linie CD, so 60 Schuhe lang ist, noch ihre Helffte, nemlich 30 Schuhe, welche ihr abgehen, darzu hätte, so würde sie gleich lang der ersten seyn, das ist, sie hätte auch eine Länge von 90 Schuhen.

9.

Ein solcher Abgang wird genandt, **Unterscheid** (differentia).

10.

Wann in einer Verhältnuß einer grössern Ungleichheit das Vorgehende seines Nachgehenden vilfach ist, nemlich, daß sie es geradt zweymahln, dreymahln, viermahln, u.s.f. begreiffet, allzeit ohne Bruch, so wird

die Grösse der Verhältnuß, oder kurtz hinweg, die Verhältnuß, zweyfach oder doppelt, dreyfach, vierfach, u. s. f. genandt (Ratio dulpa, tripla, quadrupla) also ist die Verhältnuß 8 zu 4, doppelt, 12 zu 3 ist vierfach.

Entgegen in einer Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit, wann das Nachgehende seines Vorgehenden vielfach ist, nemlich daß sie es geradt zweymahln, dreymahln, viermahln, u. s. f. begreiffet, allzeit ohne Bruch, so wird die Verhältnuß, unter doppelt, unter dreyfach, unter vierfach, u. s. f. geheissen (Ratio subdupla, subdripla, subquadrupla), Also ist die Verhältnuß 4 zu 8 unterdoppelt, 3 zu 12 unter vierfach.

11.

Wann in einer Verhältnuß einer grössern Ungleichheit das Vorgehende sein Nachgehendes erstlich geradt einmahlen, hernach noch nur einen geradt-auffmessenden Theil darvon, auff solche Gestalt begreiffet, daß die Grösse der Verhältnuß also seye $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. $1\frac{1}{4}$. u. s. f. so wird es genant eine übertheilige Verhältnuß (Ratio super particularis), und wegen den beygesetzten einigen geradt auffmessenden Theil, oder Bruch, eine und ein halbfache Verhältnuß; Eine und ein Drittheilfache; Eine und ein viertheilfache, u. s. f. (Ratio sesquialtera, sesquitertia, sesquiquarta). Also ist die Verhaltnuß 12 zu 8 übertheilig eine und anderthalbfache. 18 zu 15 übertheilig eine und ein fünfftheilfache

In einer Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit wird, gestalt dieser Sachen, bloß das Wörtlein Unten (sub) mit und vorgesprochen. Als wie in der Vergleichung 8 zu 12 ist die Verhältnuß unten übertheilig eine und anderthalb fache: 15 zu 18, unten übertheilig eine, und ein fünfftheilfache. (Ratio subsesquialtera, subsesquiquinta).

12.

Wann in einer Verhaltnuß einer grössern Ungleichheit das Vorgehende sein Nachgehendes erstlich geradt einmahln, hernach noch etliche geradt-auffmessende Theile, (welche aber kein gantzes machen) auff solche Weise begreiffet, daß die Grösse der Verhältnuß also seye $1\frac{2}{3}$. $1\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. so wird erstlich die Verhaltnuß eine übertheilende (superpartiens), wegen deren beygesetzten gerad-auffmessenden Theile aber, oder Bruch, eine und zwey Drittheil übertheilende. Ein und drey Viertheil übertheilende. Eine und sieben Achttheil übertheilende, genant (Ratio superbipartiens tertias, supertripartiens quartas, superseptupartiens octavas). Als wie in der Vergleichung 5 zu 3 ist die Verhältnuß ein und zwey Drittheil übertheilende. 21 zu 15, eine und zwey Fünfftheil übertheilende. 136 zu 72, ein und acht Neuntheil übertheilende. u. s. f.

In der Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit wird gestalt dieser Sachen, bloß das Wörtlein Unten (sub) mit und vorgesprochen. Als wie in der Vergleichung 3 zu 5 ist die Verhaltnuß unten-eine und zwey Drittheil übertheilende. 15 zu 21 ist unten-eine und zwey fünfftheil übertheilende. 72 zu 136 ist unten-eine und acht Neuntheil übertheilende

theilende (ſubſuperbipartiens tertias, ſubſuperbipartiens quintas, ſubſuperoctupartiens nonas).

13.

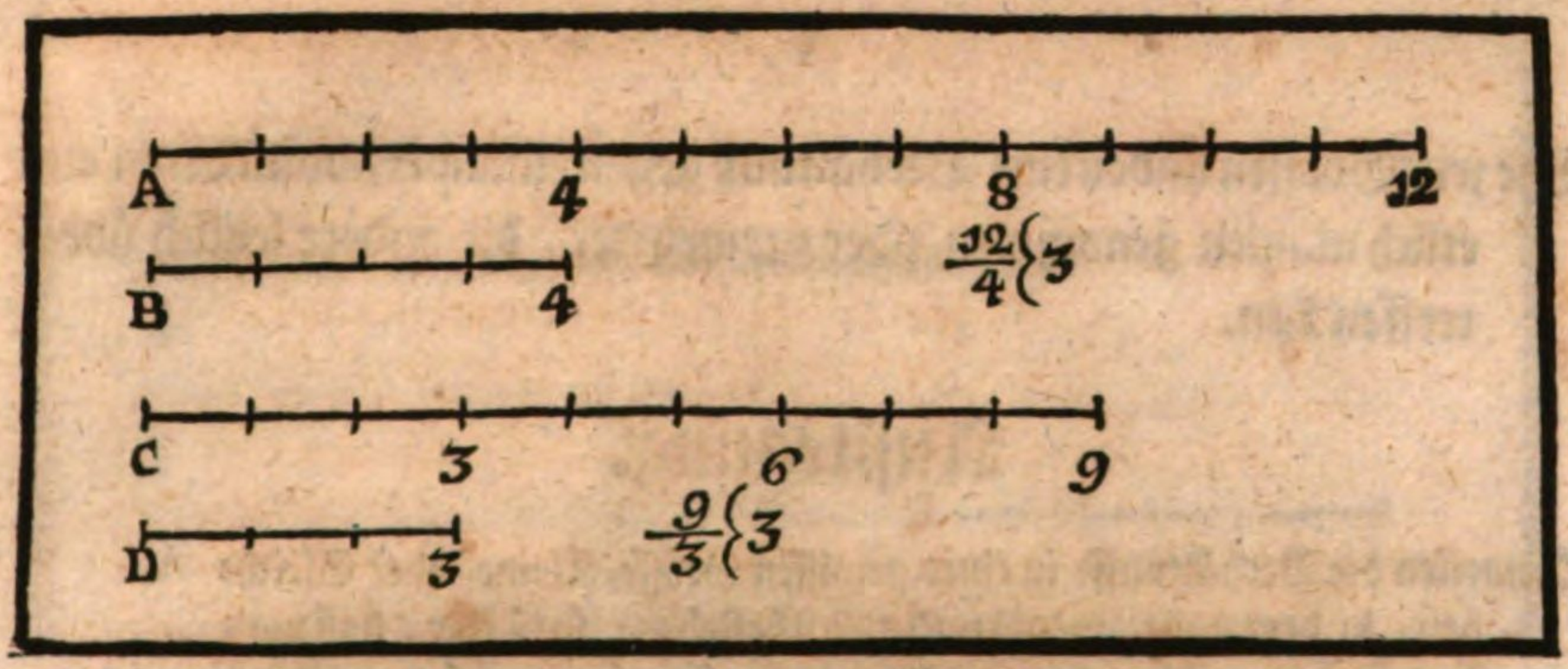
Wann in einer Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſeines Nachgehenden vielfach iſt, und nebſt diſen noch nur einen geradt-auffmeſſenden Theil darvon auff ſolche Weiſe begreiffet, daß die Gröſſe der Verhältnuß ſeye, als wie $2\frac{1}{8}.4\frac{1}{5}.8\frac{1}{1}$: ſo wird es genant eine vielfache übertheilige Verhaltnuß (Multiplex ſuperparticularis und wegen den beygeſetzten Bruch, oder einigen auffmeſſenden Theil, alſo ſammentlich außgeſprochen: Eine doppelte und eine achtfache Verhältnuß: Vier und ein Drittheilfache: acht und ein halbfache. (Ratio multiplex ſuperparticularis dupla ſeſquioctava. Quadrupla ſeſquitertia. Octupla ſeſquialtera. Alſo iſt in der Vergleichung die Verhältnuß 7 zu 2 drey und ein halbfach, 10 zu 3. drey und ein Drittheilfach. 31 zu 5 ſechs und ſechsfach (Tripla ſeſquialtera, Tripla ſeſquitertja ſextupla ſeſquiſexta).

Entgegen in einer Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit wird geſtalt dieſer Sachen bloß das Wörtlein **Unten** (ſub) mit und vorgeſprochen. Als wie in der Vergleichung 2 zu 7 iſt die Verhältnuß. Unten drey- und ein halbfach. 3 zu 10. Unten drey und ein Drittelfach. 5 zu 31 Unten ſechs und ein ſechsfach (Ratio ſubtripla ſeſquialtera. Subtripla ſeſquitertia. Subſextupla ſeſquiſexta).

14.

Wann letzlich in einer Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſeines Nachgehenden vielfach iſt, und nebſt dieſen noch etliche geradt-auffmeſſende Theil, welche nicht ein gantzes machen, auff ſolche Weiſe darzu begreiffet, daß nemlich die Gröſſe der Verhältnuß ſeye $2\frac{2}{3}.4\frac{3}{4}.6\frac{5}{6}$: ſo wird die Verhältnuß eine vielfache übertheilende (Multiplex ſuperpartiens), und wegen dero beygeſetzten geradt auffmeſſenden Theile, oder Bruchs, ſammentlich auff dieſe Weiſe außgeſprochen. Eine doppelte und zwey Drittheil übertheilende Verhältnuß Vierfache und dreyviertheil übertheilende. Sechsfache und fünff Sechstheil übertheilende. (Ratio multiplex dupla ſuperbipartiens tertias. Quadrupla ſupertripartiens quartas. Sextupla quintupartiens ſextas). Alſo wird in der Vergleichung 29 zu 7 die Verhältnuß ſeyn. Doppelt und ſechs Siebentheil übertheilende 19 zu 5, dreyfach und vier Fünfftheil übertheilende. 59 zu 10 fünffach und neun Zehentheil übertheilende. (Ratio dupla ſuperſextupartiens ſeptimas. Tripla quadrupartiens quintas. Quintupla Nonupartiens decimas).

In einer Verhaltung einer kleinern Ungleichheit, geſtalt dieſer Sachen, wird anders darinnen nicht verändert, als bloß das Wörtlein **Unten** wird mit und vorgeſprochen. Alſo in der Vergleichung 7 zu 20, iſt die Gröſſe der Verhältnuß unten doppelt, und ſechs Siebentheil übertheilend. 10 zu 59, unten fünffach, und neun Zehentheil übertheilend. 5 zu 19 unten dreyfach, und vier Fünfftheil übertheilend.



IV.

Eine Proportion ist eine Gleichformigkeit deren Verhaltnüssen.

Anmerckung.

1.

In Vergleichung zweyer Grössen von einerley Gattung ist die Beziehung, so eine zu der andern hat, eine Verhältnuß genandt, wie auß der 2. def. dieses Buchs abzunehmen ist. Wann nun mehr Grössen, als zwey, gegen einander vergleichet werden, und man ihre Verhältnusse einander gleichformig befindet, so nennet man hernach eine solche Gleichformigkeit deren Verhaltnüsse eine Proportion. Zu einem Exempel, wann die Verhältnuß der Grösse A zu der Grösse B gleichformig ist, der Verhältnuß der Grösse C zu der Grösse D, wie es sich auch allhier in der Warheit also befindet, dann beyderseits die Grösse der Verhaltnüsse, als wie 3 zu 1 seynd: So saget man demnach, daß ein solche Gleichformigkeit deren Verhältnüssen, eine Proportion seye.

2.

Was hier eine Proportion und eine Gleichformigkeit deren Verhältnüssen genannt wird, nennen bißweilen die Lateiner eine Proportionalität (Proportionalitas) und die Verhaltnuß allein eine Proportion: nach dieser Art wäre zwischen zweyen Grössen eine Proportion, und zwischen gleichförmigen Verhältnüssen eine Proportionalität.

V.

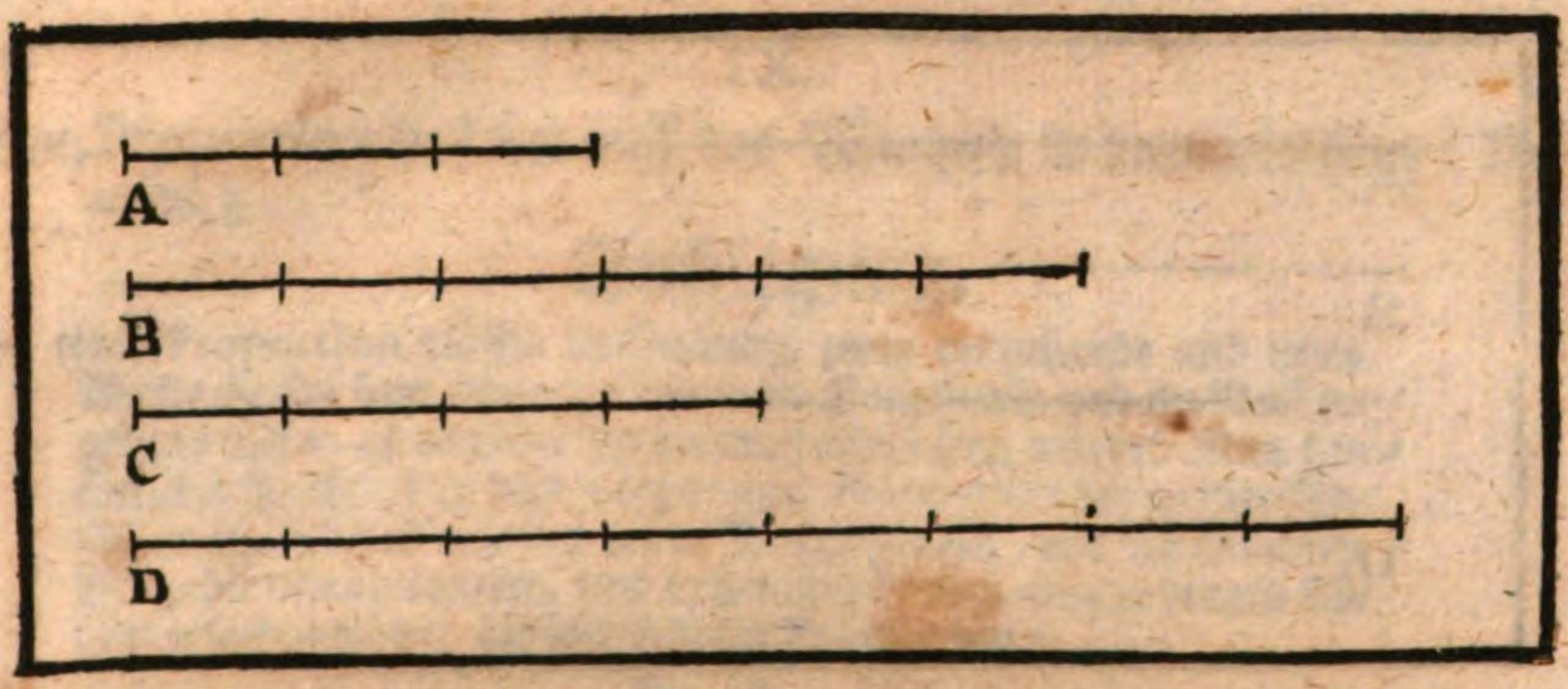
Die jene Grössen haben eine Verhältnuß gegen einander, wann deren eine etlich mahlen genommen, oder vermehrter, die andere letzlich übertreffen kan.

Außlegung.

Dieweilen die Verhältnusse in einer gewissen Grösse, Kleine, oder Gleichheit, in dem mehr, wenig und gleich bestehen: so ist klar, daß man das Kleinere, Weniger e und Gleiche so offt nehmen, und vermehren kan, biß es endlich das Grössere, das Mehrere, und das Gleiche übertreffe. Also ist zwischen einer Linie von 2, und einer andern von 6 Klafftern eine Verhältnuß: dann die erste Linie von 2, viermahlen genommen, die andere von 6 Klafftern schon umb 2 Klafftern übertreffet, u. s. f. Eine solche Verhältnuß wird genannt in Latein Ratio rationalis, und kan mit Zahlen ausgesprochen werden: Im Gegentheil schliesset man, daß zwischen einer unendlichen, und endlichen Linie keine Verhältnuß seyn könne. Dann vermehre man die Endliche, so offt als man will, so wird sie doch niemahlen die Unendliche übertreffen: also auch zwischen einer Linie und Fläche, zwischen einer Fläche und Cörper, zwischen einem geradt-linischen und Anrührungs-Winckel ist keine Verhältnuß. So werden hierzu gesellet die Sachen, welche gar keine Grösse haben, als wie Puncten, Nullen, u. s. f.

Zwischen einer Zwerg-Linie und Seiten des Quadrats, kan eine Verhältnuß seyn: dann die Seiten kan vermehret werden, biß sie die Zwerg-Linie übertreffe; die Verhältnuß aber einer zu der andern ist unaußsprechlich, wird im Latein Ratio Irrationalis, surda, das ist, welche zwar in Linien kan angedeutet, nicht aber in Zahlen kan außgesprochen werden.

Zwischen krum- und geraden Linien kan eine Verhältnuß seyn: dann dieses gar schön Hippocrates Chius in der Figur, so dem wachsenden Monde nicht ungleich, bewiesen hat; Eben hat es gethan Archimedes, in der Zirckel-Messung, und Parabel-Vierung; und Proclus zwischen den geradt- und krummliniſchen Winckeln.



Anmerckung.

I.

Gemein-mäßliche Grössen (Magnitudinis commensurabiles) seynd, welche durch einerley Zahl geradt auffgehendt mögen auffgemessen werden, daß nichts wehr überbleibet: also messet eine Grösse von 2 Schuh lang, die von 6, und die von 8 Schuh lang, beyde geradt auff; nemlich 6 dreymahln, und 8 viermahln. Dahero seynd die Grössen von 6, und 8 Schuhe lang, gemein-mäßliche Grösse; die Grösse von 2 Schuh aber, wird hernach die gemeine Zahl oder Grösse genandt.

2.

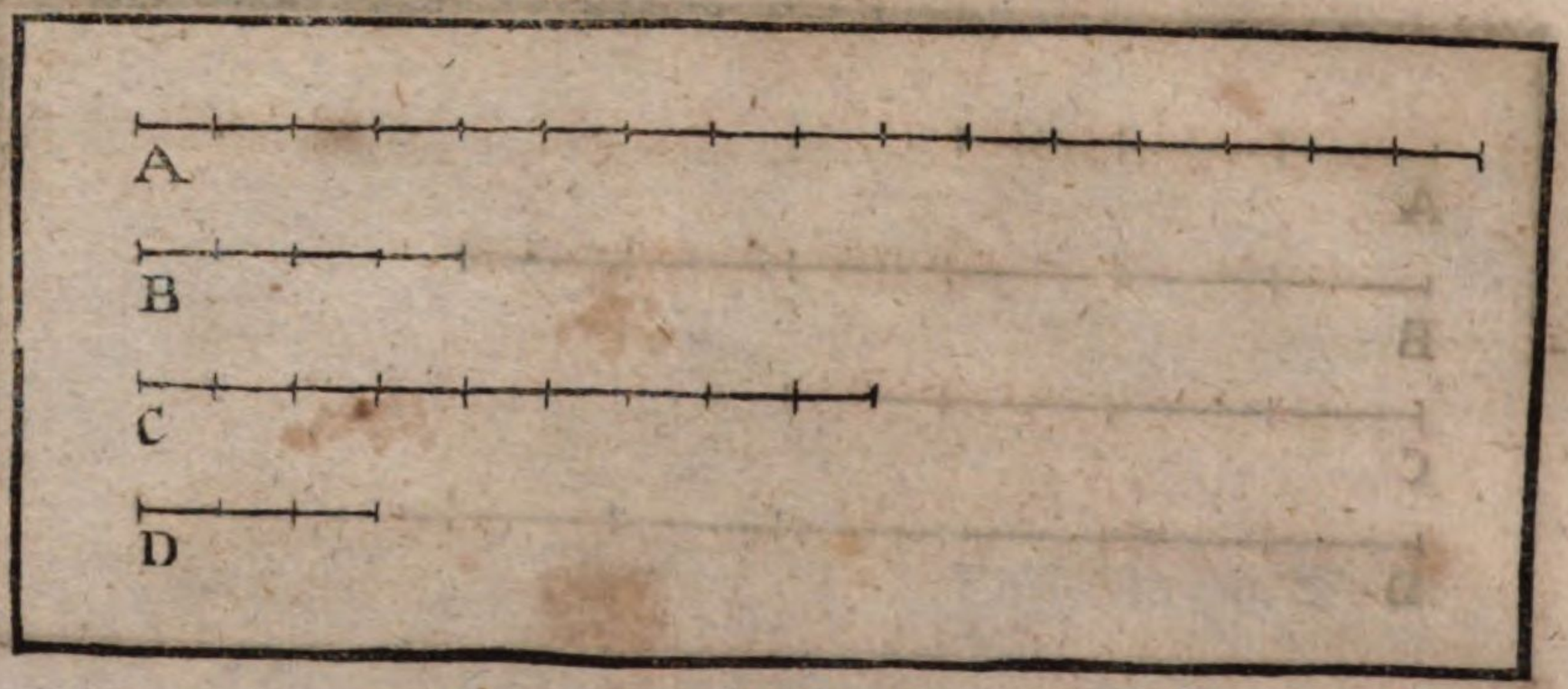
Gemein-unmäßliche Grössen (Magnitudines incommensurabiles) seynd, wenn zwischen denen Grössen, keine gemeine Zahl, die sie geradt auffmesset, kan gefunden werden Dieses geschicht zwischen der Zwerg-Linie, und einer Seiten deß Quadrats. Darvon im zehenden Buch Euclides.

VI.

Die Grösse, sagt man, haben einerley Verhältnuß unter einander, wenn die erste zu der andern sich verhaltet, gleich wie die dritte zu der vierten.

Außlegung.

Das ist, wenn das äusserst vorgehende so offt sein Nachgehends begreiffet, als offt das anderte vorgehende sein Nachgehends gleich begreiffet; oder, wann das erste vorgehendt so offt von seinem Nachgehenden gleich bebriffen ist, so offt das anderte vorgehende von seinen Nachgehenden begriffen wird. Zu einem Exempel; weilen allhier die erste Grösse A 3 von der anderten B 6 zweymahln begriffen ist: und die dritte Grösse C 4 auch geradt zweymahln von der vierdten Grösse D 8 begriffen ist: So saget man, daß diese Grössen einerley Verhältnuß, oder Proportion unter sich haben.



VII.

Die Grössen, so einerley Verhältnuß haben, werden Gleichverhaltende, oder Proportionirte Grössen genant.

Es seynd gegeben die vier Grösse in dem vorgehenden Exempel und Figur A 3. B 6. und C 4. D 8. Weilen nun diese vier Grössen einerley Verhältnuß unter sich haben, nemlich so wohl A ist zu B, als C zu D unterdoppelt; so nennet man auß dieser Ursach die vier gegebene Grössen A, B, C, D, proportionirte, oder gleich-verhaltende Grösse.

VIII.

Wann das erste Vorgehend ein Nachgehendes mehr oder öffter in sich begreiffet, als das andere Vorgehende sein Nachgehendes; oder Wann das erste Vorgehende ein grösserer Theil seines Nachgehenden, als das anderte Vorgehende seines Nachfolgenden ist: so saget man alsdann, daß die erste Grösse zu der anderten eine grössere Verhältnuß habe, als die Dritte zu der Vierten.

Zu einem Exempel. Das erste vorgehende, oder Grösse A von 16 Schuh begreiffet sein Nachgehendes, oder Grösse B von 4 Schuhe viermahln. Und das anderte Vorgehend, oder grosse C von 9 Schuhe begreiffet sein Nachgehendes, oder Grösse D von 3 Schuhe, nur drey mahln. Weilen nun die Grösse A die Grösse C mehr, oder öffter, als die Grösse C die Grösse D begreiffet (dann A begreiffet B viermahln, und C die Grösse D nur dreymahln): so saget man, daß A zu B eine grössere Verhaltnuß, als C zu D habe. Entgegen wann man D 3 zu C 9, und B 4 zu A 16 vergleichete: So würde D zu C, nemlich 3 zu 9 eine grössere Verhältnuß haben, als B zu A, nemlich 4 zu 16. Die Ursach ist, weilen D ein grösserer, nemlich ein dritter Theil von C, und B, ein kleinerer, nemlich nur ein vierter Theil von A ist.

IX.

Eine Proportion bestehet auff das Wenigste in dreyen Absätze (Termini).

Außlegung.

In einer Proportion müssen nothwendig zwey vorgehende und zwey Nachgehende seyn, dann wann nur ein Vorgehend, und ein Nachgehend wäre, es nur eine Verhaltnuß allein seyn würde. Nun kan sich aber schicken, daß bißweilen in einer Proportion der mittlere Absatz, zugleich die Stelle deß ersten Nachgehenden, und deß anderten Vorgehenden vertretten, und dahero die Proportion in dreyen Absätze bestehen möge: als wie in dieser Proportion:

4. 8. 16.

Ist der mittlere Absatz 8: und die Proportion bedeutet so viel, als wann man sagte: 4 haltet sich zu 8, als wie dieselbe 8 zu 16.

Eine solche Proportion hernach, worinnen der mittlere Absatz zweymahln wiederholet ist, wird genant, eine stätte Proportion (proportio continua); in welcher aber der mittlere Absatz nicht zweymahln wiederholet wird, als wie allhier:

4. 6. 8. 12.

Die wird eine abgesonderte Proportion (Proportio discreta) genandt.

X.

Wenn drey Grösse stets geproportionirt seynd, so sagt man, daß die erste zu der driten in einer zweymahligen Verhältnuß stehe, derselben, welche die erste zu der anderten hat (in Latein wird eine solche zweymahlige Verhältnuß duplicata ratio genannt).

Seynd aber vier Grösse stets geproportionirt, so saget man, daß die erste zu der vierdten in einer dreymahligen Verhältnuß stehe derselben, welche die erste zu der andern hat, (wird in Latein Triplicata ratio genannt) und so fort, jederzeit umb eines mehr, so lang die Proportion fortgeführt wird.

Außlegung.

Es seynd gegeben die drey stets geproportionirte Grösse A, B, C.

A. B. C.

27. 9. 3.

So saget man, daß die erste Grösse A, zu der dritten C in einer zweymahliger Verhältnuß derselben, welche die erste A zu der anderten B hat, stehe. Die Ursach ist, weilen zwischen A und C zwey Verhaltnusse, nemlich A zu B, und B zu C sich befinden, deren eine jede insonderheit gleich ist, der Verhältnuß, welche die erste A zu der anderten B hat, sonsten nicht stets geproportionirt wären.

Wenn aber vier stets geproportionirte Grösse seynd, gleich wie A, B, C, D,

A. B. C. D.
81. 27. 9. 3.

So saget man, daß die erste Grösse A, zu der vierdten D in dreymahliger Verhaltnus derselben, welche die erste A, zu der anderten B hat, stehe. Dann zwischen A, und D, drey Verhaltnüsse, nemlich A zu B, und B zu C, und C zu D sich befinden, deren eine jede insonderheit gleich ist, der Verhaltnuß, welche die erste A zu der anderten B hat, sonsten nicht stets geproportionirt wären. Wenn fünff stets geproportionirte Grösse seynd, so saget man alsdann, daß die erste zu der fünfften in viermahliger Verhältnuß derselben, welche die erste zu der anderten hat, stehe u. s. f.

Anmerckung.

Wann in folgendem gesaget wird, daß zwey gleichformige flache Figuren zu einem Beyspiel, zwey □ A, und B, (deren eine Seite von 8, die andere aber von 2 Schuhen ist) in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichformig-Haltnuß-sagender Seiten gegen einander stehen: so verstehet man dadurch folgendes: daß nemlich, wann man die zwey Seiten in dreyen Absätzen stäts proportionirter fortführet:

Als wie hier 8. 2. $\frac{1}{2}$. sich alsdann das Quadrat A zu dem □ B verhalte, gleich wie der erste Absatz, zu den dritten. Das ist, es werde sich verhalten das □ 64 zu dem □ 4 als wie 8 zu $\frac{1}{2}$.

Weilen aber 8 zu $\frac{1}{2}$ in zweymahliger Verhaltnuß stehet, derselben, welche 8 zu 2 hat, so saget man aus dieser Ursach, daß auch die 2 □ A, und B, in zweymahliger Verhaltnuß derselben, welche 8 zu 2 hat, (das ist, ihrer gleichformig-Haltnuß sagenden Seiten), stehen. Darvon in der 19 Vorgab deß 6 Buchs etwas mehrers zu lesen.

2.

Eine Proportion wird in folgenden auff solche Art angedeutet.

Gesetzt es seye gegeben, daß sich A gegen B verhalte, gleich wie C gegen D, so schreibet man bloß hinweg. A. B: : C. D.

Oder wann man saget die Verhaltnuß A zu B, ist gleich, der Verhaltnuß C zu D. So ist eben ein Ding, ob man schreibe, A, B □ C, D, oder A, B: : C, D.

XI.

Gleichförmig-haltnuß sagende Grösse (Magnitudines Homologæ) werden in einer Proportion genant, die zwey vorgehende, und die zwey Nachgehende.

Zu einem Exempel, es seye A, B: : C, D, so seynd die gleich-formig-Haltnuß sagende Grösse A und C, Item B und D

XII.

Eine verwechselte Verhaltnuß (Alterna Ratio) ist, wann ein Vorgehende, zu den andern Vorgehenden: Und ein Nachfolgende zu den andern Nachfolgenden gehalten, und verglichen wird.

Also, wann anfänglich die Proportion ist

A. B. : : C. D.
9. 3. : : 6. 2.

So wird durch die Verwexlung (Alternè, vicissim, oder permutando) die Proportion seyn

A. C. : : B. D.
9. 6. : : 3. 2.

Mercke: wann man die Verwechslung in einer Proportion gebrauchen will, so müssen alle vier Grösse von einerley Gattung seyn. Gesetzt, es seye gegeben, daß sich eine Zahl A zu einer andern Zahl B verhalte, gleich wie eine Linie C, zu einer andern Linie D, so wird man durch die Verwechslung gar nicht schliessen können, daß sich die Zahl A zu der Linie C verhalte, gleich wie die Zahl B, zu der Linie D. Die Ursach ist, weilen die Zahlen, und Linien keine Verhaltnuß, wie es in der 5. def. dieses Buchs ist erklärt worden, gegen einander haben können.

In denen fünff folgenden Schluß-Redens-Arten aber, können die erstere zwey Grösse von einerley Gattung, und die zwey andere Grösse, von einer andern Gattung seyn.

XIII.

Eine umbgekehrte Verhaltnuß (Inversa ratio) ist, wann man die Nachgehende, an statt der Vorgehenden, und die Vorgehende an statt der Nachgehenden nimmet.

Also, wann anfänglich die Proportion stehet.

A. B. : : C. D.
9. 3. : : 6. 2.

So wird seyn durch die Umbkehrung (Inversè, è contrario, oder invertendo).

B. A. : : D. C.
3. 9. : : 2. 6.

XIV.

Eine Zusammensetzung (Compositio rationis) ist, wann man beyderseits das Vorgehendt und Nachgehendt zusammen nimmet und gegen das Nachgehendt allein vergleichet.

Wann anfänglich stehet A. B. : : C. D.
9. 3. : : 6. 2.

So wird seyn durch die Zusammensetzung (componendo)

A + B. B. : : C + D. D.
12 . 3 : : 8 . 2.

XV.

Eine Zertheilung der Verhaltnuß (Divisio rationis) ist, wann man den Unterscheid, umb welchen das Vorgehend sein Nachgehend übertreffet, gegen der Nachgehenden vergleichet.

Wann anfänglich stehet: A. B. :: C. D.
9. 3. :: 6. 2.

So wird seyn durch die Zertheilung (dividendo).
A—B . B :: C—D . D
6 . 3 :: 4 . 2.

Mercke, daß in dieser Schluß-Redens-Art das Vorgehende nothwendig grösser seyn muß, als sein Nachgehendes.

XVI.

Eine Ver- oder Umbwendung der Verhaltnuß (Conversio rationis) ist, wann man beyderseits das Vorgehendt zu dem Unterscheid, welcher zwischen einem Vorgehenden, und seinem Nachgehenden ist, vergleichet.

Wann anfänglich stehet: A . B :: C . D.
9 . 3 :: 6 . 2.

So wird seyn durch die Umbwendung (per conversionem).
A . A—B :: C . C—D.
9 . 6 :. 6 . 4 .

Mercke, daß auch in dieser Schluß-Redens-Art, das Vorgehende grösser seyn muß, als sein Nachgehendes.

XVII.

Verhaltnuß auß einer Gleichheit, oder kurtz hinweg, auß der gleichen (ex Æqualitate ratio, oder ex æquo) ist, wann man zwey Reühe Grösse eine jede in gleicher Anzahl, jederzeit zwey und zwey, in einerley Verhaltnus zusammen nehmet; und hernach einen solchen Vergleichungs-Schluß machet, daß die erste Grösse sich zu der letzten in der ersten Reühe verhalte, gleich wie die erste Grösse sich zu der letzten in der andern Reühe verhalte.

Die Zusammennemmung deren zwey Grösse, geschicht auff zweyerley Weise; erstlich wann sie ordentlich, hernach verrückter genommen werden.

XVIII.

Eine ordentliche Proportion ist (ordinata proportio), wann zwey Reühe Grösse, eine jede in gleicher Anzahl auff solche Weise genommen werden, daß in der ersten Reühe die erste Grösse, sich zu seiner anderten verhalte, gleich wie die erste Grösse in der anderten Reühe,

zu seiner anderten. Und wiederum gleich wie die anderte Grösse in der ersten Reühe sich zu seiner dritten verhalte: also auch die anderte Grösse in der anderten Reühe sich zu seiner dritten verhalte. u. s. f.

Zu einem Exempel, es stehen die Grösse,

In der ersten Reyhe		In der anderten Reühe	
A	9	D	18
B	3	E	6
C	1	F	2

Wann sich nun verhaltet A zu B :: D, E, und B C :: E, F.
So schliesset man hernach, daß auch seye durch die Verhaltnuß auß einer Gleichheit, oder kurtz hinweg auß der gleichen.

A . C :: D . F.
9 . 1 :: 18 . 2.

XIX.

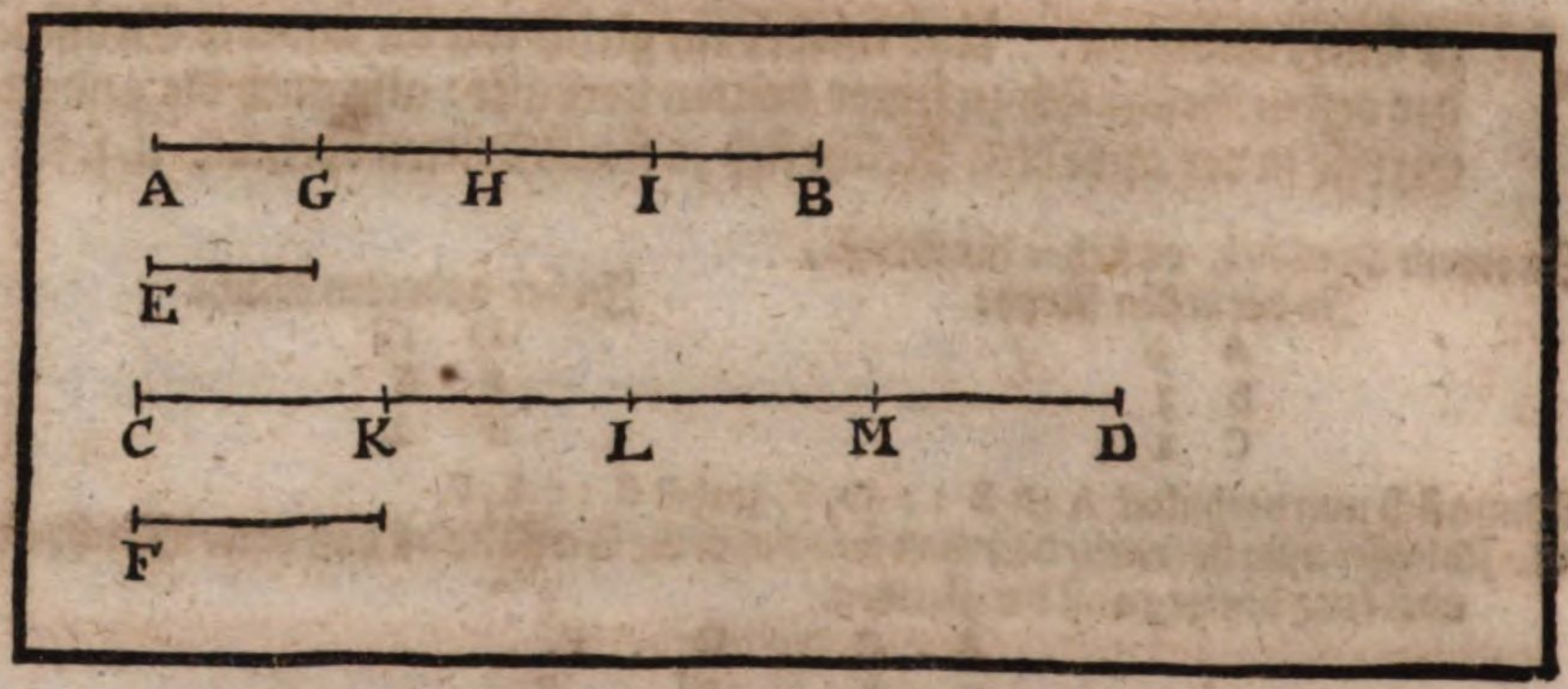
Eine verruckte Proportion ist (perturbata proportio), wann zwey Reühe Grösse eine jede in gleicher Anzahl auff solche Weise genommen werden; daß in der ersten Reühe die erste Grösse sich zu seiner anderten verhalte, gleichwie die vorletzte Grösse in der anderten Reühe sich zu seiner letzten verhalte: Und wiederumb, gleich wie die andere Grösse in der ersten Reühe sich zu seiner dritten verhalte, als wie die Vorletztere Grösse in der anderten Reühe sich zu seiner Vor-letzteren verhalte. u. s. f.

Zu einem Exempel, es stehen die Grösse

In der ersten Reühe		In der anderten Reühe	
A	12	D	24
B	6	E	8
C	2	F	4

Wann sich uun verhaltet A. B :: E F, und B. C :: D. E.
So schliesset man hernach, daß auch seye auß der gleichen

A . C :: D . F.
12 . 2 :: 24 . 4.



Die I. Vorgab. Betrachtung.

Wann so viel Grösse, (als man will,) gleichformig-vielfach seynd, so vieler andern Grösse, eine jede der Seinen: so wird seyn, als wie eine vielfache sich zu seiner andern verhaltet, also werden sie alle gleichförmig vielfache sammentlich, zu ihren andern Grössen sammentlich verhalten.

Es seynd gegeben die zwey Grösse AB, und CD, welche gleichformig vielfach seynd, deren Grösse E und F. Diesem nach saget man, daß AB und AB + BD gleichförmig vielfache seynd, deren E und E + F; das ist, wie offt AB seine andere Grösse E degreiffet, so offt, oder in gleicher Anzahl, werden AB und CD sammentlich E und F sammentlich begreiffen.

Zubereitung.

Weilen AB und CD gleichförmig vielfach seynd deren E und F — d.d. Vorg.
so kan AB in so viel Theil (alle gleich der Grösse E); — d.2.an.2.def.5.
als CD in solche Theile (welche alle gleich seynd der F) abgetheilt werden.

Gesetzt, es seye AB in vier gleiche Theile abgetheilt worden,
so wird auch CD gerad't vier gleiche Theile begreiffen. Diesem nach

Beweiß.

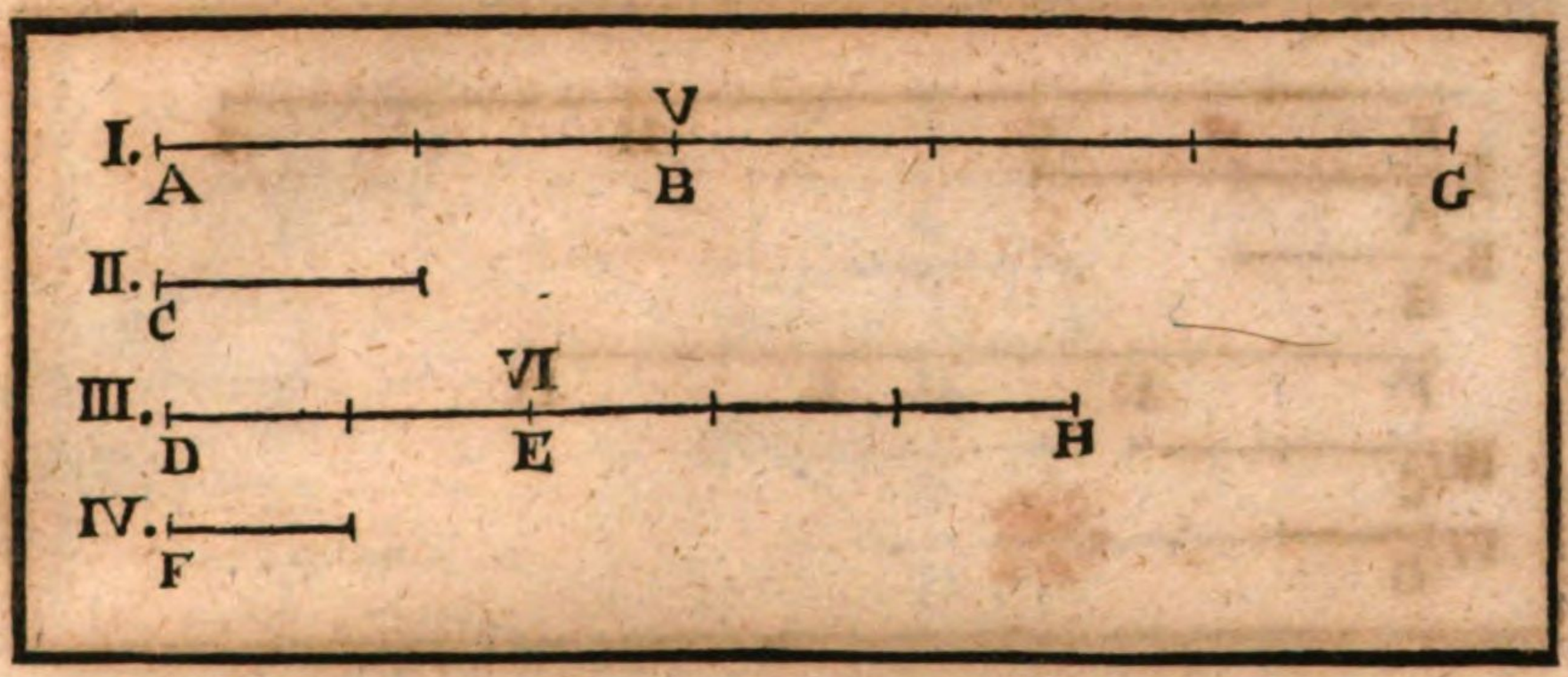
Weilen nun AG ⊓ ist der E, — d. d. Zub.
so man beyderseits hinzu setzet die CK, und F (welche auch einander ⊓ seynd). — d. d. Zub.

So wird AG + CK ⊓ seyn, E + F; und auff solche Weise — d. 2. ax.
auch GH + KL ⊓, der E + F, und HI + LM ⊓, der E + F.
Letztlich IB + MD ⊓, der E + F.

Auß diesen erhellet, wie offt dann E in AB, oder F in CD begriffen ist,
so offt seye auch E + F in AB + CD begriffen.

Deßwegen, wie vielfach AB der Grösse E, ist,
so gleichformig vielfach wird AB + CD seyn, der E + F. — d.2. def.2.an.5.

Welches zu beweisen ware.



Die II. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erste Grösse, so gleichformig vielfach ist der anderten, als wie die dritte der vierten, und die fünffte auch gleichformig vielfach ist der anderten, als wie die sechste, der vierten: so wird die erste und fünffte zusammen, so gleichförmig vielfach seyn der anderten: als wie die dritte und sechste zusammen der vierten.

Es ist gegeben die erste Grösse AB, so gleichförmig vielfach der anderten C, als die dritte DE, der vierten F. Wiederumb seye gegeben die fünffte BG, so gleichförmig vielfach der anderten C; als die sechste EH, der vierten F. Diesem nach sagt man, daß AB + BG, und DE + EH, gleichformig vielfache seynd, deren C und F.

Beweiß.

Gesetzt, die erste AB begreiffe die anderte C zweymahlen, so wird auch die dritte ED die vierdte F geradt zweymahlen begreiffen. d. 2. def. 2. an. 5.

Seye wiederumb gesetzt, daß die fünffte BG die anderte C dreymahln begreiffe. So wird auch die sechste EH die vierte F geradt dreymahlen begreiffen.

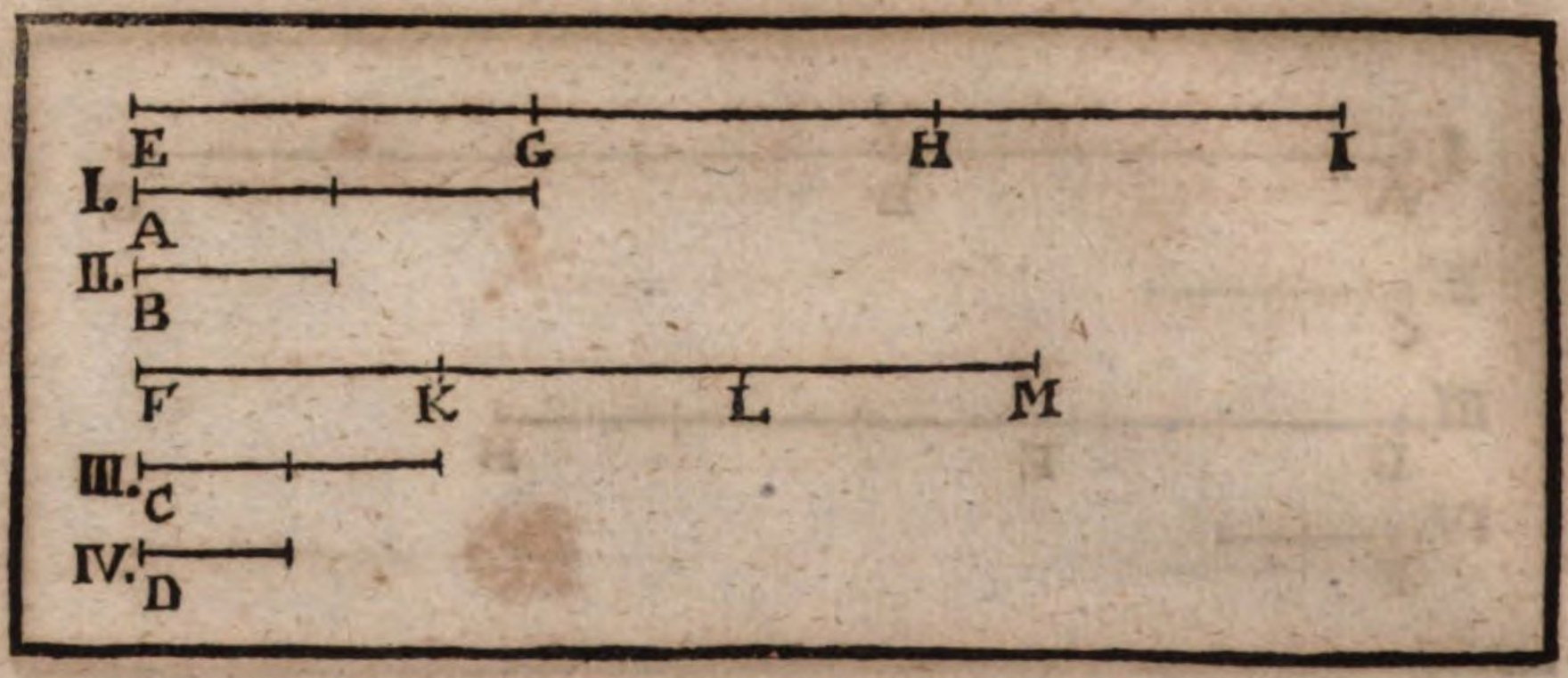
Wann man nun beyderseits zu gleicher Anzahl eine andere gleiche Anzahl hinzu setzet.

So kommen wiederumb beyderseits gleiche Anzahlen herauß. d. 2. ax. 1

Setze dahero zu AB, und DE die von gleicher Anzahl BG, und EH, so wird sowohl die gantze AG fünffmahlen die Grösse C, als die gantze DH fünffmahlen die Grösse F begreiffen.

Deßwegen wird die gantze AG, so gleichformig vielfach der anderten C seyn; als die ganze DH, der vierten F. d. 2. def. 2. an. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die III. Vorgab. Betrachtung.

Wann die erste Grösse so gleichförmig vielfach ist der anderten, gleichwie die dritte der vierten; Man nemmet aber noch andere gleichförmig-vielfache der ersten und dritten: so wird die genommene gleichförmig vielfache der ersten, so offt gleichförmig-vielfach seyn der anderten, als die genommene gleichförmig-vielfache der dritten, gleichförmig vielfach ist der vierten.

Es seynd gegeben, die erste Grösse A, so gleichförmig vielfach der anderten B, als die dritte C, der vierdten D. Man nemme auch die Grösse EI, und FM, gleichformig vielfach der ersten A, und C. Diesem nach saget man, daß EI, und FM gleichförmig vielfache deren B und D seynd.

Zubereitung.

Gesetzt, EI sey abgetheilt in drey gleche Theile, deren ein jeder gleich ist der Grösse A, nemlich in EG, GH, und HI und FM seye auch abgetheilt in drey gleiche Thile, deren ein jeder gleich ist, der Grösse C, nemlich in FK, KL, und LM.

Beweiß. Weilen EG ⌐ ist der A; und FK ⌐, der C. d. d. Zus.
so werden EG, und FK, so offt B und D begreiffen, als A, und C.
Eben wird diß geschehen von denen Theilen GH, und KL, u. s. f.

Imdeme nun die erste Grösse EG, so offt vielfach ist der anderten B, als die dritte FK vielfach ist, der vierdten D.

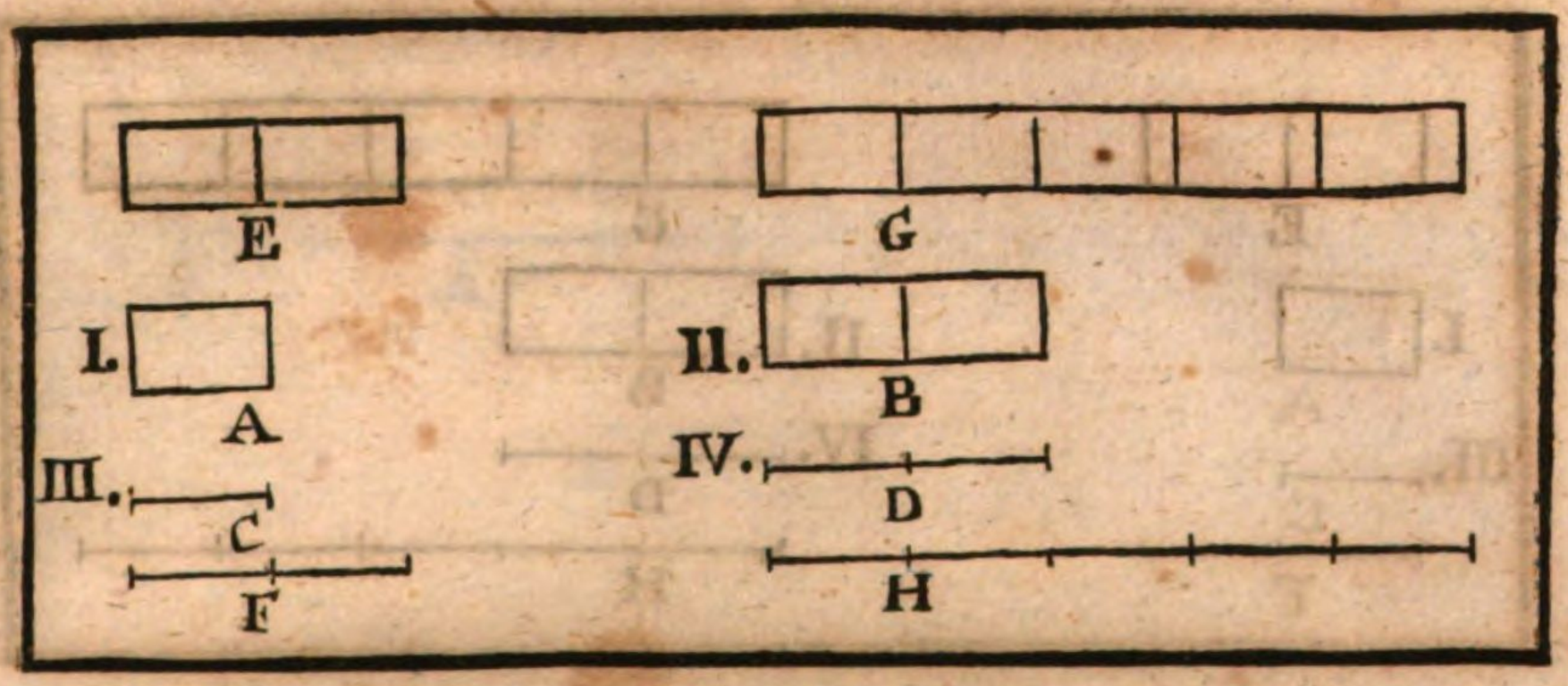
Und die fünffte GH ist auch so offt vielfach der anderten B, als die Sechste KL vielfach ist der vierdten D.

So wird auch die Grösse EH zusammengesetzter von der ersten d. 2. f.
und fünfften, und die Grösse FL, (so zusammen gesetzt ist von der dritten und sechsten) gleichförmig vielfach seyn der anderten B und vierten D.

Unterdessen, wann man EH, und FL für die erste und dritte Grösse nehmet, und HI, und LM für die fünffte und sechste.

So schliesset man, daß die gantze EI, und FM gleichförmig vielfache seint deren B und D. { d. 2 def. 2. an f. und 2. f.

Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Grössen geproportionirt seynd, und man nehme nach Gefallen gleichformig vielfache der ersten und dritten, gleichwie auch gleichförmig vielfache der anderten und vierten: so werden auch die nach Gefallen genommene Vielfache (wann nur die Ordnung gehalten wird) einander geproportionirt seyn.

Es seynd gegeben die vier geproportionirte Grössen, nemlich A. B :: C D. Man nehme nun nach Gefallen die Grösse E und F gleichförmig vielfach der ersten A, und dritten C. auch die Grösse G, und H gleichförmig vielfach der anderten B, und vierdten D. diesen nach saget man, daß auch die genommene vielfache einander geproportionirt seynd, nemlich E. G :: F. H.

Beweiß.

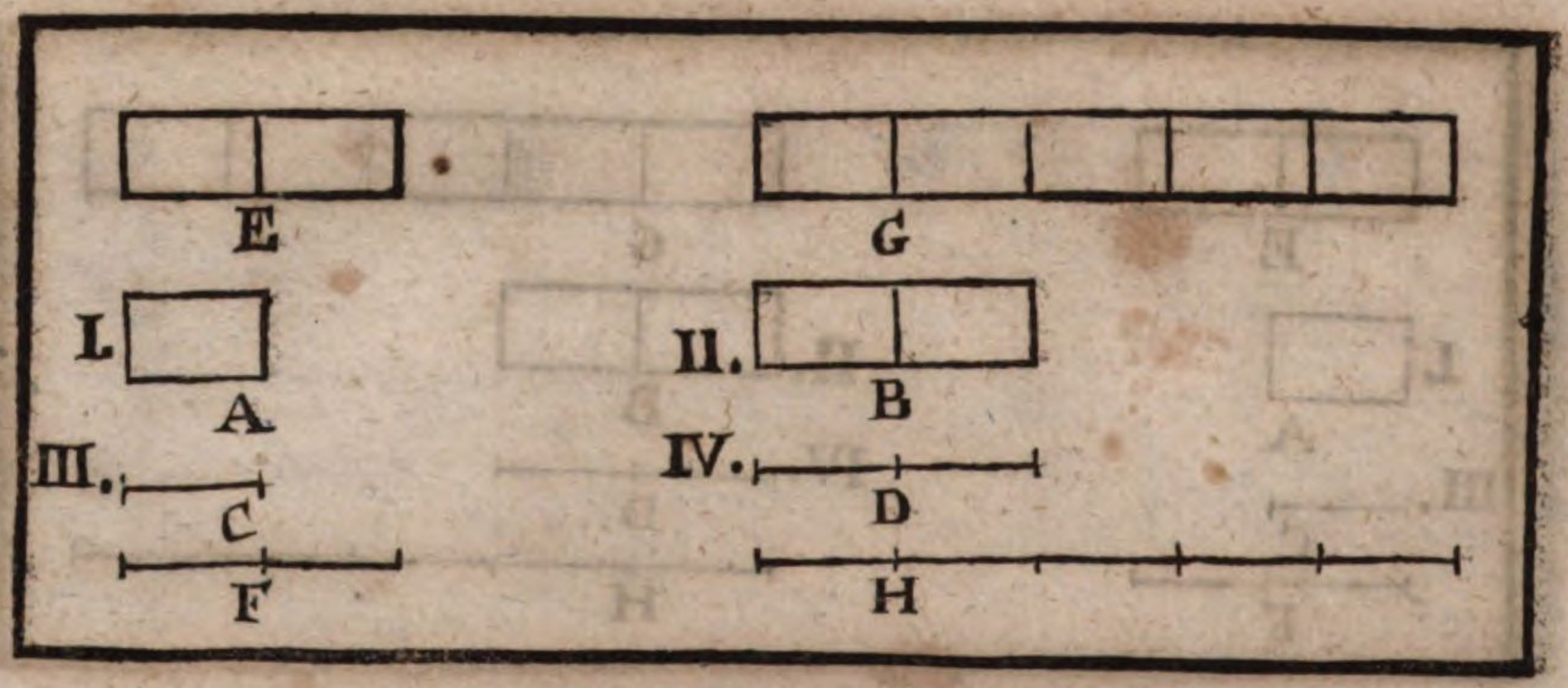
Weilen E, und F gleichförmig vielfache seynd, denen A, und C, so wird die Anzahl deren Theile in E ⌐ seyn, der Anzahl deren Theile in F. d. 2. an. def. 2. 5.

Auff solche Weise wird auch die Anzahl deren Theile in G ⌐ seyn, der Anzahl deren Theile in H.

Dahero wegen Gleichheit der Anzahle beyderseits wird E so offt die G begreiffen, als F die H begreiffet; oder E ist so offt von G; als F und H begriffen: und also haben sie einerley Verhaltnuß untereinander d. 6. def. 5.

Deßwegen seynd diese vier vielfache einander geproportionirt, d. 7. def. 5.
Das ist, es werde seyn E. G :: F. H.

Welches zu beweisen ware.

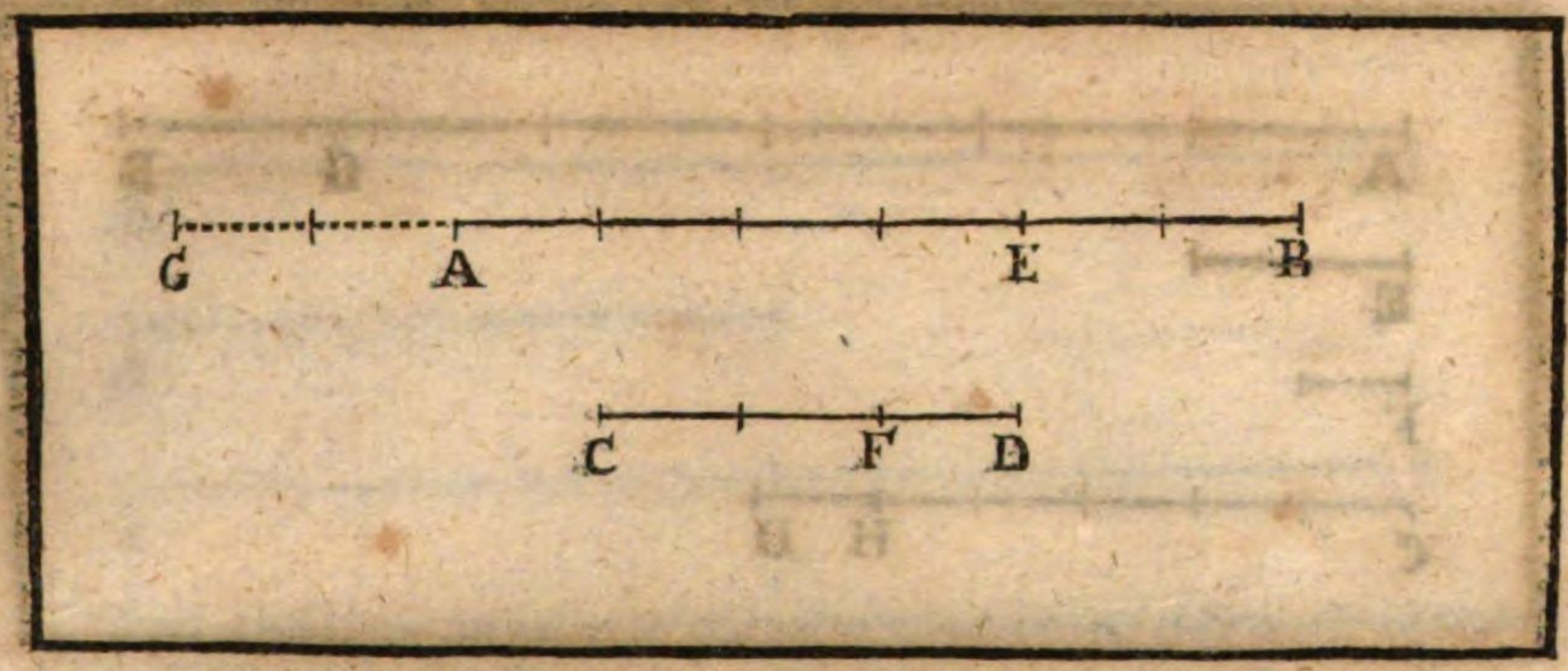


Anmerckung.

Man beweiset gemeiniglich zu Folge dieser Vorgab, die Giltigkeit der Umbkehrung dieser Verhaltnuß, (welche in der 13. def. dieses Buchs ist erkläret worden) so wir auch allhier thun wollen; weilen aber diese vierte Vorgab durch eine andere Art, als Euclides gethan, bewiesen worden ist: also ist diese nicht zu einer Folge, sondern für eine Haubt-Vorgab beygesetzt worden.

Seye dahero anfänglich gegeben A. B :: C. D.
So saget man; daß auch durch die Umbkehrung (invertendo, oder inversè) giltig kan geschlossen werden B. A :: D. C.
Dann weilen gesetzt ist A. B :: C. D
so wird A so offt begreiffen B, als C, die D: oder — d. def. 6. 5.
A wird so offt begriffen seyn von B; als C von D.
Dahero so wohl A, und C; als B, und D gleichförmige Theile ihrer Grösse seyn können, und B so viel zu A, als D zu C ist. — d. 2. an. def. 2. 5.
Deßwegen B so offt begreiffet A; als D, die C begreiffen kan; oder B so offt von A; als D von der C begriffen ist.
Dahero werde es seyn B. A :: D. C. — d. { def. 6. 5. / def. 7.

Welches zu beweisen ware.



Die V. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine Grösse so vielfach ist einer andern Grösse, als ein darvon abgezogener Theil, deß andern darvon abgezogenen Theils: so wird auch der eine übrige Theil so vielfach seyn, deß andern übrigen Theils, als wie die eine gantze Grösse, der andern gantzen Grösse ware.

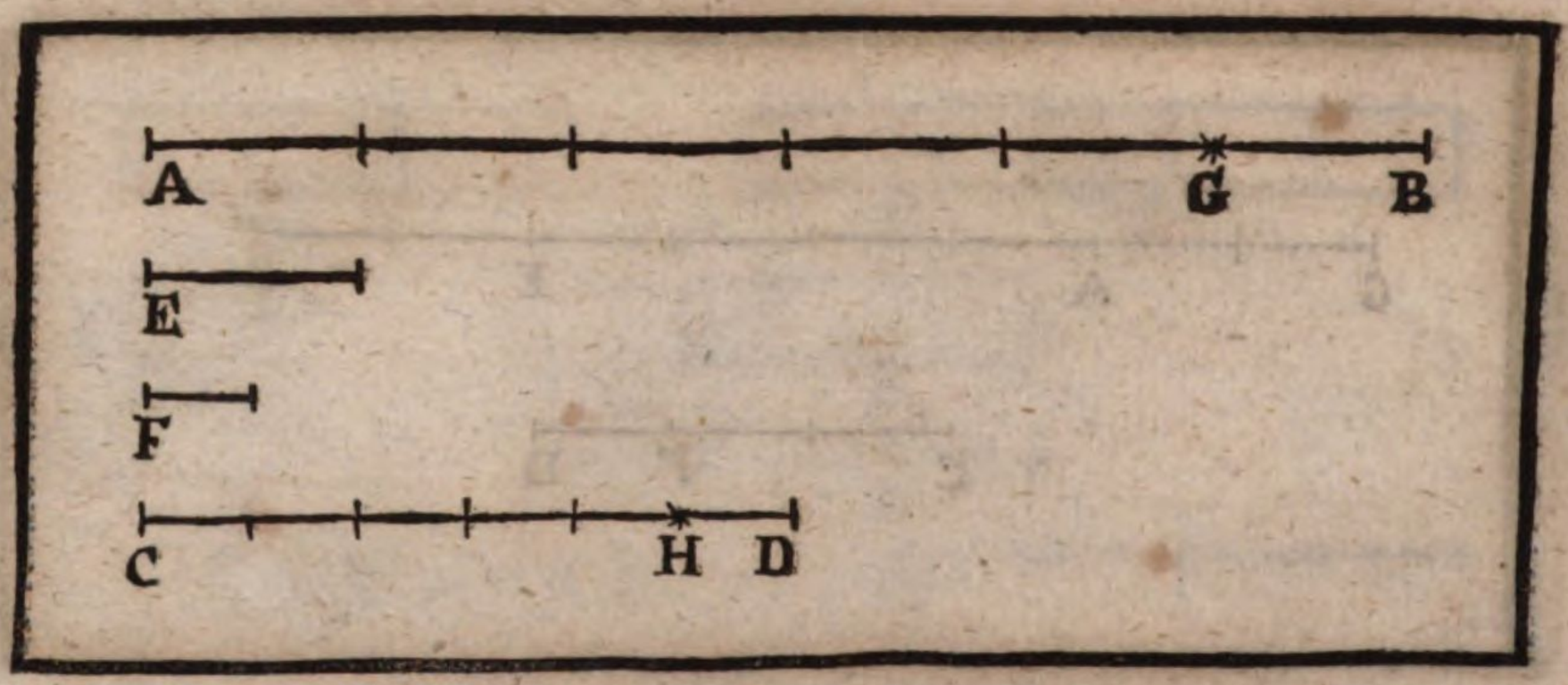
Es seynd gegeben die Grösse AB, so vielfach der andern CD, als der abgezogene Theil AE, deß andern abgezogenen Theils CF. Diesem nach sagt man, daß auch der übrige Theil EB, so vielfach ist deß anderten übrigen Theils FD, gleich wie die gantze AB, der gantzen CD ware.

Zubereitung.

Setze, daß GA so vielfach der Grösse FD seye, als AE der Grösse CF. oder, als AB der Grösse CD ist.

Beweiß.

Nun ist GE so vielfach der Grösse CD, als AE der CF. d. 1. s.
Es ist auch AB so vielfach der CD, als AE der CF. d. d. Vorg.
Dahero wird GE so vielfach seyn der CD, als AB der CD,
und folgends GE ⊓ seyn, der AB (dann sie gleichförmig vielfache von einerley Grösse CD seynd). { d. 6. ax. 1. und 2. def. 2. s.
Wenn man nun beyderseits die gemeine Grösse AE darvon ziehet,
so wird GA ⊓ verbleiben, der EB. d. 3. ax 1.
Unterdessen ist GA so vielfach, der FD gemacht, als AB der CD. d. d. Zub.
Folget, daß auch EB so vielfach seye der FD, als AB der CD.
Welches zu beweisen ware.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Grösse, anderer zwey Grössen gleichförmig vielfach seint, und man von diesen auch gleichförmig vielfache darvon nemmet: so werden auch die übrige entweder denen andern gleichförmig vielfache, oder gleich groß verbleiben.

Es seynd gegeben die Grösse AB, und CD gleichförmig vielfache deren E und F; und man hat darvon genommen AG, und CH, gleichförmig vielfache, derenselben E, und F. Diesem nach saget man, daß die übrige Grösse GB, und HD entweder gleichförmig vielfach deren E, und F, oder denenselben gleich groß verblieben seynd.

Beweiß.

Die Grösse AB, und CD seynd gleichförmig vielfach deren E, und F. d. d. Vorg.

Dahero in AB so viel Theile (deren ein jeder gleich ist der E) seint, d. 2. an. def 2. 5.
als Theile seint in CD (deren ein jeder gleich ist der F).

Es seint auch genommen AG, und CH gleichförmig vielfache deren E, und F. d. d. Vorg.

Dahero werden auch in AG so viel Theile (deren ein jeder gleich ist der E) seyn, d. 2. an. def. 2. 5.
als Theile seyn in CH (deren ein jeder gleich ist der F).

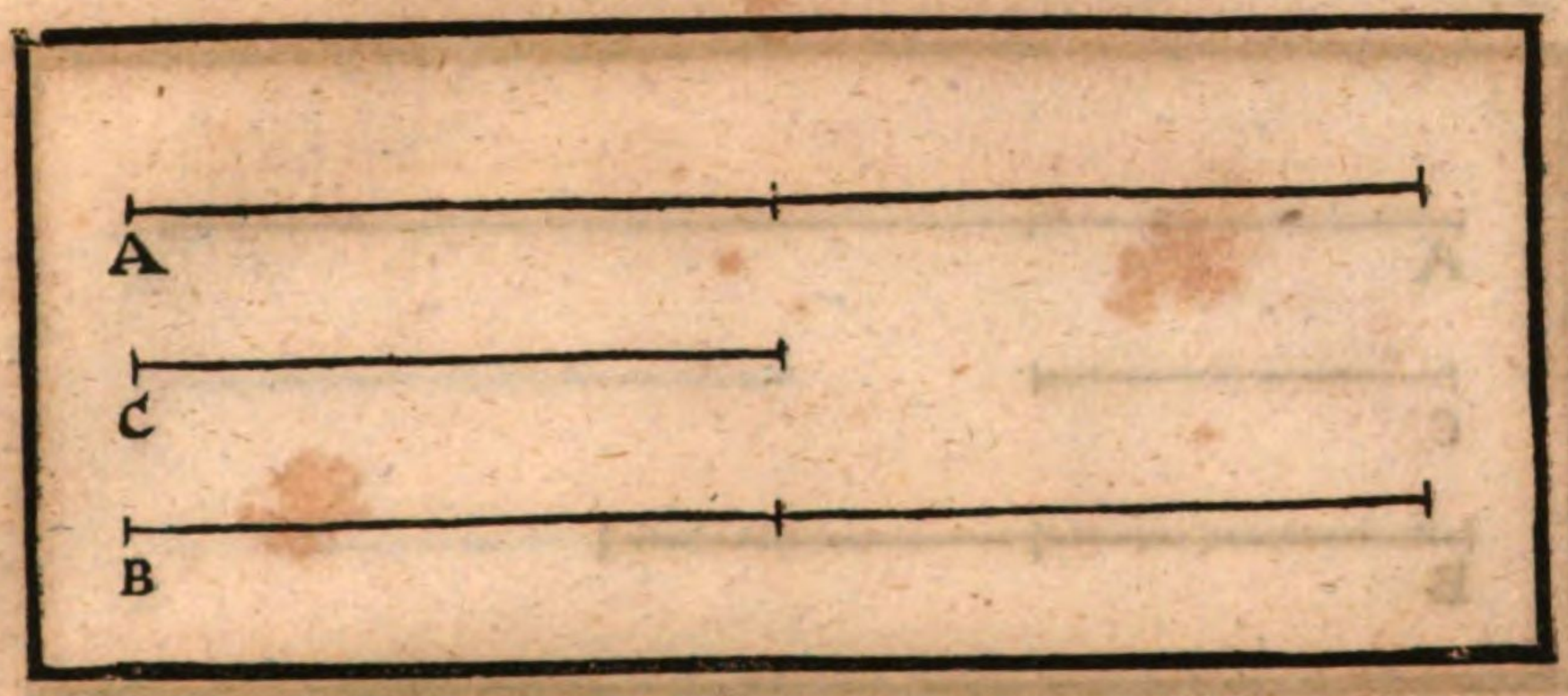
Wann man nun von dergleichen Anzahl deren gleichen Theile (so in AB, und CD seint)
die gleiche Anzahl deren gleichen Theile, so in AG, und CH seint, abziehet

So werden in GB so viel Theile □, der E verbleiben, als Theile in HD □, der F seint. d. 3. ax. 1.

Wann nun GB □ ist, der E:
So wird auch HD □ seyn, der F.

Seint dann mehr Theile in GB, und HD,
so ist klar, daß GB und HD auch gleichförmig vielfache seint deren E und F.

Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Gleiche Grössen, welche zu einer andern Grösse verglichen werden, haben zu ihr einerley Verhaltnuß: und hinwiederumb eine Grösse zu andern gleichen Grösse verglichener, hat einerley Verhaltnuß zu ihnen.

Es seynd gegeben die Grösse A, und B, so einander gleich seynd, wann man diese zu der gegebenen Grösse C vergleichet: So saget man, daß beyde Grössen A, und B einerley Verhaltnuß zu der C haben, nemlich es sey A. C:: B. C.

Beweiß.

I.

Weilen A □ ist gegeben, der B,
so wird A so offt C begreiffen, als B dieselbe C: oder
A wird so offt ein gleicher Theil von C. seyn, als B von der C.
ein solcher Theil ist.

Dahero ist auch die Verhaltnuß A zu C □, der Verhaltnuß B zu C. d.6.def.5.
und folgends seyn werde: A. C. :: B. C. d.7.def.5.

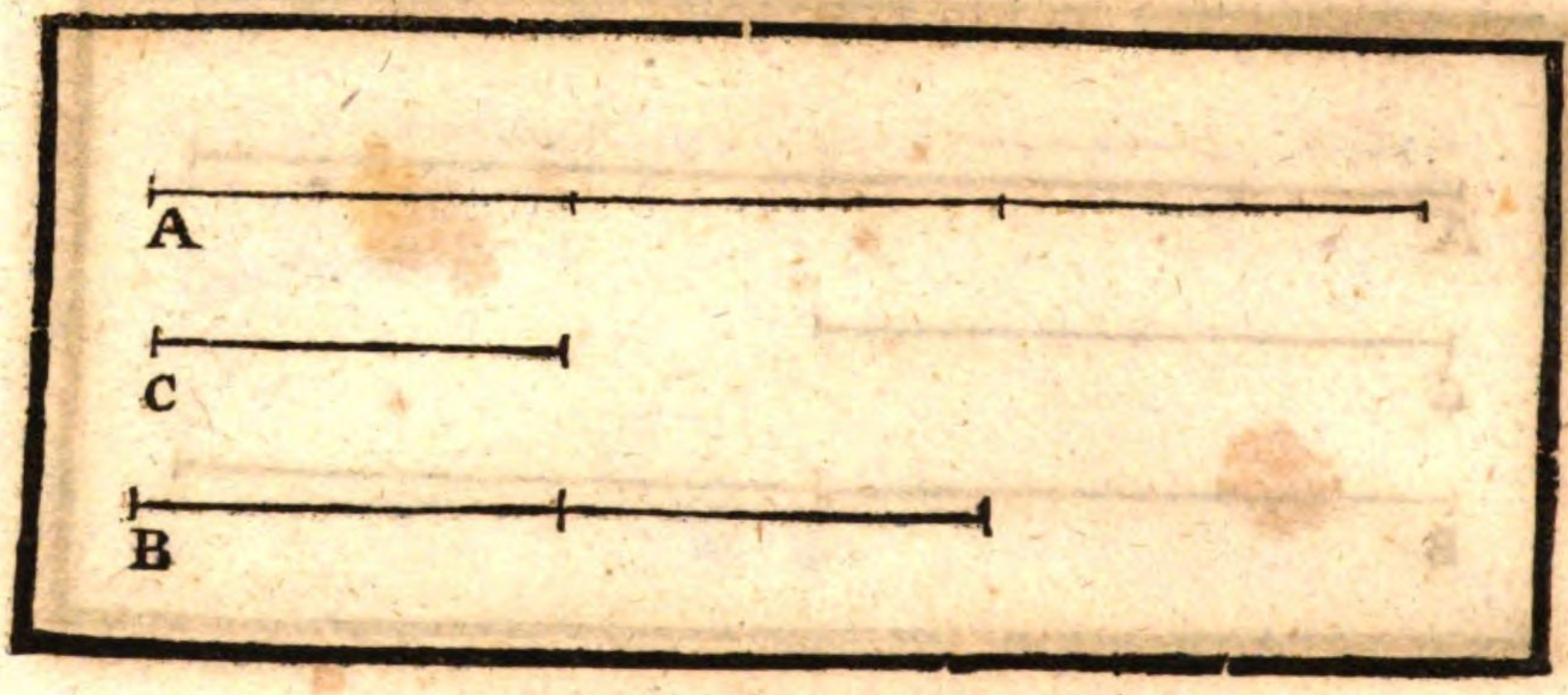
II.

Wann nun die C zu denen gleichen Grössen A, und B verglichen wird,
so saget man, daß die Grösse C zu diesen beyden einerley Verhaltnuß
habe.

Die Ursach ist, weilen vorgehends ist bewiesen worden, daß es seye A. C:: B. C.
so ist auch durch die Umbkehrung giltig zu sagen: C. A:: CB. d.an.4.5.

Das ist, die Verhaltnuß C zu A ist □ der Verhaltnuß C zu B.
Welches zu beweisen ware.

Mercke, daß diese, und die vier folgende Vorgaben pure allgemeine
Wissenschafften seynd.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Unter zweyen ungleichen Grössen, welche zu einerley Grösse gehalten werden, hat die Grössere eine grössere Verhaltnuß zu derselben, als die kleinere: hinwiederumb wird dieselbe Grösse zu der kleinern eine grössere Verhaltnuß haben, als zu der grössern.

Es seynd gegeben die zwey ungleiche Grösse A und B, welche zu der gegebenen Grösse C verglichen werden. Diesem nach saget man, daß die grössere A zu der Grösse C eine grössere Verhaltnuß habe, als die kleinere B zu derselben C.

Beweiß.

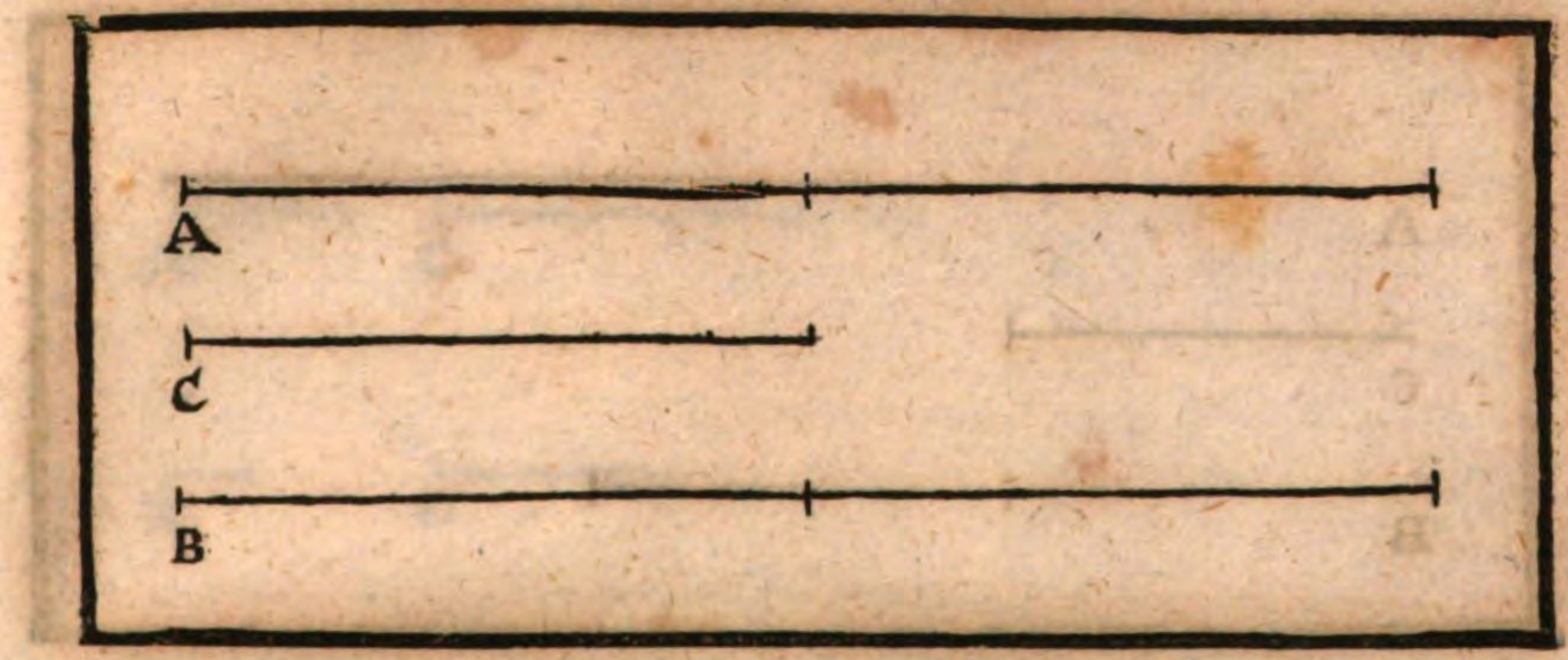
I.

Weilen A Γ gegeben ist, als B;
so wird A offter begreiffen C, als B dieselbe C:
Dahero wird A zu C auch eine grössere Verhaltnuß haben,
als B zu derselben C d. 8. def. 5.

II.

Gestalt dieser Sachen, wann nun die Grösse C zu denen zwey ungleichen Grössen A und B verglichen wird, so saget man, daß C zu der kleinern B eine grössere Verhaltnuß habe, als zu der grössern A:
Dann C ein grösserer Theil von seinem Nachgehenden, der kleinern B, als dieselbe C von seinem Nachgehenden, der grössern A ist.
Dahero auch C eine grössere Verhaltnuß hat zu der kleinern B. d. 8. def. 5.
als zu der grössern A.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Vorgab.

Betrachtung.

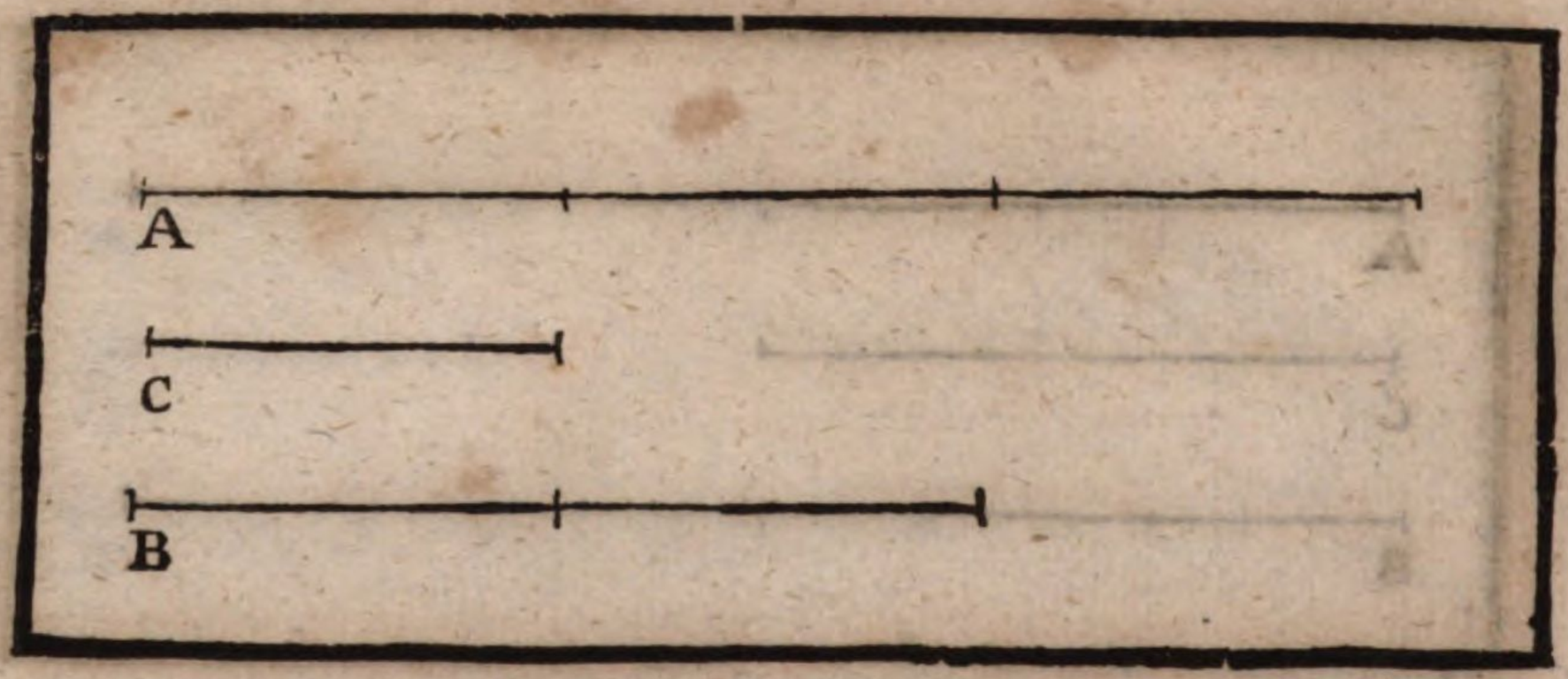
Die Grössen, welche zu einer andern Grösse einerley Verhaltnuß haben, seint einander gleich groß: und wann eine Grösse zur andern Grösse einerley Verhaltnuß hat, so seynd dieselbe auch einander gleich groß.

Es ist gegeben, daß die zwey Grösse A und B einerley Verhaltnuß haben zu C. Diesem nach saget man, daß A □ seye, der B.

Beweiß.

Gesetzt, man sagete, es wäre A nicht □ der B, sondern
A seye entweder ⌜, oder ⌝, als die B.
So folgete aber darauff, daß auch die Verhaltnuß A zu C
entweder ⌜ oder ⌝ wäre, als die Verhaltnuß B zu C. 5. 8. 5.
Dieses aber streitet wieder die Vorgab, indeme beyde
Verhaltnusse anfänglich gleich einander seint gegeben worden.
Darumb ist noch wahr zu sagen, daß A □ seye der B.
Es seye abermahlen gegeben, daß die Grösse C zu denen gegebenen Grössen
A und B einerley Verhaltnuß habe. Diesem nach saget man, daß
A □ seye, der B.
Dann weilen C zu A, und B einerley Verhaltnuß hat,
so muß auch nothwendig A □ seyn, der B.
Sonsten, wann A und B nicht einander gleich wären,
auch die Verhaltnusse zu der C einander ungleich wären, 5. 8. 5.
welches aber wieder die Vorgab streitet.
Dahero schliesset man, daß nothwendig A □ seye, der B.

Welches zu beweisen ware.



Die X. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Grösse zu einer andern Grösse gehalten werden, so ist unter solchen die grössere, welche eine grössere Verhaltnuß zu derselben andern hat; gegen welchen aber dieselbe eine grössere Verhaltnuß hat, die ist kleiner.

Es seye gegeben, daß die Verhaltnuß der Grösse A zu der Grösse C ⌜ seye, als die Verhaltnuß B zu derselben C. so sagt man, daß auch A ⌜ seye, als B.

Beweiß.

Gestehet man es nicht, sondern saget, daß A ⌐ wäre, der B.
So folgete darauff, daß auch die Verhaltnuß A zu C ⌐ wäre, der Verhaltnuß B zu C. Welches aber wider die Vorgab ist. d. 7. 5.

Wil man weiter sagen, daß A ⌝ seye, als B.
so folgete auch, daß die Verhaltnuß A zu C ⌝ wäre, als die Verhaltnuß B zu C, welches eben wider die Vorgab ist. d. 8. 5.

Dahero schliesset man, daß nothwendig A ⌜ seyn muß, als B.

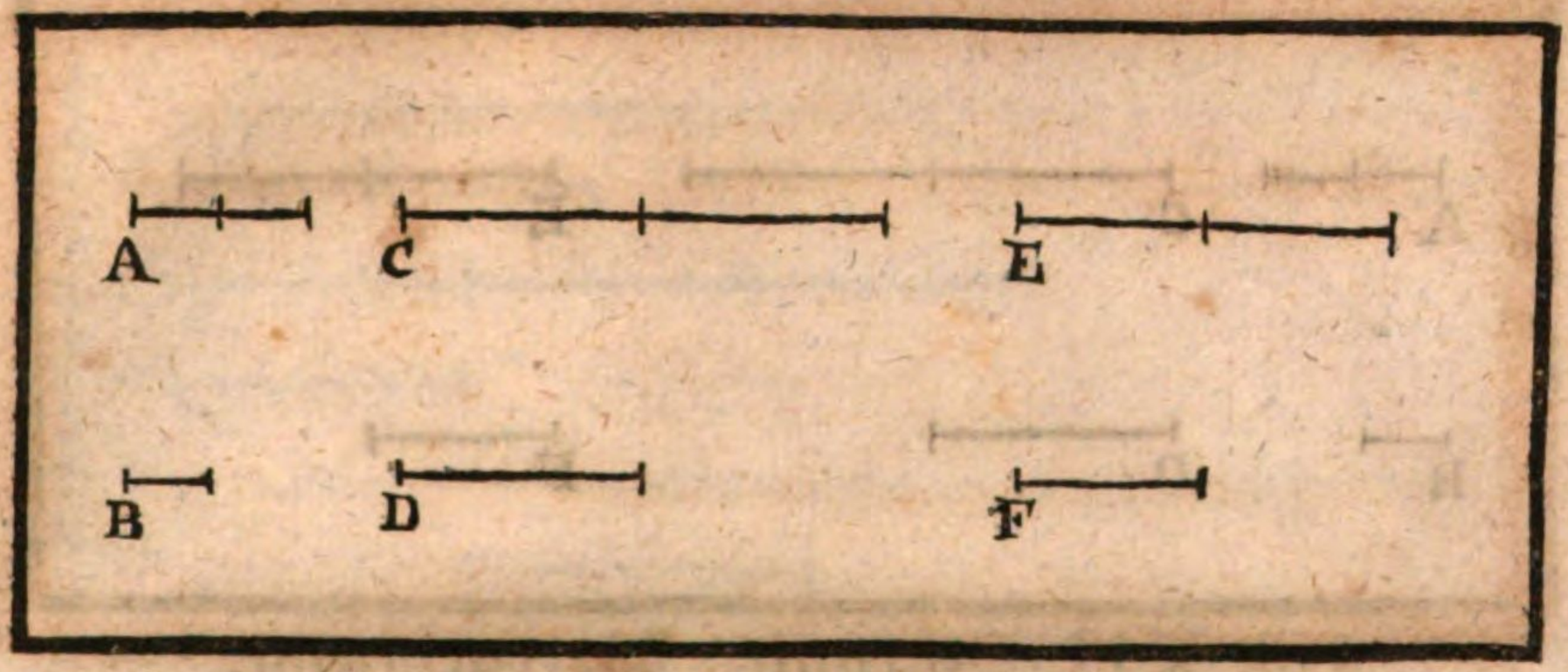
Es ist weiters gegeben, daß die Verhaltnuß C zu B ⌜ seye, als die Verhaltnuß C zu A, so saget man, daß B kleiner seye, als A.

Dann wann man sagete, daß B ⌐ wäre der A.
so folgete, daß die Verhaltnuß C zu B auch ⌐ wäre, der Verhaltnuß C zu A, welches wider die Vorgab ist. d. 7. 5.

Wil man aber sagen, daß B ⌜ seye, als A:
so folget, daß die Verhaltnuß C zu A ⌜ wäre, als die Verhaltnuß C zu B. welches eben wider die Vorgab ist. d. 8. 5.

Dahero ist unfehlbar zu sagen, daß B ⌝ seye, als A.

Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab.

Betrachtung.

Die Grössen, welche gegen einer andern einerley Verhaltnuß haben, haben auch unter sich einerley Verhaltnuß.

Es seynd gegeben die Grössen AB EF. CD, und A verhalte sich zu B, als wie E zu F. und auch C verhalte sich zu D, gleich wie dieselbe E zu F. u. s. f. diesen nach saget man, daß es seyn werde A. B :: C. D.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß A zu B ▭ ist, der Verhaltnuß E zu F. d. d. Vorg.
so wird A so offt B begreiffen, als E die F. oder,
A wird so offt von B begriffen, als E von F.

Es ist aber gegeben die Verhaltnuß C zu D ▭, der Verhaltnuß E zu F.
so wird auch C so offt D begreiffen, als E die F, oder,
C wird so offt von D begriffen seyn, als E von F.

Dahero wird auch A so offt B begreiffen, als C die D, oder d. 1. ax. 1.
A wird so offt von B begriffen, als C von D.

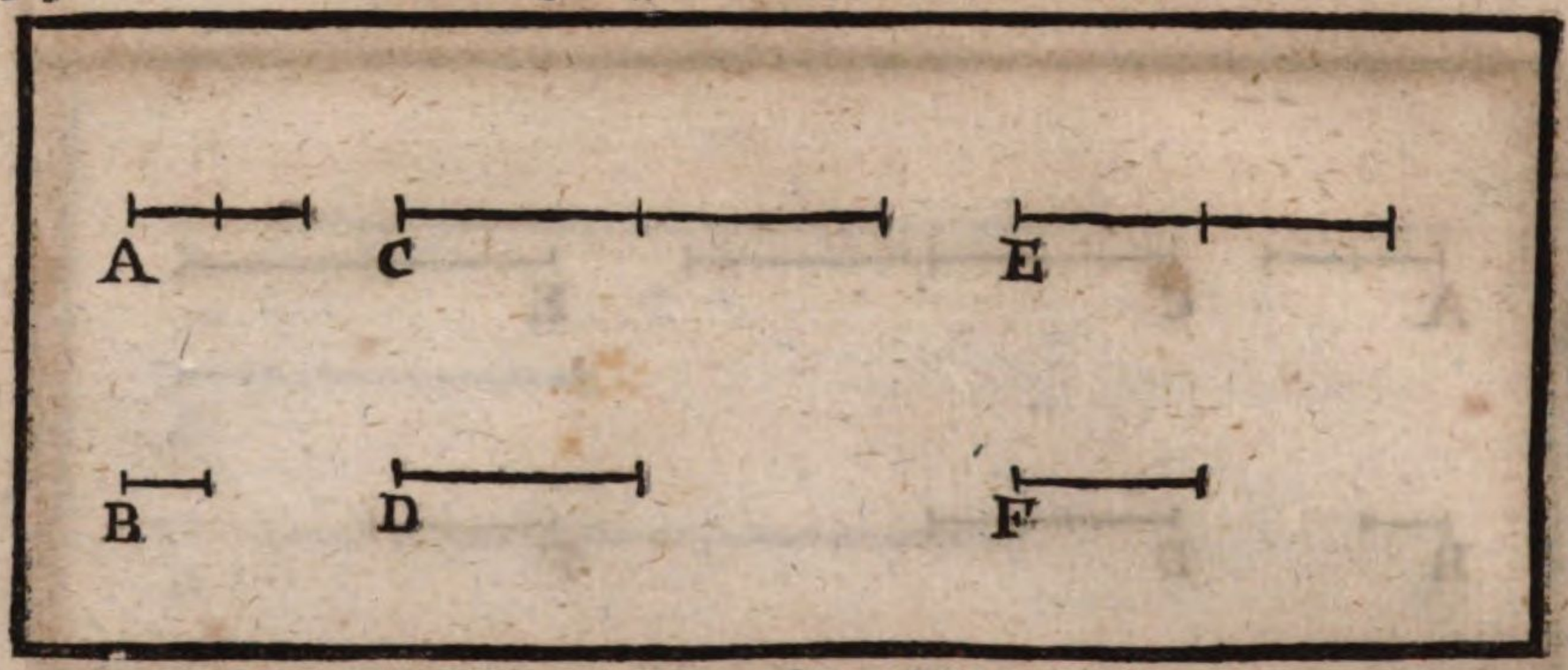
Worauff folget, daß dann seye A. B :: C. D. d. 6. def. 5.
Welches zu beweisen ware. d. 7. def. 5.

Anmerckung.

Die Grösse, welche gegen andern Grössen einerley Verhaltnus haben, haben auch unter sich einerley Verhaltnus

A	2.	B	1. :: C	6.	D.	3.
E	8	F	4. :: G	12.	H.	6.

Wann es ist A. B :: C. D, und E. F :: A. B, und G. H :: C. D so saget man, daß auch seye E. F. :: G. H; dann weilen die Verhaltnusse E zu F, und C zu D ▭ seint der Verhaltnuß A zu B: so wird durch die 11. 5. seyn EF :: C. D und wiederum indeme die Verhaltnusse E zu F, und G zu H ▭ seint, der Verhaltnuß C zu D; so wird auch durch dieselbe 11. 5 seyn, E. F :: G. H.



Die XII. Vorgab. Betrachtung.

Wann so viel Grösse seint, als man wil, welche einerley Verhaltnus gegen andere Grösse haben: so wird seyn, gleich wie sich ein vorgehend zu seinem Nachgehenden verhaltet; also werden alle Vorgehende zusammen genommen, sich zu allen Nachgehenden zusammen genommen verhalten.

Es seynd gegeben die Grösse A. C. E. welche einerley Verhaltnuß haben, zu denen Grössen B. D. F. das ist, A. B. : : C. D. :: E. F. Diesem nach saget man, daß auch seyn werde, gleich wie ein vorgehendes A sich zu seinem nachgehenden B verhaltet: Also werden alle Vorgehende A. C. E sammentlich, sich zu allen Nachgehenden B D. F sammentlich verhalten, das ist, es werde seyn A. B :: A + C + E. B + D + F.

Beweiß. Dieweilen die Grösse A. C. E einerley Verhaltnuß zu ihren Nachgehenden B. D. F haben.

So werden sie ihre Nachgehende in gleicher Anzahl begreiffen, nemlich ein jede das Seine: oder, so werden sie von ihren Nachgehenden in gleicher Anzahl begriffen werden, nemlich eine jede von dem Seinen. d. 6. def. 5.

Gesetzt, es seye ein Vorgehendes, gleich wie A, doppelt, oder dreyfach seines Nachgehenden B.

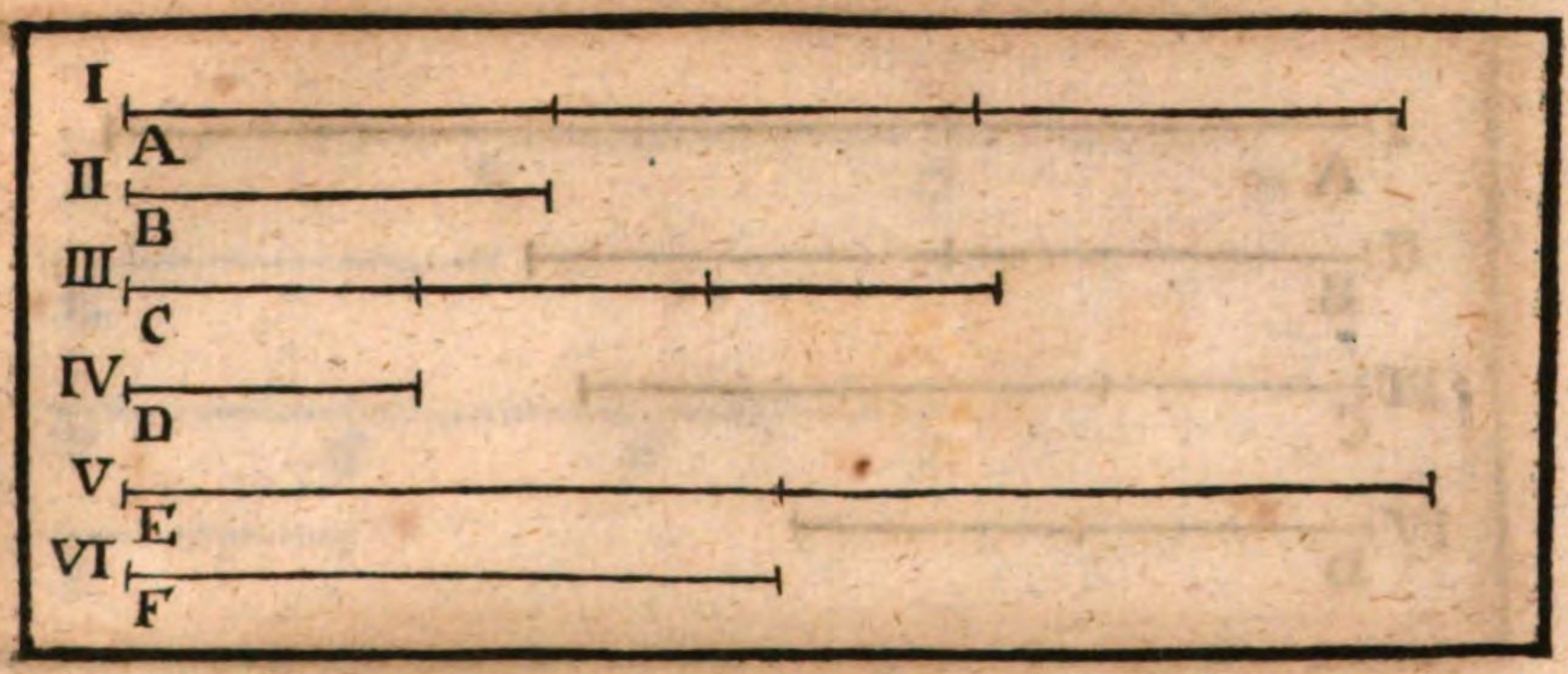
So folget, daß auch die andere C und E, doppelt, oder dreyfach seyn werden ihrer Nachgehenden D und F.

Auff solche Weise (weilen dann beyderseits gleichförmige Grössen zusammen genommen werden) nun klar ist, daß die gantze Summen deren Vorgehenden auch doppelt oder dreyfach, der gantzen Summen deren Nachgehenden seyn werde, gleich wie das eine vorgehend A doppelt oder dreyfach gesetzt ware seines Nachgehenden B (dann beyderseits eine gleichförmige Zusammensetzung geschiehet).

Und dahero die gantze Summen deren vorgehenden, so offt die gantze Summen deren nachgehenden begreiffen werde, oder die gantze Summen deren vorgehenden, so offt von der gantzen Summen deren Nachgehenden begriffen seyn wird, wie offt ein vorgehendes, sein Nachgehendes begreiffet, oder ein Vorgehendes von seinem Nachgehenden begriffen ist.

Deßwegen wird seyn A. B :: A + C + E. B + D + F. { d. 6. def. 5. / 7. def. 5.
Welches zu beweisen ware.

Folge. Wann man gleichförmige geproportionirte Grössen zu gleichförmigen geproportionirten Grössen hinzu setzet, so wird auch die Summa gleichförmig geproportionirt seyn.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

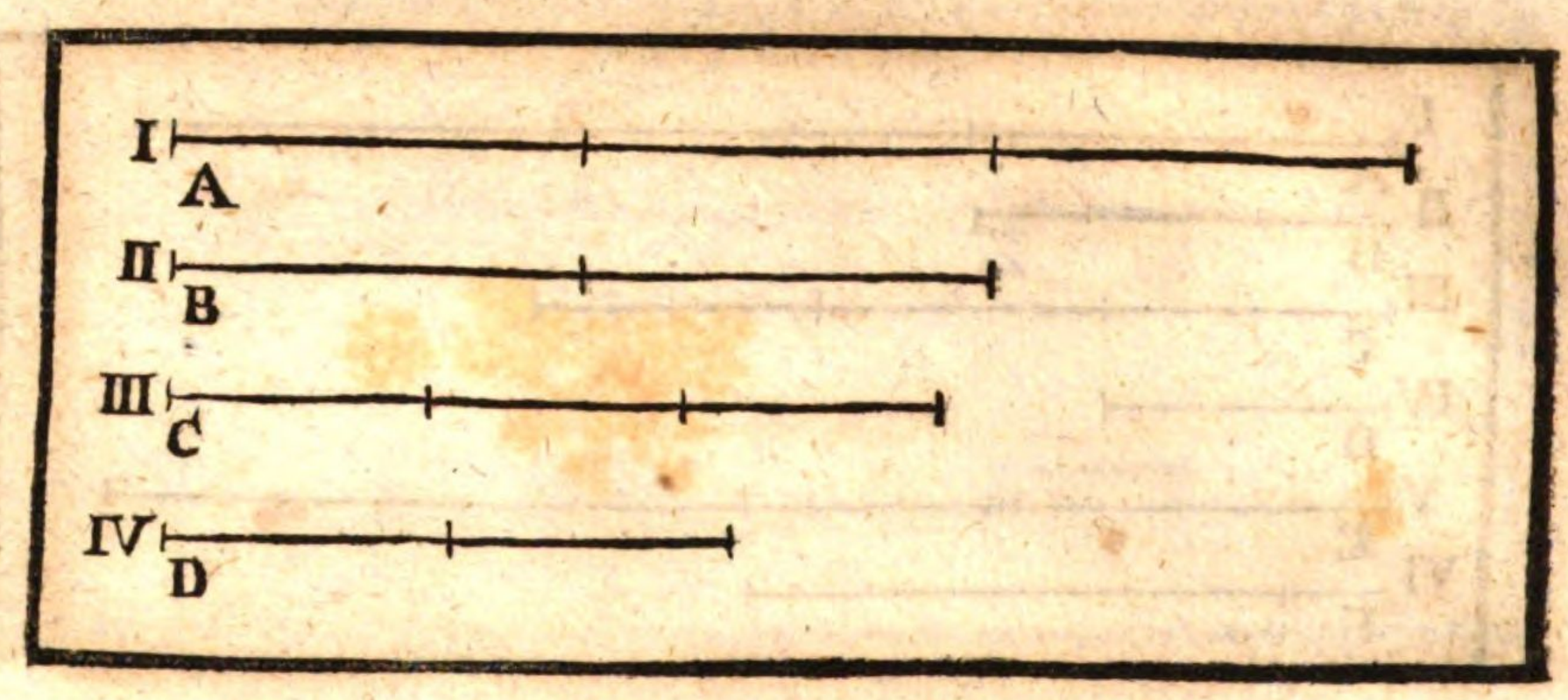
Wann die erste Grösse zu der anderten eine solche Verhaltnuß hat, als wie die dritte zu der vierten. Die dritte aber zu der vierdten eine grössere Verhaltnuß hat, als die fünffte zu der sechsten: so wird auch die erste Grösse, zu der anderten eine grössere Verhaltnuß haben, als die fünffte zu der sechsten.

Es ist gegeben, daß die Verhaltnuß der ersten Grösse A zu der anderten B ⌐ seye, der Verhaltnuß der dritten C zu der vierdten D. Die Verhaltnuß der dritten C zu der vierten D aber, ist ⌜ gegeben, als die Verhaltnuß der fünfften E zu der sechsten F. Diesem nach saget man, daß auch die Verhaltnuß der ersten A zu der anderten B ⌜ seye, als die Verhaltnuß der fünfften E zu der sechsten F.

Beweiß.

Die Verhaltnuß C zu D ist ⌜ gegeben, als die Verhaltnuß E zu der F. d. d. Vorg.
Dahero C öffter begreiffen werde die D, als E die F. d. 8. def. 5.
Es ist unterdessen C. D :: A. B. oder C D ⌐, A B. d. d. Vorg.
Folget, daß auch A öffter begreiffen werde die B, als E die F.
Unterdessen wird A zu B auch eine grössere Verhaltnuß haben, als E zu F. d. 8. def. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erste Grösse zu der anderten sich verhaltet, als wie die dritte zu der vierten: wann nun die erste Grösse grösser, kleiner oder gleich ist der dritten: so wird auch die anderte Grösse grösser, kleiner, oder gleich seyn der vierten.

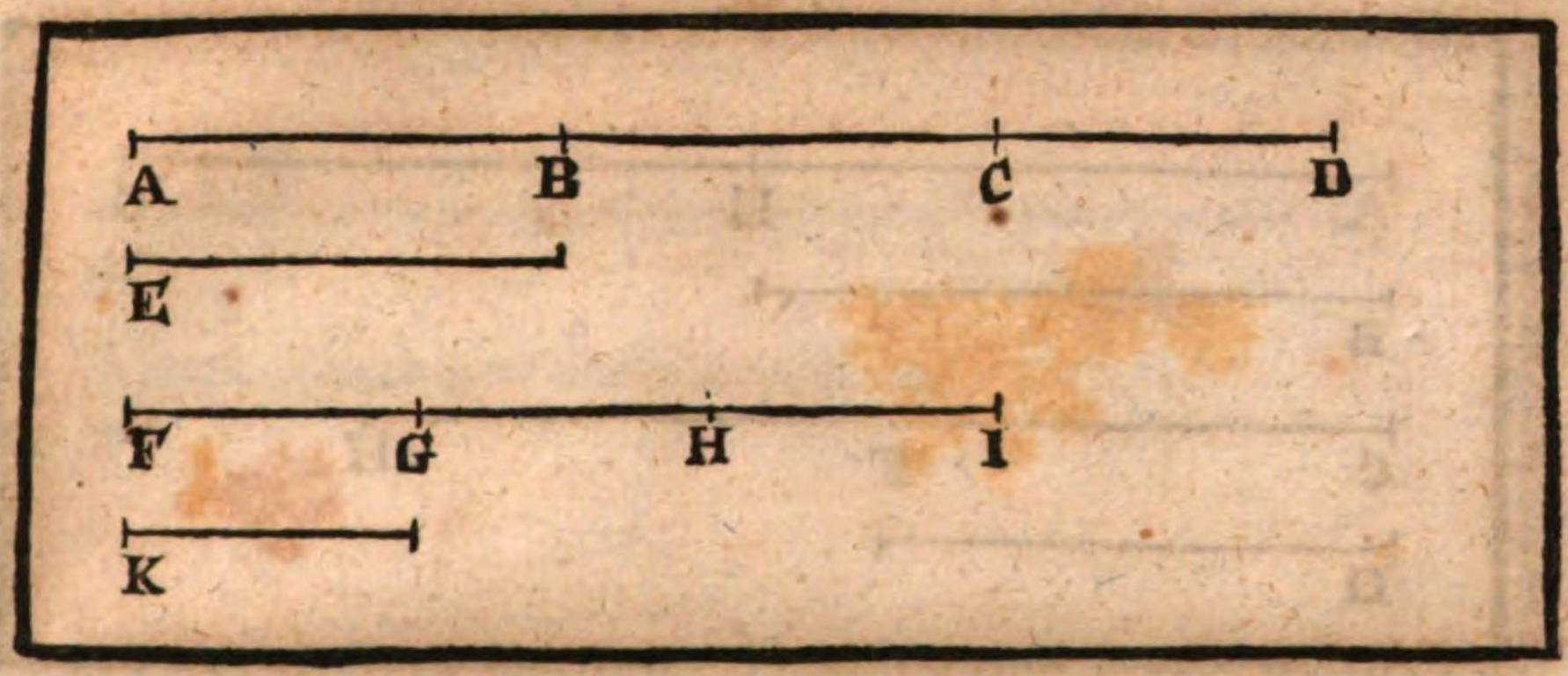
Es seye gegeben, daß sich verhalte A. B :: C. D diesen nach saget man: Wann die erste A ⌜, ⌝, oder ⌐¬ ist, der dritten C. so werde auch die anderte B ⌜, ⌝ oder ⌐¬ seyn der vierdten D.

Beweiß.

Seye erstlich gesetzt, daß A ⌜ seye, als C.
so saget man, daß auch B ⌜ seye als D,
Dann, weilen A ⌜ ist, als C.
so wird die Verhaltnuß A zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß C zu B. d. 8. def. 5.
Unterdessen ist die Verhaltnuß A zu B ⌐¬ der Verhaltnuß C zu D. d. d. Vor.
Dahero werde auch die Verhaltnuß C zu D ⌜ seyn, als
die Verhaltnuß C zu B.
Und deßwegen wird D ⌝ seyn, als B; oder (so ein Ding) B ist ⌜, als D. d. 10. 5.

Welches zu beweisen ware.

Eben auff solche Art solte bewiesen werden, daß, wann die Grösse A ⌝,
oder ⌐¬ gegeben würde der C, auch B ⌝, oder ⌐¬ seyn solte, der D.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

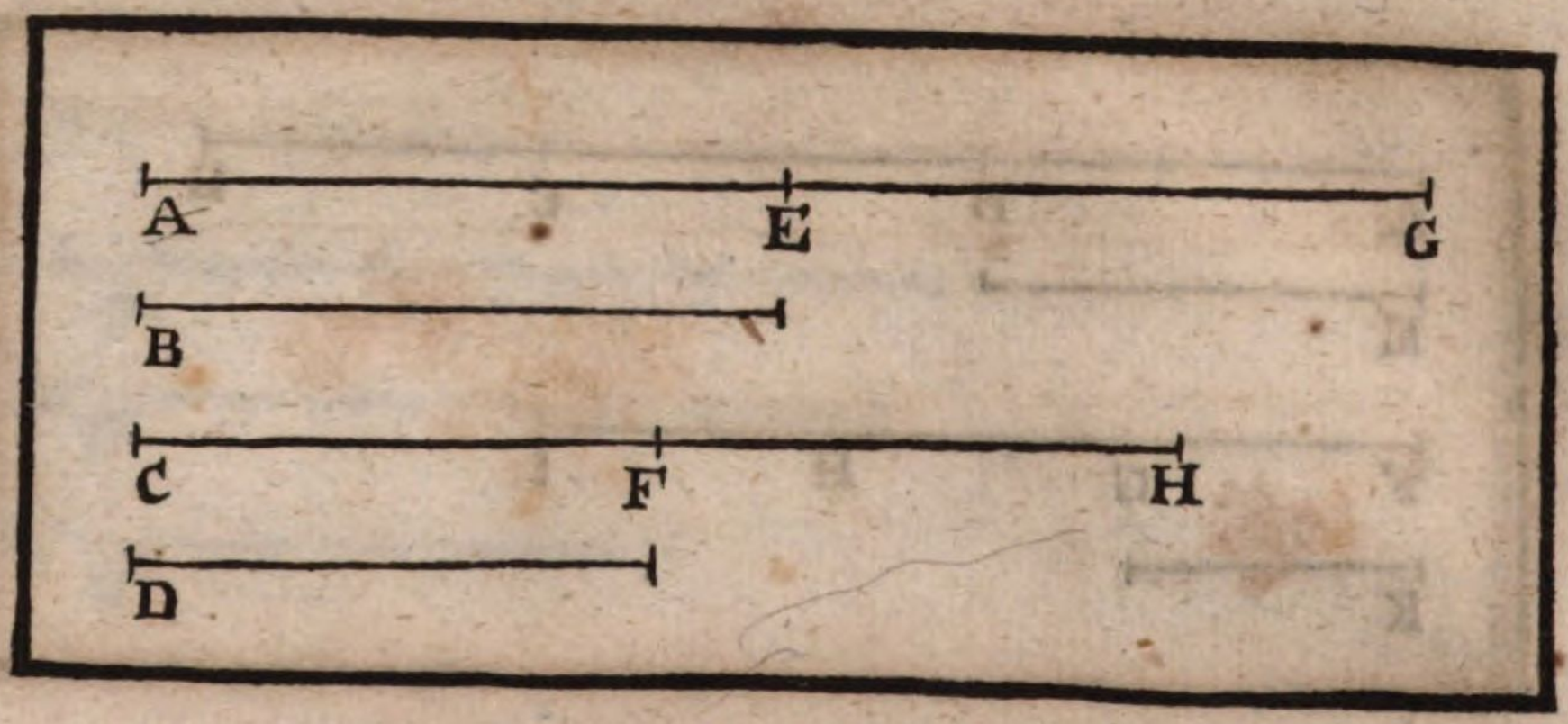
Die Theile halten sich gegen einander, gleichwie ihre gleichförmige vielfache, wann sie nur rechtmässiger Weise gegen einander gehalten werden.

Es seynd gegeben die Theile E, und K deren gleichförmig vielfachen Grössen AD, und FI.

Diesem nach sagt man, daß es seye E.K :: AD. FI.

Beweiß.

Dieweilen AD, und FI gleichförmig vielfache seynt deren Theile E, und L. — d. d. Vorg.
so wird AD so offt begreiffen E, als FI die K. — d. 2. an. def. 2.
Dahero ist AB. FG :: E.K, dann AB ⌐ ist E, und FG ⌐ ist, K. — d. 7.
Auff solche Weise wird auch seyn BC. GH, und CD. HI :: E.K.
Und deßwegen haben AB. BC. CD zu FG. GH. HI einerley Verhaltnuß unter sich. — d. 11.
Folgends schliesset man, daß sich alsdann verhalte AB zu FG (das ist, E zu K) gleich wie AD sich verhalte zu FI. — d. 12.
Nemlich, als wie ein Vorgehendt zu seinem Nachgehenden sich verhaltet, also werden alle vorgehende sammentlich sich zu allen Nachgehenden verhalten.
Dahero halten sich die Theile gegen einander, gleich wie ihre gleichförmig vielfache.
Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Grössen geproportionirt seynd; so werden sie auch durch die Verwechslung geporportionirt verbleiben.

Es ist gegeben, daß sich verhalte AG. B::CH.D. Diesem nach saget man, daß durch die Verwechslung seyn werde, AG. CH::B. D

Beweiß.

Gesetzt, daß die Nachgehende B, nnd D ⊓ seint, ihren vorgehenden AG, und CH.

So ist klar, daß ein Ding seye, AG. CH::B. D.
oder AG. B::CH. D (dann wegen Gleichheit deren Grössen, auch die Verhaltnusse einander gleich seynd), d. 7. 5.

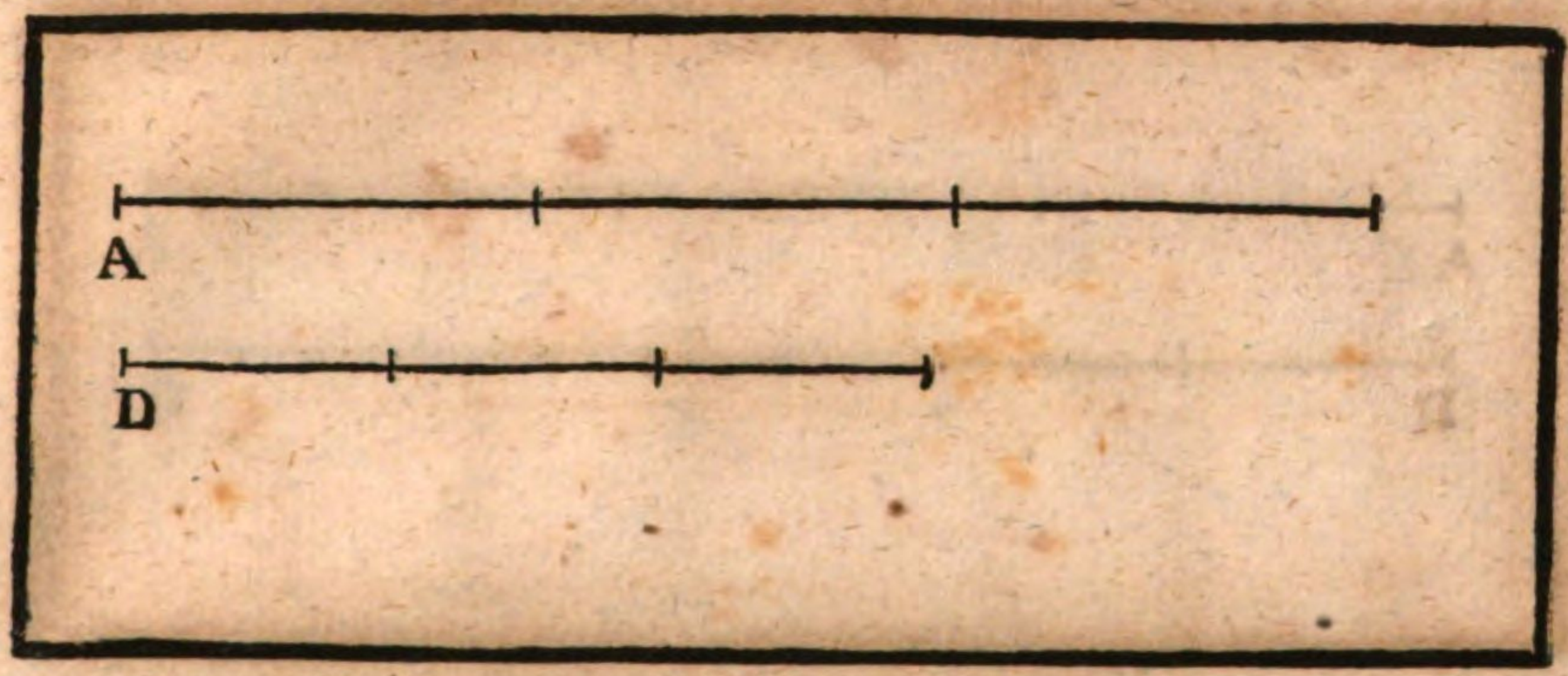
Setze man jetzund, daß B, und D kleiner seynd, als AG, und CH.

Alsdann geschicht (weilen gegeben ist AG. B::CH. D) d. d. Vorg.
daß B und D gleichförmige Theile ihrer gantzen AG, und CH seint. d. 6. def 5.
und dahero sich verhalte AG, CH::B. D. d. 15. 5.

Werden letztlich AG und CH kleiner gesetzt, als B und D:

So folget abermahlen, weilen es ist AG. B::CH. D) d. d. Vorg.
daß AG und CH gleichförmige Theile ihrer gantzen B uud D seint.
und dahero sich verhalten AG. CH::B. D. d. 15. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zusammengesetzte Grösse geproportionirt seint: so werden sie auch vertheilter geproportionirt seyn.

Es ist gegeben AC + CB. CB :: DE + EF. EF, diesem nach saget man, daß sie auch durch die Vertheilung geproportionirt seynd, nemlich AC. CB :: DE. EF.

Beweiß.

Dieweilen gegeben ist AC + CB. CB :: DE + EF. EF.
so wird die gantze AB so offt begreiffen CB, als DF begreifft EF. d. 6. def. 5.

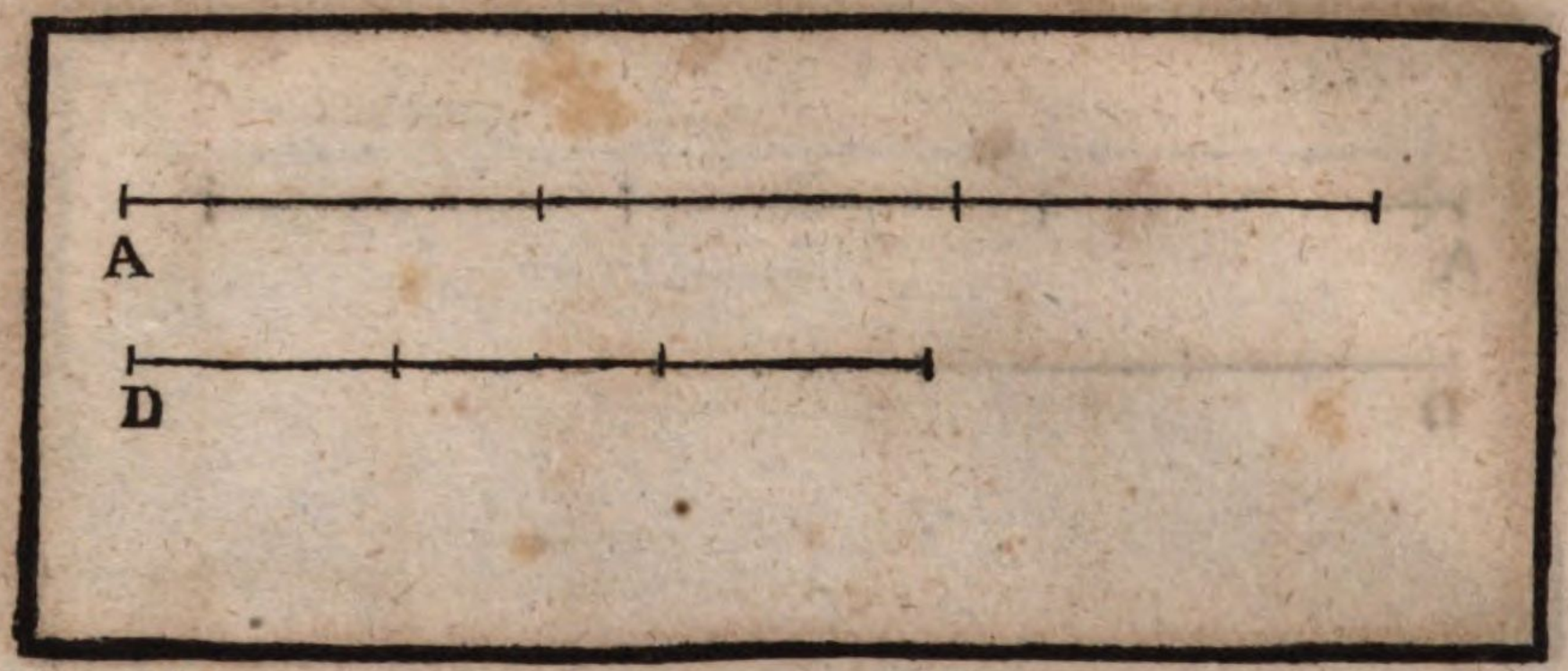
Seye hier gesetzt dreymahln.

Wann unterdessen beyderseits die gleiche Anzahle CB. und FE von ihren gantzen AB, und DF abgezogen werden.

So wird überbleiben die Grösse AC □ in der Anzahl der Grösse DE, nemlich beyderseits zwey Theile.

Dahero wird auch AC so offt begreiffen CB, als DE begreiffet EF. und
folgendt seyn. AC CB :: DE. EF. [d. 6. def. 5. l 7. def. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVIII. Borgab.

Betrachtung.

Wann zertheilte Grösse geproportionirt seynd: so werden sie auch zusammen gesetzter geproportionirt seyn.

Es ist gegeben AB. BC:: DE. EF. Diesem nach saget man, daß sie auch durch die Zusammensetzung geproportionirt seynd, nemlich AB + BC. BC:: DE + EF. EF.

Beweiß.

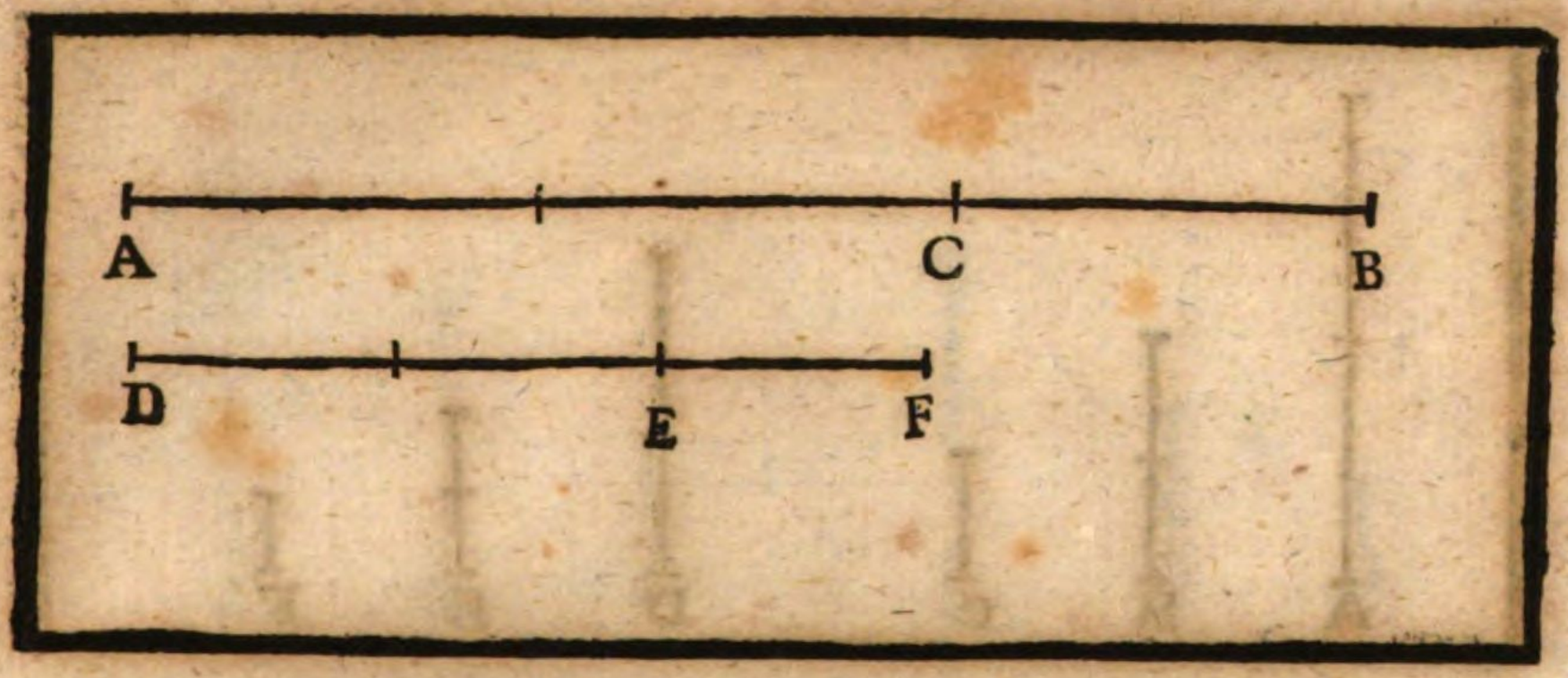
Weilen sich verhaltet AB. BC:: DE. EF.
so wird BC so offt begreiffen seyn von AB, als EF, von DE,
oder BC wird so offt AB begreiffen, als EF die DE. d. 6. def. 5.

Gesetzt, es seye hier zweymahlen geschehen.

Wann man nun zu gleicher Anzahl deren AB und DE,
(nemlich zu zwey gleichen Theilen) die gleiche Anzahl BC und EF,
(das ist beyderseits einen gleichen Theil) hinzu setzet.

So wird AB + BC ▭ an der Anzahl, der DE + EF seyn.
Dahero wird AB + BC so offt BC begreiffen, als DE + EF
begreiffet den gleichformigen Theil EF. } d. 6. def. 5.
Und deßwegen seyn AB + BC. BC:: DE + EF. EF. } 7. def 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XIX. Vorgab. Betrachtung.

Wann ein Ganzes zu einem andern ganzen sich verhaltet, gleichwie das eine abgezogene Stück, zu dem andern abgezogenen Stück: so wird auch das eine übrige Stück, sich zu dem andern übrigen Stück verhalten, gleich wie anfänglich das eine Gantze zu dem andern gantzen.

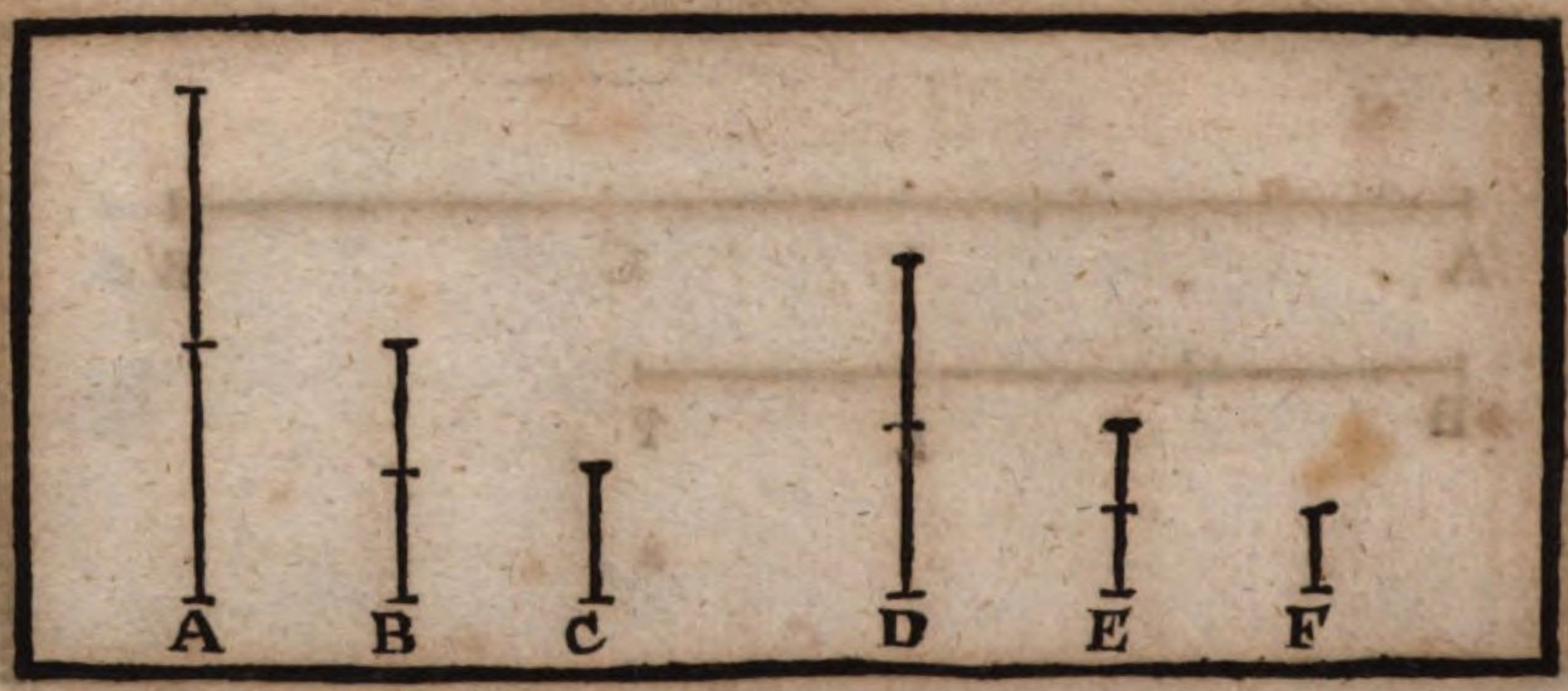
Es ist gegeben, daß sich das gantze AB zu dem andern gantzen DE verhalte, gleich wie das abgezogene Stück AC, sich zu dem andern abgezogenen Stück DF verhaltet. Diesem nach saget man, daß das übrige Stück CB sich auch zu dem andern übrigen Stück FE verhalten werde, gleich wie das gantze AB sich zu dem andern gantzen DE verhalte.

Beweiß.

Weilen es ist AB. DE :: AC. DF.
so wird auch die Verwechslung seyn AB. AC :: DE. DF. d. 16. 5.
und durch die Zertheilung AC. CB :: DF. FE. (oder so ein Ding) CB AC :: FE DF { d. 17. 5. / u. 4. an. 5.
Abermahlen durch die Verwechslung ist CB. FE :: AC. DF.
Unterdessen aber ist gegeben AC. DF :: AB. DE. d. d. Vorg.
Dahero wird auch seyn CB. FE :: AB. DE.
Welches zu beweisen ware.

Anmerckung.

Hiermit wird die Verwendung als giltig angewiesen,
Wann nemlichen anfänglich ist AC. CB :: DE. FE.
so saget man, daß auch giltig seye, durch die Verwendung zu sagen AB AC :: DE DF.
Die Ursach, weilen gegeben ist AB. CB :: DE. FE.
so wird durch die Zertheilung seyn AC. CB :: DF. FE. d. 17. 5.
und durch die Umbkehrung wird seyn CB. AC :: FE. DF. d. 4. an. 5.
Letztlich durch die Zusammensetzung AB. AC :: DE. DF. d. 18. 5.
das ist in verwendter Verhaltnuß. d. 16. def. 5.
Welches zu beweisen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Grössen seynd, und zu diesen noch andere drey Grössen in ordentlicher Proportion darzu genommen werden, also, daß jederzeit zwey und zwey gegen einander gehaltene einerley Verhaltnuß haben: Wann nun die erste Grösse grösser, kleiner, oder gleich ist, der dritten; so wird auch die vierdte Grösse grösser, kleiner, oder gleich seyn der sechsten.

Es ist gegeben, daß die drey Grössen A B. C. gegen denen drey Grössen D. E. F. in ordentlicher Proportion stehen, nemlich daß es seye A. B. :: D. E, und B. C :: E. F. diesem nach saget man, daß

Wann A Γ ist, als C; auch D Γ seyn werde, als F, und so fort, ꝛc.

Beweiß.

Weilen A Γ ist, als C, so wird die Verhaltnuß A zu B Γ seyn, als die Verhaltnuß C zu B. — d. d. Vorg. d. 8. 5.

Die Verhaltnuß D zu E ist unterdessen ⌐ der Verhaltnuß A zu B. — d. d. Vorg.

Dahero wird auch die Verhaltnuß D zu E Γ seyn, als die Verhaltnuß C zu B.

Es ist aber B. C :: E. F. — d. d. Vorg.

und durch die Umbkehrung C B :: F. E. — d. 4. an. 5.

Deßwegen wird auch die Verhaltnuß D zu E Γ seyn, als die Verhaltnuß F. zu E.

Darauß folget letzlich, daß dann D Γ seye, als F. — d. 10. 5.

Eben auff solche Weise solte bewiesen werden, wann A ⌉, oder ⌐ gegeben wird der C; daß auch D ⌉, oder ⌐ wäre, der F.

Welches zu beweisen ware.

Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Grösse seynd, und noch andere drey Grössen nach solcher Beschaffenheit darzu genommen werden, also daß jederzeit zwey und zwey gegen einander gehaltener einerley Verhaltnuß haben, doch aber in einer verruckten Ordnung: Wann nun die erste Grösse, grösser, kleiner, oder gleich ist der dritten; so wird auch die vierte Grösse grösser, kleiner oder gleich seyn der sechsten.

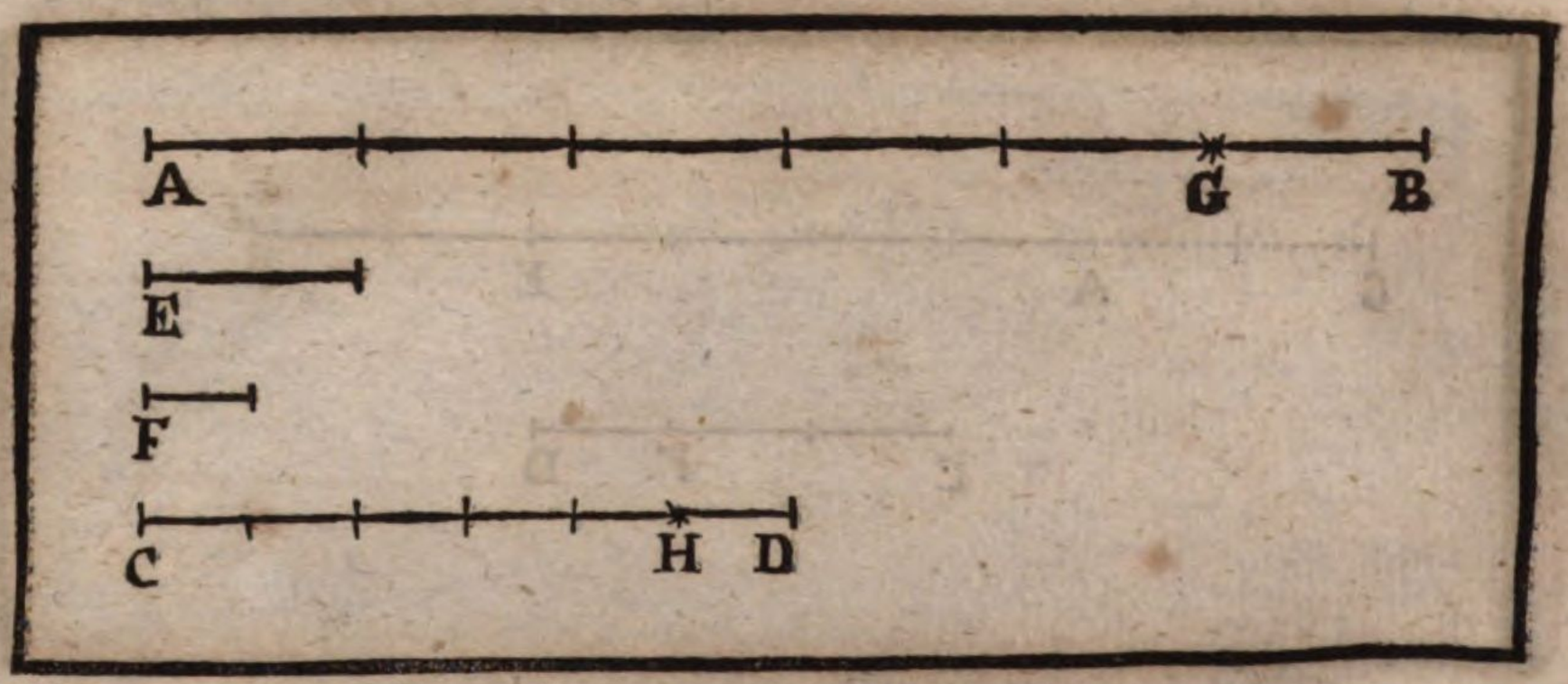
Es ist gegeben, daß die drey Grössen A. B. C, gegen denen drey Grössen D. E F. in verruckter Proportion stehen, nemlich A. B :: E. F, und B. C:: D. E. Diesem nach saget man, wann A ⌜ seye, als C, daß auch D ⌜ seye, als F. u. s. f.

Beweiß.

Weilen A ⌜ ist, als C, so wird die
Verhaltnuß A zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß C zu B. d. 8. s.
Die Verhaltnuß A zu B ist aber ⌐ der Verhaltnuß E zu F. d. d. Vorg.
Dahero wird die Verhaltnuß E zu F ⌜ seyn, als die Verhaltnuß C zu B.
Unterdessen ist gegeben B. C :: D. E.
und durch die Umbkehrung C. B :: E. D. d. 4. s.
Dahero wird die Verhaltnuß E zu F ⌜ seyn, als die Verhaltnuß E zu D.
Darauß folget, daß auch D ⌜ seye, als F. d. 10. s.

Welches zu beweisen ware.

Eben auff solche Art beweiset man, daß, wann A ⌝, oder ⌐ ist, der C; auch D ⌝, oder ⌐ seye der F.



Die VI. Vorgab.

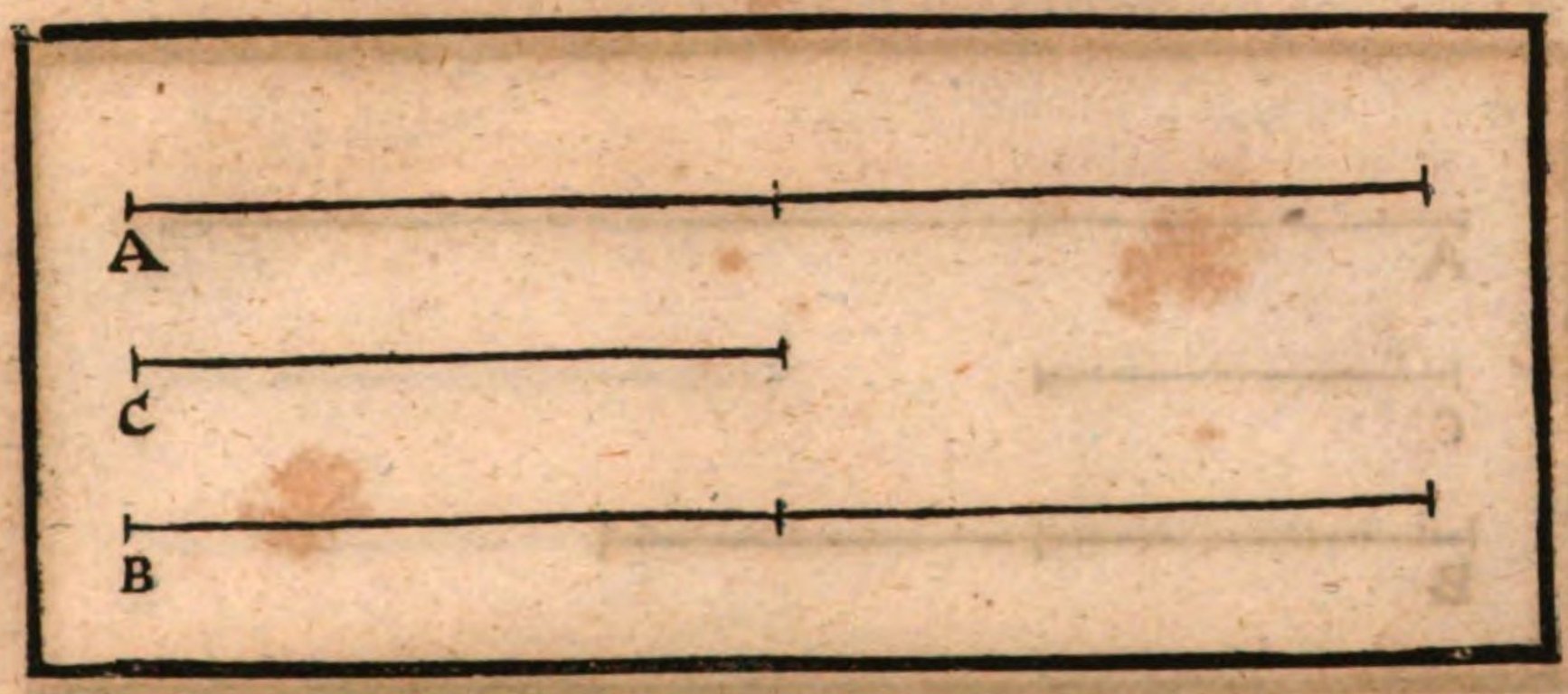
Betrachtung.

Wann zwey Grösse, anderer zwey Grössen gleichförmig vielfach seint, und man von diesen auch gleichförmig vielfache darvon nemmet: so werden auch die übrige entweder denen andern gleichförmig vielfache, oder gleich groß verbleiben.

Es seynd gegeben die Grösse AB, und CD gleichförmig vielfache deren E und F; und man hat darvon genommen AG, und CH, gleichförmig vielfache, derenselben E, und F. Diesem nach saget man, daß die übrige Grösse GB, und HD entweder gleichförmig vielfach deren E, und F, oder denenselben gleich groß verblieben seynd.

Beweiß.

Die Grösse AB, und CD seynd gleichförmig vielfach deren E, und F. d. d. Vorg.
Dahero in AB so viel Theile (deren ein jeder gleich ist der E) seint, d. 2. an. def 2. 5.
als Theile seint in CD (deren ein jeder gleich ist der F).
Es seint auch genommen AG, und CH gleichförmig vielfache deren E, und F. d. d. Vorg.
Dahero werden auch in AG so viel Theile (deren ein jeder gleich ist der E) seyn, d. 2. an. def. 2. 5.
als Theile seyn in CH (deren ein jeder gleich ist der F).
Wann man nun von dergleichen Anzahl deren gleichen Theile (so in AB, und CD seint)
die gleiche Anzahl deren gleichen Theile, so in AG, und CH seint, abziehet
So werden in GB so viel Theile □, der E verbleiben, als Theile in HD □, der F seint. d. 3. ax. 1.
Wann nun GB □ ist, der E:
So wird auch HD □ seyn, der F.
Seint dann mehr Theile in GB, und HD,
so ist klar, daß GB und HD auch gleichförmig vielfache seint deren E und F.
Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Gleiche Grössen, welche zu einer andern Grösse verglichen werden, haben zu ihr einerley Verhaltnuß: und hinwiederumb eine Grösse zu andern gleichen Grösse verglichener, hat einerley Verhaltnuß zu ihnen.

Es seynd gegeben die Grösse A, und B, so einander gleich seynd, wann man diese zu der gegebenen Grösse C vergleichet: So saget man, daß beyde Grössen A, und B einerley Verhaltnuß zu der C haben, nemlich es sey A. C:: B. C.

Beweiß.

I.

Weilen A □ ist gegeben, der B,
so wird A so offt C begreiffen, als B dieselbe C: oder
A wird so offt ein gleicher Theil von C. seyn, als B von der C.
ein solcher Theil ist.

Dahero ist auch die Verhaltnuß A zu C □, der Verhaltnuß B zu C. d.6.def.5.
und folgends seyn werde: A. C.:: B. C. d.7.def.5.

II.

Wann nun die C zu denen gleichen Grössen A, und B verglichen wird,
so saget man, daß die Grösse C zu diesen beyden einerley Verhaltnuß
habe.

Die Ursach ist, weilen vorgehends ist bewiesen worden, daß es seye A. C:: B. C.
so ist auch durch die Umbkehrung giltig zu sagen: C. A:: CB. d.an.4.5.

Das ist, die Verhaltnuß C zu A ist □ der Verhaltnuß C zu B.
Welches zu beweisen ware.

Mercke, daß diese, und die vier folgende Vorgaben pure allgemeine
Wissenschafften seynd.

Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Unter zweyen ungleichen Grössen, welche zu einerley Grösse gehalten werden, hat die Grössere eine grössere Verhaltnuß zu derselben, als die kleinere: hinwiederumb wird dieselbe Grösse zu der kleinern eine grössere Verhaltnuß haben, als zu der grössern.

Es seynd gegeben die zwey ungleiche Grösse A und B, welche zu der gegebenen Grösse C verglichen werden. Diesem nach saget man, daß die grössere A zu der Grösse C eine grössere Verhaltnuß habe, als die kleinere B zu derselben C.

Beweiß.

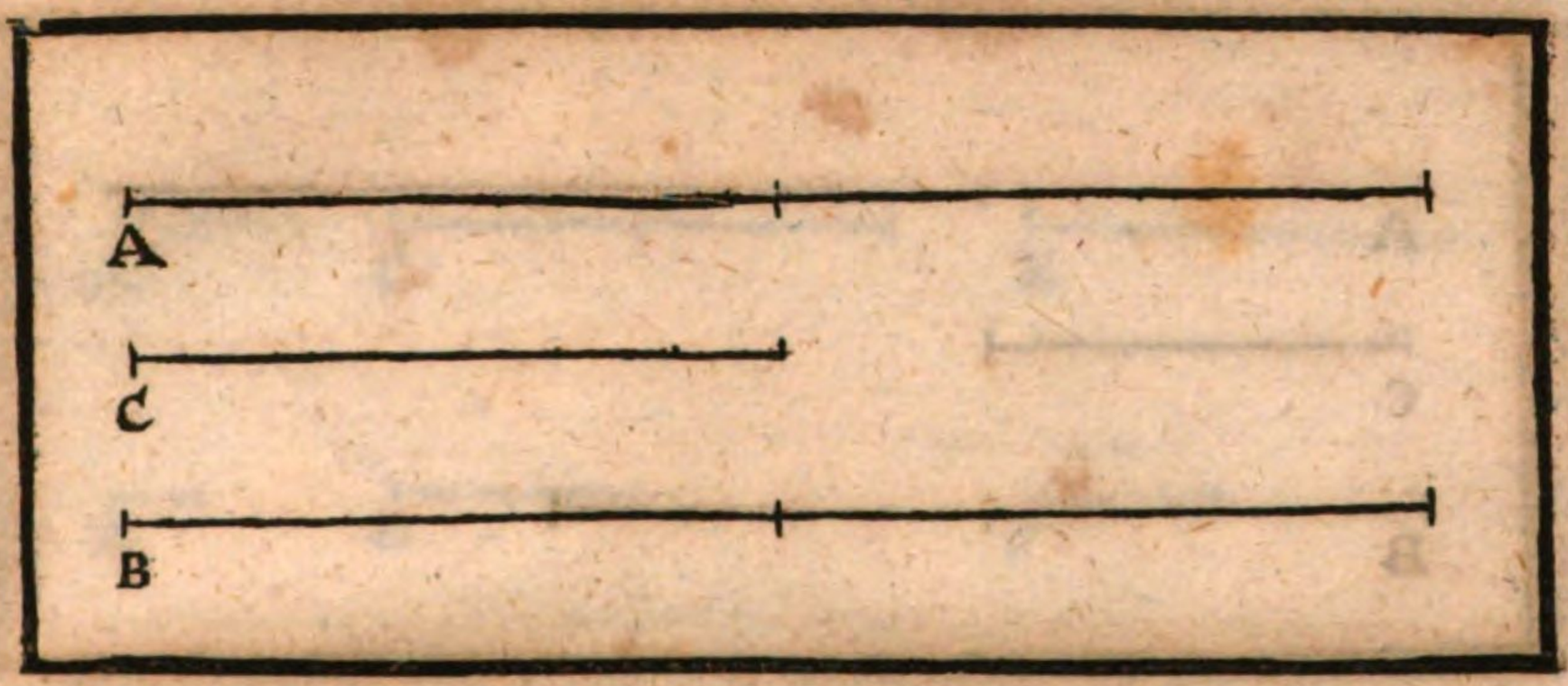
I.

Weilen A Γ gegeben ist, als B;
so wird A offter begreiffen C, als B dieselbe C:
Dahero wird A zu C auch eine grössere Verhaltnuß haben,
als B zu derselben C d. 8. def. 5.

II.

Gestalt dieser Sachen, wann nun die Grösse C zu denen zwey ungleichen Grössen A und B verglichen wird, so saget man, daß C zu der kleinern B eine grössere Verhaltnuß habe, als zu der grössern A:
Dann C ein grösserer Theil von seinem Nachgehenden, der kleinern B, als dieselbe C von seinem Nachgehenden, der grössern A ist.
Dahero auch C eine grössere Verhaltnuß hat zu der kleinern B. d. 8. def. 5.
als zu der grössern A.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Vorgab.

Betrachtung.

Die Grössen, welche zu einer andern Grösse einerley Verhaltnuß haben, seint einander gleich groß: und wann eine Grösse zur andern Grösse einerley Verhaltnuß hat, so seynd dieselbe auch einander gleich groß.

Es ist gegeben, daß die zwey Grösse A und B einerley Verhaltnuß haben zu C. Diesem nach saget man, daß A □ seye, der B.

Beweiß.

Gesetzt, man sagete, es wäre A nicht □ der B, sondern A seye entweder ⌜, oder ⌝, als die B.

So folgete aber darauff, daß auch die Verhaltnuß A zu C entweder ⌜ oder ⌝ wäre, als die Verhaltnuß B zu C. 8. 8. 5.

Dieses aber streitet wieder die Vorgab, indeme beyde Verhaltnusse anfänglich gleich einander seint gegeben worden.

Darumb ist noch wahr zu sagen, daß A □ seye der B.

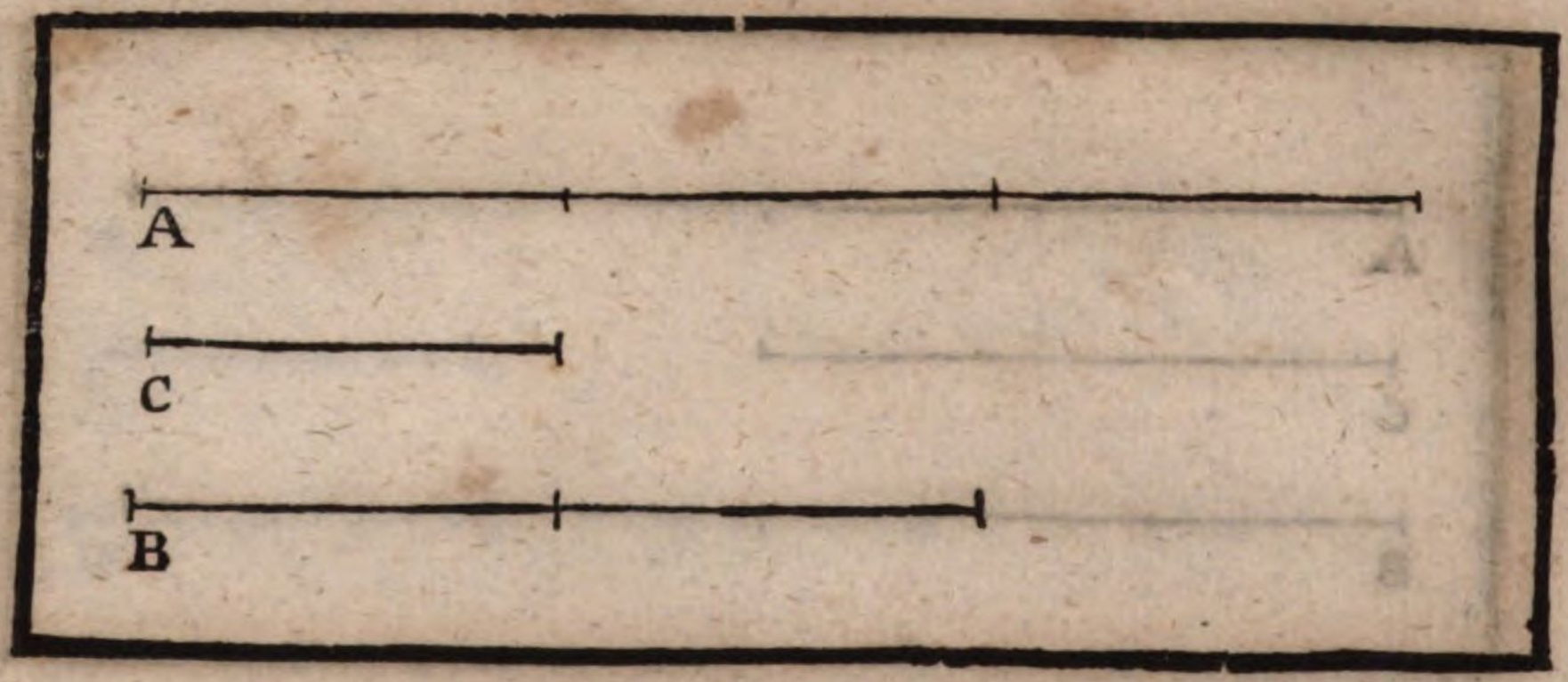
Es seye abermahlen gegeben, daß die Grösse C zu denen gegebenen Grössen A und B einerley Verhaltnuß habe. Diesem nach saget man, daß A □ seye, der B.

Dann weilen C zu A, und B einerley Verhaltnuß hat, so muß auch nothwendig A □ seyn, der B.

Sonsten, wann A und B nicht einander gleich wären, auch die Verhaltnusse zu der C einander ungleich wären, welches aber wieder die Vorgab streitet. 8. 8. 5.

Dahero schliesset man, daß nothwendig A □ seye, der B.

Welches zu beweisen ware.



Die X. Vorgab.

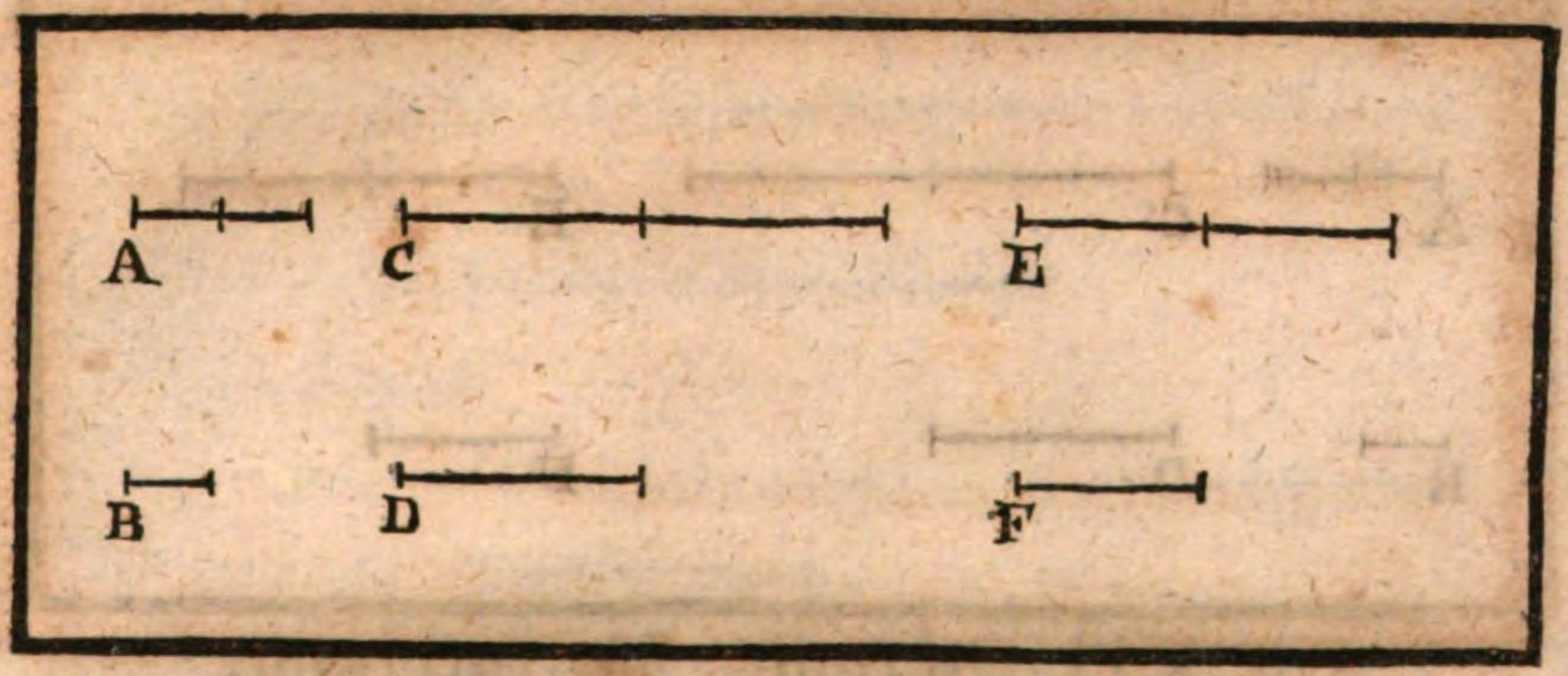
Betrachtung.

Wann zwey Grösse zu einer andern Grösse gehalten werden, so ist unter solchen die grössere, welche eine grössere Verhaltnuß zu derselben andern hat; gegen welchen aber dieselbe eine grössere Verhaltnuß hat, die ist kleiner.

Es seye gegeben, daß die Verhaltnuß der Grösse A zu der Grösse C ⌜ seye, als die Verhaltnuß B zu derselben C. so sagt man, daß auch A ⌜ seye, als B.

Beweiß.

Gestehet man es nicht, sondern saget, daß A ⌐ wäre, der B.
So folgete darauff, daß auch die Verhaltnuß A zu C ⌐ wäre, der Verhaltnuß B zu C. Welches aber wider die Vorgab ist. d. 7. 5.
Wil man weiter sagen, daß A ⌝ seye, als B.
so folgete auch, daß die Verhaltnuß A zu C ⌝ wäre, als die Verhaltnuß B zu C, welches eben wider die Vorgab ist. d. 8. 5.
Dahero schliesset man, daß nothwendig A ⌜ seyn muß, als B.
Es ist weiters gegeben, daß die Verhaltnuß C zu B ⌜ seye, als die Verhaltnuß C zu A, so saget man, daß B kleiner seye, als A.
Dann wann man sagete, daß B ⌐ wäre der A.
so folgete, daß die Verhaltnuß C zu B auch ⌐ wäre, der Verhaltnuß C zu A, welches wider die Vorgab ist. d. 7. 5.
Wil man aber sagen, daß B ⌜ seye, als A:
so folget, daß die Verhaltnuß C zu A ⌜ wäre, als die Verhaltnuß C zu B. welches eben wider die Vorgab ist. d. 8. 5.
Dahero ist unfehlbar zu sagen, daß B ⌝ seye, als A.
Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab.

Betrachtung.

Die Grössen, welche gegen einer andern einerley Verhaltnuß haben, haben auch unter sich einerley Verhaltnuß.

Es seynd gegeben die Grössen AB EF. CD, und A verhalte sich zu B, als wie E zu F. und auch C verhalte sich zu D, gleich wie dieselbe E zu F. u. s. f. diesen nach saget man, daß es seyn werde A. B :: C. D.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß A zu B ☐ ist, der Verhaltnuß E zu F. d. d. Vorg.
so wird A so offt B begreiffen, als E die F. oder,
A wird so offt von B begriffen, als E von F.

Es ist aber gegeben die Verhaltnuß C zu D ☐, der Verhaltnuß E zu F.
so wird auch C so offt D begreiffen, als E die F, oder,
C wird so offt von D begriffen seyn, als E von F.

Dahero wird auch A so offt B begreiffen, als C die D, oder d. 1. ax. 1.
A wird so offt von B begriffen, als C von D.

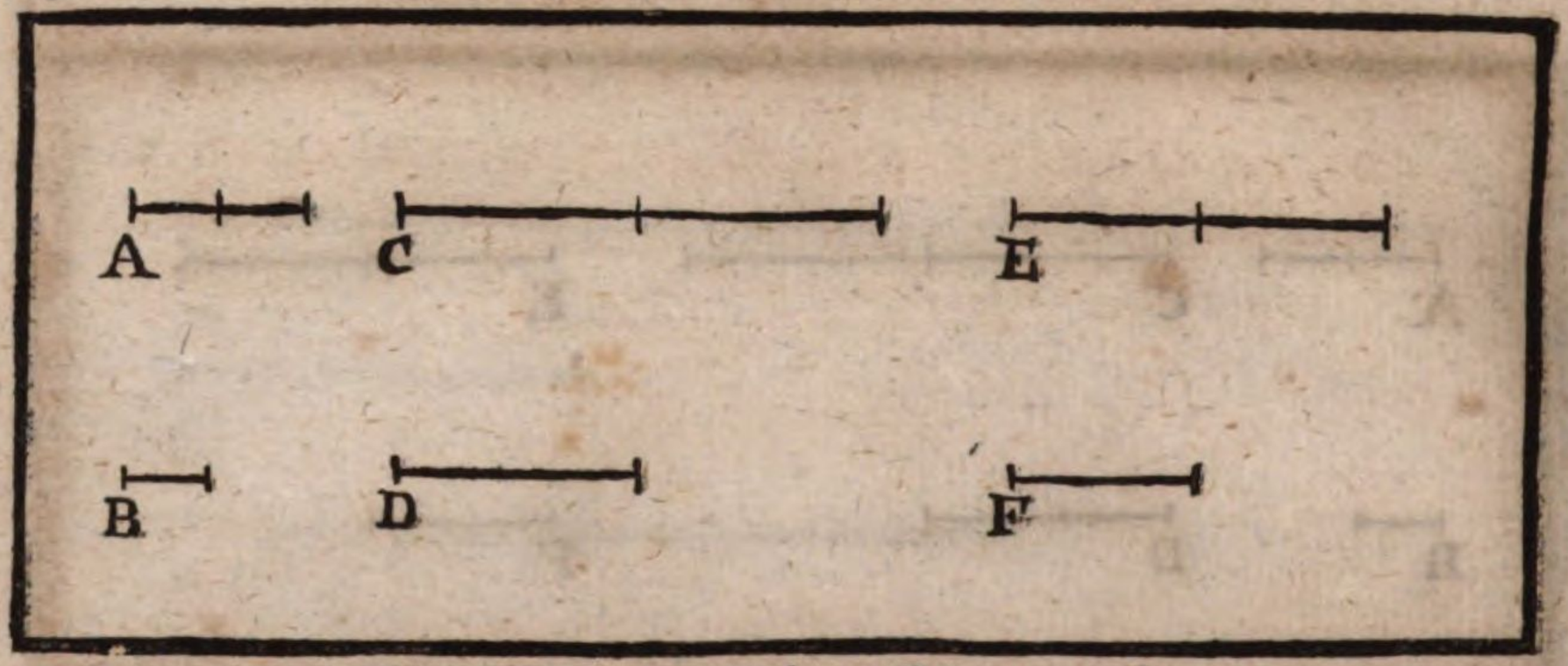
Worauff folget, daß dann seye A. B :: C. D. d. 6. def. 5.
Welches zu beweisen ware. d. 7. def. 5.

Anmerckung.

Die Grösse, welche gegen andern Grössen einerley Verhaltnus haben, haben auch unter sich einerley Verhaltnus

A	2.	B	1. ::	C	6.	D. 3.
E	8	F	4. ::	G	12.	H. 6.

Wann es ist A. B :: C. D, und E. F :: A. B, und G. H :: C. D so sazet man, daß auch seye E. F. :: G. H; dann weilen die Verhaltnusse E zu F, und C zu D ☐ seint der Verhaltnuß A zu B: so wird durch die 11. 5. seyn EF :: C. D und wiederum indeme die Verhaltnusse E zu F, und G zu H ☐ seint, der Verhaltnuß C zu D; so wird auch durch dieselbe 11. 5 seyn, E. F :: G. H.



Die XII. Vorgab. Betrachtung.

Wann so viel Grösse seint, als man wil, welche einerley Verhaltnus gegen andere Grösse haben: so wird seyn, gleich wie sich ein vorgehend zu seinem Nachgehenden verhaltet; also werden alle Vorgehende zusammen genommen, sich zu allen Nachgehenden zusammen genommen verhalten.

Es seynd gegeben die Grösse A. C. E. welche einerley Verhaltnuß haben, zu denen Grössen B. D. F. das ist, A. B. :: C. D. :: E. F. Diesem nach saget man, daß auch seyn werde, gleich wie ein vorgehendes A sich zu seinem nachgehenden B verhaltet: Also werden alle Vorgehende A. C. E sammentlich, sich zu allen Nachgehenden B D. F sammentlich verhalten, das ist, es werde seyn A. B :: A + C + E. B + D + F.

Beweiß. Dieweilen die Grösse A. C. E einerley Verhaltnuß zu ihren Nachgehenden B. D. F haben.

So werden sie ihre Nachgehende in gleicher Anzahl begreiffen, nemlich ein jede das Seine: oder, so werden sie von ihren Nachgehenden in gleicher Anzahl begriffen werden, nemlich eine jede von dem Seinen. d. 6. def. 5.

Gesetzt, es seye ein Vorgehendes, gleich wie A, doppelt, oder dreyfach seines Nachgehenden B.

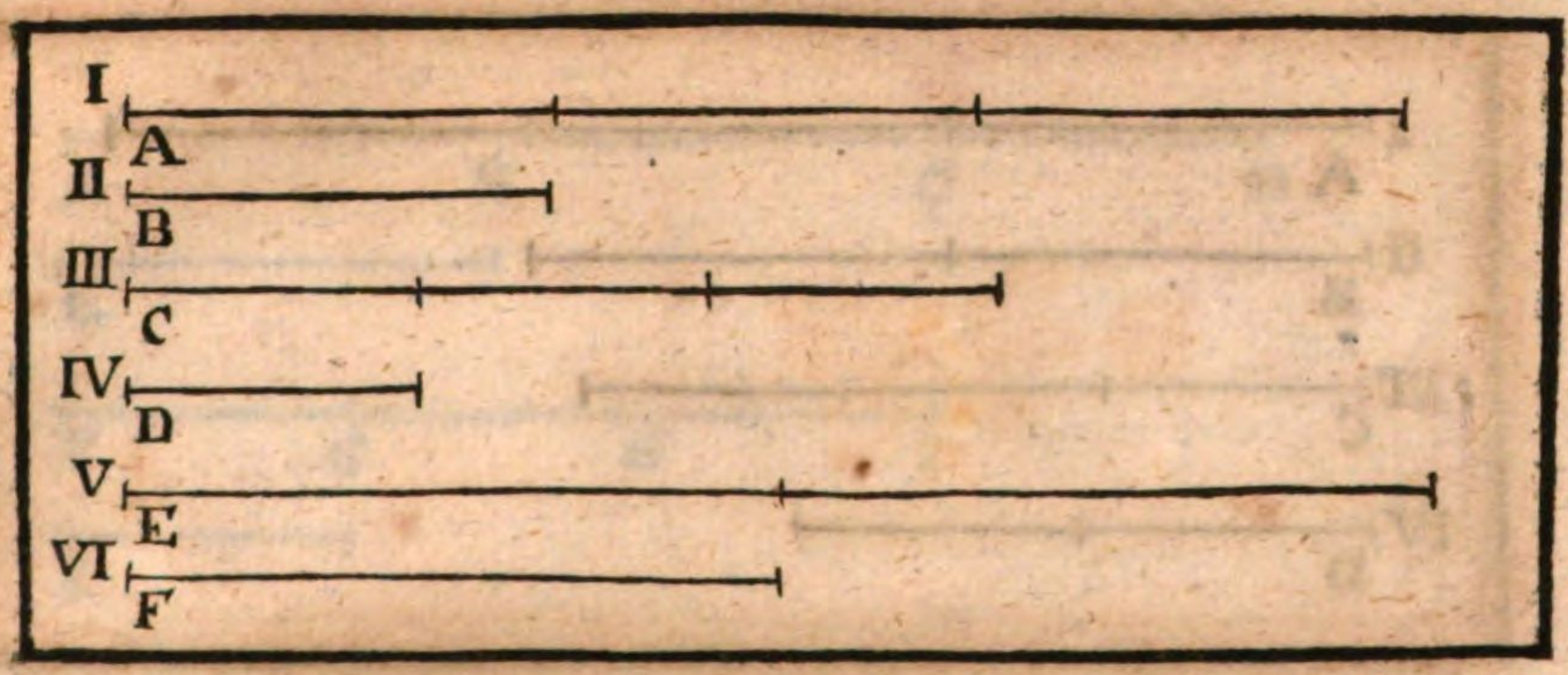
So folget, daß auch die andere C und E, doppelt, oder dreyfach seyn werden ihrer Nachgehenden D und F.

Auff solche Weise (weilen dann beyderseits gleichförmige Grössen zusammen genommen werden) nun klar ist, daß die gantze Summen deren Vorgehenden auch doppelt oder dreyfach, der gantzen Summen deren Nachgehenden seyn werde, gleich wie das eine vorgehend A doppelt oder dreyfach gesetzt ware seines Nachgehenden B (dann beyderseits eine gleichförmige Zusammensetzung geschiehet).

Und dahero die gantze Summen deren vorgehenden, so offt die gantze Summen deren nachgehenden begreiffen werde, oder die gantze Summen deren vorgehenden, so offt von der gantzen Summen deren Nachgehenden begriffen seyn wird, wie offt ein vorgehendes, sein Nachgehendes begreiffet, oder ein Vorgehendes von seinem Nachgehenden begriffen ist.

Deßwegen wird seyn A. B :: A + C + E. B + D + F. { d. 6. def. 5. / 7. def. 5.
Welches zu beweisen ware.

Folge. Wann man gleichförmige geproportionirte Grössen zu gleichförmigen geproportionirten Grössen hinzu setzet, so wird auch die Summa gleichförmig geproportionirt seyn.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

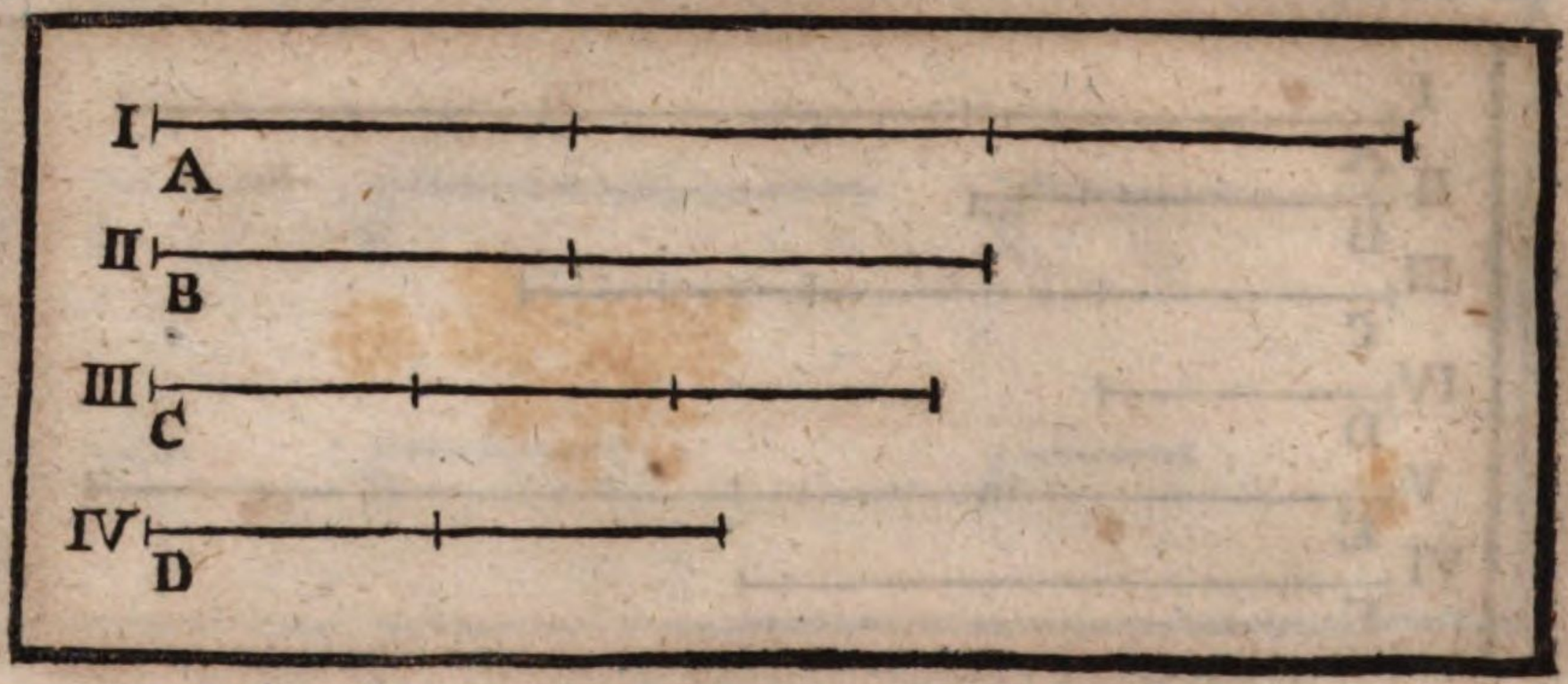
Wann die erste Grösse zu der anderten eine solche Verhaltnuß hat, als wie die dritte zu der vierten. Die dritte aber zu der vierdten eine grössere Verhaltnuß hat, als die fünffte zu der sechsten: so wird auch die erste Grösse, zu der anderten eine grössere Verhaltnuß haben, als die fünffte zu der sechsten.

Es ist gegeben, daß die Verhaltnuß der ersten Grösse A zu der anderten B ⌐¬ seye, der Verhaltnuß der dritten C zu der vierdten D. Die Verhaltnuß der dritten C zu der vierten D aber, ist ⌐ gegeben, als die Verhaltnuß der fünfften E zu der sechsten F. Diesem nach saget man, daß auch die Verhaltnuß der ersten A zu der anderten B ⌐ seye, als die Verhaltnuß der fünfften E zu der sechsten F.

Beweiß.

Die Verhaltnuß C zu D ist ⌐ gegeben, als die Verhaltnuß E zu der F. d. d. Vorg.
Dahero C öffter begreiffen werde die D, als E die F. d. 8. def. 5.
Es ist unterdessen C. D :: A. B. oder C D ⌐¬, A B. d. d. Vorg.
Folget, daß auch A öffter begreiffen werde die B, als E die F.
Unterdessen wird A zu B auch eine grössere Verhaltnuß haben, als E zu F. d. 8. def. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erste Grösse zu der anderten sich verhaltet, als wie die dritte zu der vierten: wann nun die erste Grösse grösser, kleiner oder gleich ist der dritten: so wird auch die anderte Grösse grösser, kleiner, oder gleich seyn der vierten.

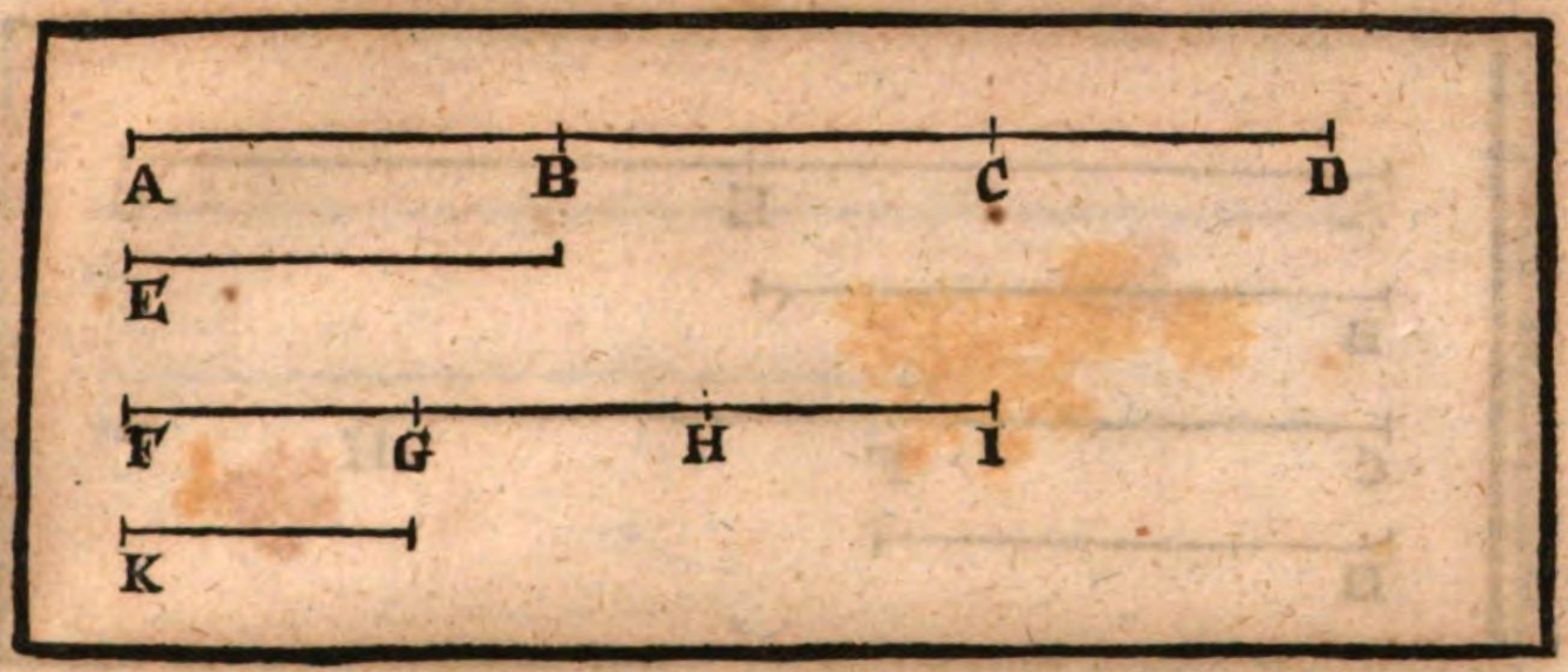
Es seye gegeben, daß sich verhalte A. B :: C. D diesen nach saget man: Wann die erste A ⌜, ⌝, oder ⌐⌙ ist, der dritten C. so werde auch die anderte B ⌜, ⌝ oder ⌐⌙ seyn der vierdten D.

Beweiß.

Seye erstlich gesetzt, daß A ⌜ seye, als C.
so saget man, daß auch B ⌜ seye als D,
Dann, weilen A ⌜ ist, als C.
so wird die Verhaltnuß A zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß C zu B. d. 8. def. 5.
Unterdessen ist die Verhaltnuß A zu B ⌐⌙ der Verhaltnuß C zu D. d. d. Vor.
Dahero werde auch die Verhaltnuß C zu D ⌜ seyn, als
die Verhaltnuß C zu B.
Und deßwegen wird D ⌝ seyn, als B; oder (so ein Ding) B ist ⌜, als D. d. 10. 5.

Welches zu beweisen ware.

Eben auff solche Art solte bewiesen werden, daß, wann die Grösse A ⌝,
oder ⌐⌙ gegeben würde der C, auch B ⌝, oder ⌐⌙ seyn solte, der D.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

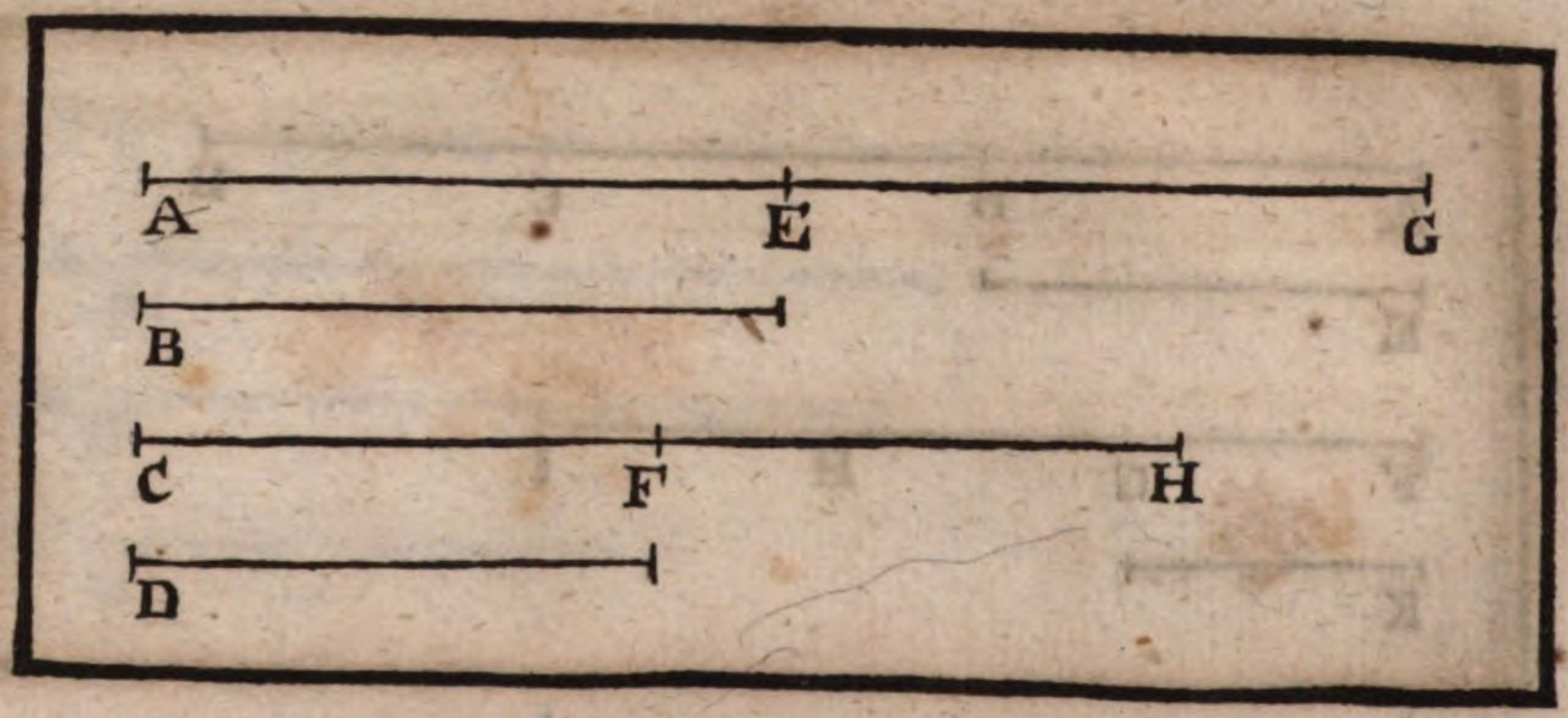
Die Theile halten sich gegen einander, gleichwie ihre gleichförmige vielfache, wann sie nur rechtmässiger Weise gegen einander gehalten werden.

Es seynd gegeben die Theile E, und K deren gleichförmig vielfachen Grössen AD, und FI.

Diesem nach sagt man, daß es seye E.K :: AD. FI.

Beweiß.

Dieweilen AD, und FI gleichförmig vielfache seynt deren Theile E, und L. d. d. Vorg.
so wird AD so offt begreiffen E, als FI die K. d. 2. an. def. 2. 5.
Dahero ist AB. FG :: E.K, dann AB ⊓ ist E, d. 7. 5.
und FG ⊓ ist, K.
Auff solche Weise wird auch seyn BC. GH, und CD. HI :: E.K.
Und deßwegen haben AB. BC. CD zu FG. GH. HI einerley Verhaltnuß unter sich. d. 11. 5.
Folgends schliesset man, daß sich alsdann verhalte AB zu FG (das ist, E zu K) gleich wie AD sich verhalte zu FI. d. 12. 5.
Nemlich, als wie ein Vorgehendt zu seinem Nachgehenden sich verhaltet, also werden alle vorgehende sammentlich sich zu allen Nachgehenden verhalten.
Dahero halten sich die Theile gegen einander, gleich wie ihre gleichförmig vielfache.
Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Grössen geproportionirt seynd; so werden sie auch durch die Verwechslung geporportionirt verbleiben.

Es ist gegeben, daß sich verhalte AG. B::CH.D. Diesem nach saget man, daß durch die Verwechslung seyn werde, AG. CH::B. D

Beweiß.

Gesetzt, daß die Nachgehende B, nnd D ⊓ seint, ihren vorgehenden AG, und CH.

So ist klar, daß ein Ding seye, AG. CH::B. D.
oder AG. B::CH. D (dann wegen Gleichheit deren Grössen, auch die Verhaltnusse einander gleich seynd), d. 7. 5.

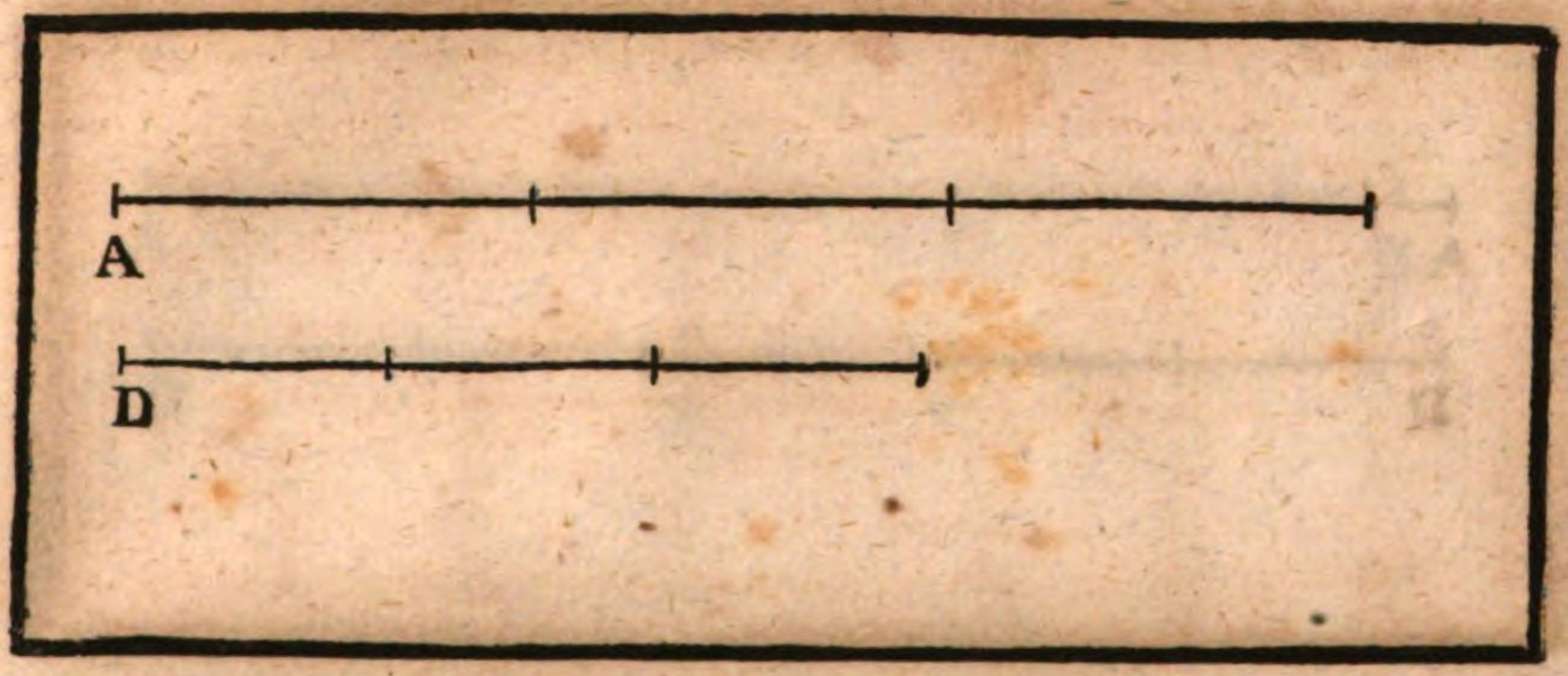
Setze man jetzund, daß B, und D kleiner seynd, als AG, und CH.

Alsdann geschicht (weilen gegeben ist AG. B::CH. D) d. d. Vorg.
daß B und D gleichförmige Theile ihrer gantzen AG, und CH seint. d. 6. def 5.
und dahero sich verhalte AG, CH::B. D. d. 15. 5.

Werden letztlich AG und CH kleiner gesetzt, als B und D:

So folget abermahlen, weilen es ist AG. B::CH. D) d. d. Vorg.
daß AG und CH gleichförmige Theile ihrer gantzen B und D seint.
und dahero sich verhalten AG. CH::B. D. d. 15. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

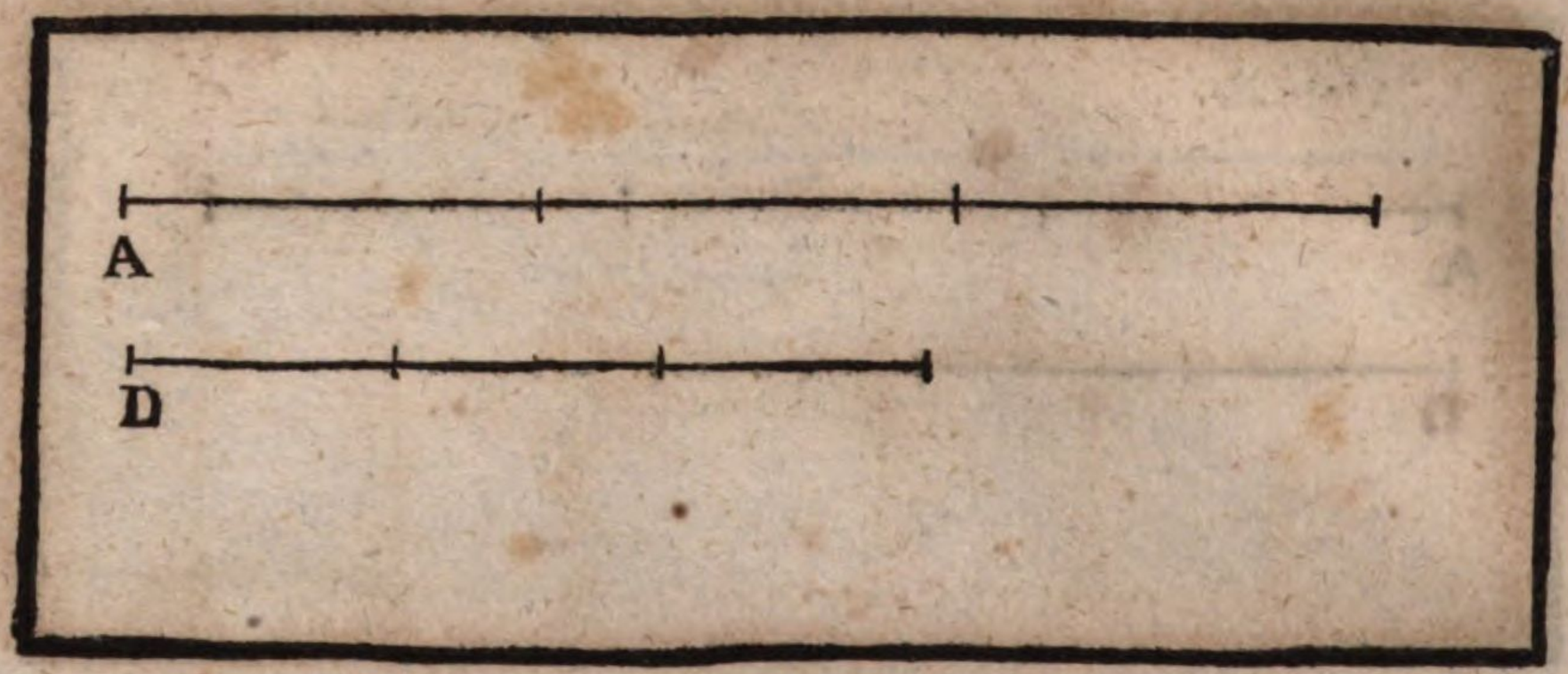
Wann zusammengesetzte Grösse geproportionirt seint: so werden sie auch vertheilter geproportionirt seyn.

Es ist gegeben AC + CB. CB :: DE + EF. EF, diesem nach saget man, daß sie auch durch die Vertheilung geproportionirt seynd, nemlich AC. CB :: DE. EF.

Beweiß.

Dieweilen gegeben ist AC + CB. CB :: DE + EF. EF.
so wird die gantze AB so offt begreiffen CB, als DF begreifft EF. d. 6. def. 5.
Seye hier gesetzt dreymahln.
Wann unterdessen beyderseits die gleiche Anzahle CB. und FE von ihren gantzen AB, und DF abgezogen werden.
So wird überbleiben die Grösse AC □ in der Anzahl der Grösse DE, nemlich beyderseits zwey Theile.
Dahero wird auch AC so offt begreiffen CB, als DE begreiffet EF. und
folgendt seyn. AC CB :: DE. EF. [d. 6. def. 5. l 7. def. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zertheilte Grösse geproportionirt seynd: so werden sie auch zusammen gesetzter geproportionirt seyn.

Es ist gegeben AB. BC:: DE. EF. Diesem nach saget man, daß sie auch durch die Zusammensetzung geproportionirt seynd, nemlich AB + BC. BC:: DE + EF. EF.

Beweiß.

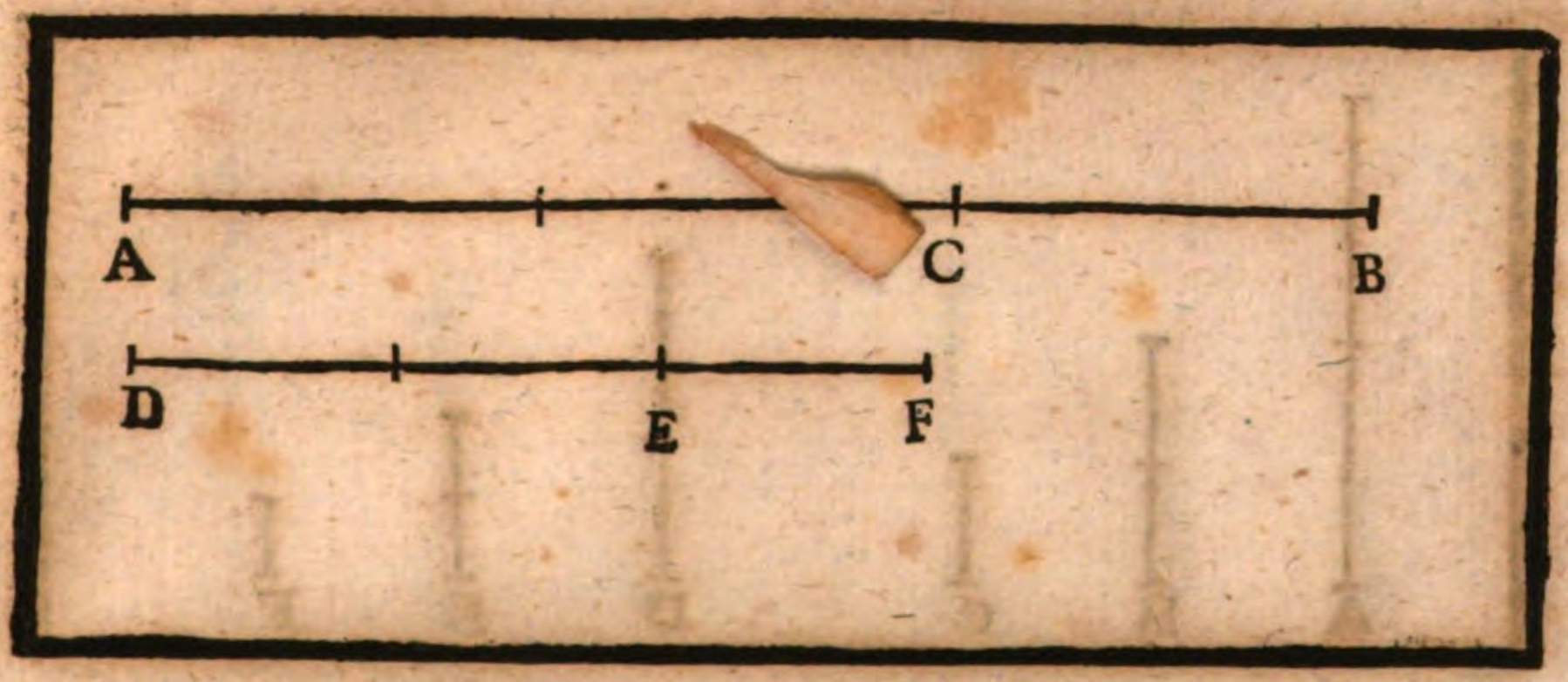
Weilen sich verhaltet AB. BC:: DE. EF.
so wird BC so offt begreiffen seyn von AB, als EF, von DE,
oder BC wird so offt AB begreiffen, als EF die DE. d. 6. def. 5.

Gesetzt, es seye hier zweymahlen geschehen.

Wann man nun zu gleicher Anzahl deren AB und DE,
(nemlich zu zwey gleichen Theilen) die gleiche Anzahl BC und EF,
(das ist beyderseits einen gleichen Theil) hinzu setzet.

So wird AB + BC ▭ an der Anzahl, der DE + EF seyn.
Dahero wird AB + BC so offt BC begreiffen, als DE + EF
begreiffet den gleichformigen Theil EF. } d. 6. def. 5.
Und deßwegen seyn AB + BC. BC:: DE + EF. EF. } 7. def 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XIX. Vorgab. Betrachtung.

Wann ein Ganzes zu einem andern ganzen sich verhaltet, gleichwie das eine abgezogene Stück, zu dem andern abgezogenen Stück: so wird auch das eine übrige Stück, sich zu dem andern übrigen Stück verhalten, gleich wie anfänglich das eine Gantze zu dem andern gantzen.

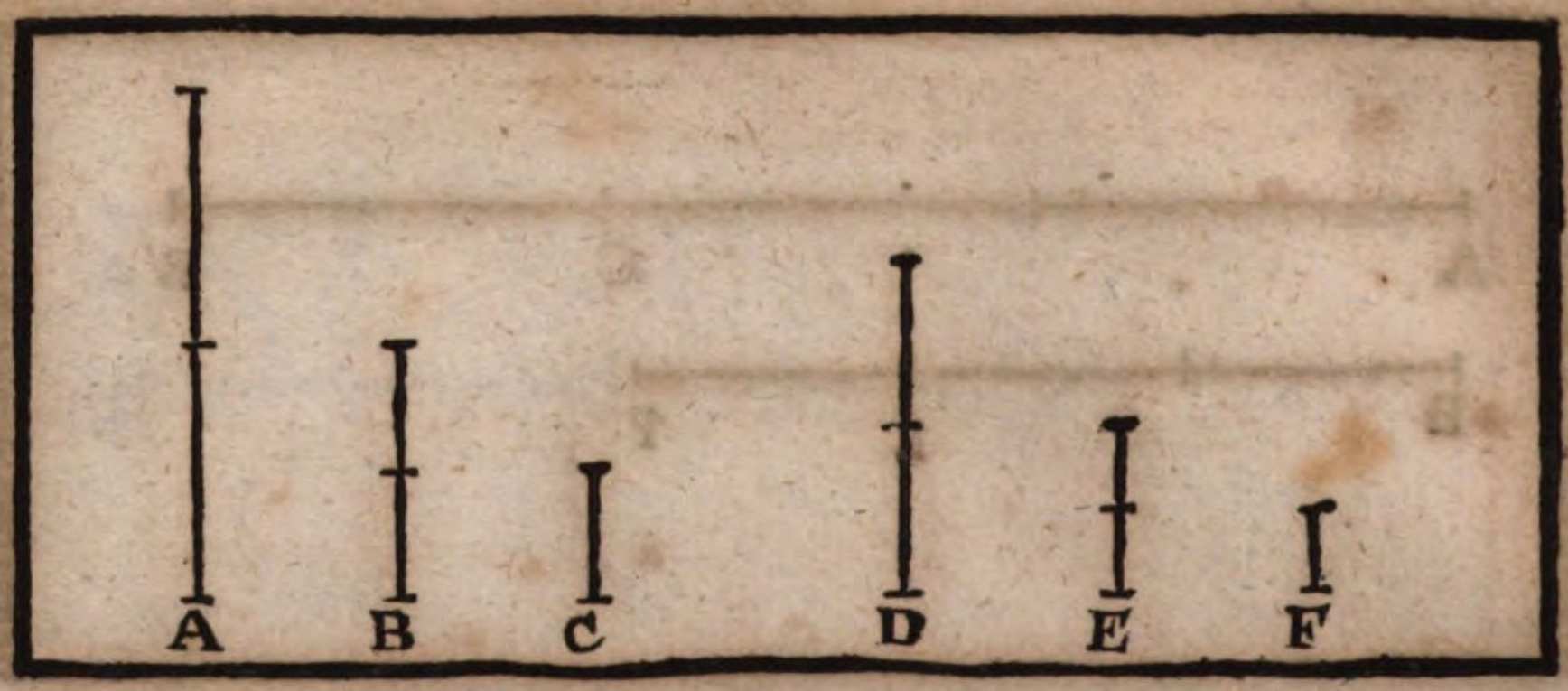
Es ist gegeben, daß sich das gantze AB zu dem andern gantzen DE verhalte, gleich wie das abgezogene Stück AC, sich zu dem andern abgezogenen Stück DF verhaltet. Diesem nach saget man, daß das übrige Stück CB sich auch zu dem andern übrigen Stück FE verhalten werde, gleich wie das gantze AB sich zu dem andern gantzen DE verhalte.

Beweiß.

Weilen es ist AB. DE :: AC. DF.
so wird auch die Verwechslung seyn AB. AC :: DE. DF. d. 16. §.
und durch die Zertheilung AC. CB :: DF. FE. (oder so ein Ding) CB AC :: FE DF d. 17. §. u. 4. an. §.
Abermahlen durch die Verwechslung ist CB. FE :: AC. DF.
Unterdessen aber ist gegeben AC. DF :: AB. DE. d. d. Vorg.
Dahero wird auch seyn CB. FE :: AB. DE.
Welches zu beweisen ware.

Anmerckung.

Hiermit wird die Verwendung als giltig angewiesen,
Wann nemlichen anfänglich ist AC. CB :: DE. FE.
so saget man, daß auch giltig seye, durch die Verwendung zu sagen AB AC :: DE DF.
Die Ursach, weilen gegeben ist AB. CB :: DE. FE.
so wird durch die Zertheilung seyn AC. CB :: DF. FE. d. 17. §.
und durch die Umbkehrung wird seyn CB. AC :: FE. DF. d. 4. an. §.
Letztlich durch die Zusammensetzung AB. AC :: DE. DF. d. 18. §.
das ist in verwendter Verhaltnuß. d. 16. def. §.
Welches zu beweisen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Grössen seynd, und zu diesen noch andere drey Grössen in ordentlicher Proportion darzu genommen werden, also, daß jederzeit zwey und zwey gegen einander gehaltene einerley Verhaltnuß haben: Wann nun die erste Grösse grösser, kleiner, oder gleich ist, der dritten; so wird auch die vierdte Grösse grösser, kleiner, oder gleich seyn der sechsten.

Es ist gegeben, daß die drey Grössen A B. C. gegen denen drey Grössen D. E. F. in ordentlicher Proportion stehen, nemlich daß es seye A. B. :: D. E, und B. C :: E. F. diesem nach saget man, daß

Wann A Γ ist, als C; auch D Γ seyn werde, als F, und so fort, ꝛc.

Beweiß.

Weilen A Γ ist, als C, so wird die Verhaltnuß A zu B Γ seyn, als die Verhaltnuß C zu B. — d. d. Vorg. d. 8. 5.

Die Verhaltnuß D zu E ist unterdessen ⌐ der Verhaltnuß A zu B. — d. d. Vorg.

Dahero wird auch die Verhaltnuß D zu E Γ seyn, als die Verhaltnuß C zu B.

Es ist aber B. C :: E. F. — d. d. Vorg.

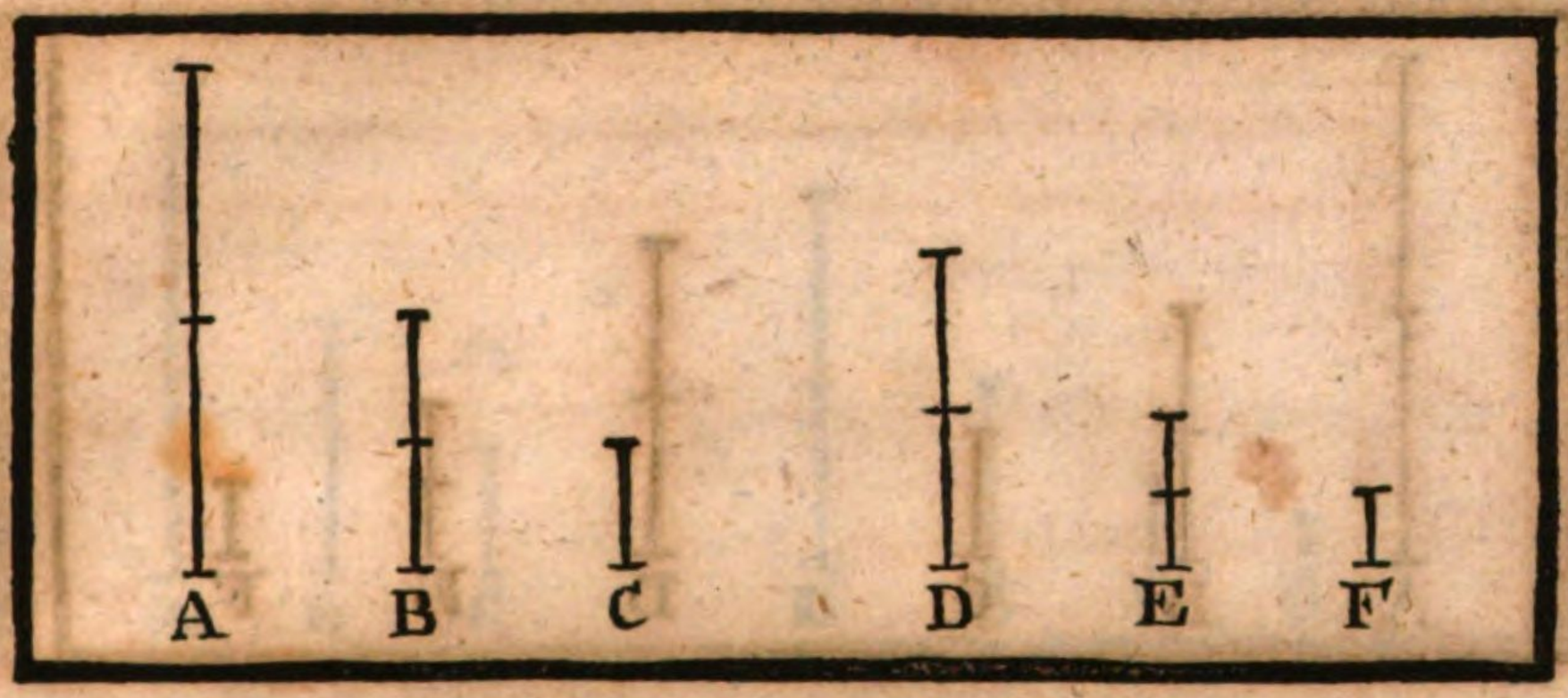
und durch die Umbkehrung C B :: F. E. — d. 4. an. 5.

Deßwegen wird auch die Verhaltnuß D zu E Γ seyn, als die Verhaltnuß F. zu E.

Darauß folget letzlich, daß dann D Γ seye, als F. — d. 10. 5.

Eben auff solche Weise solte bewiesen werden, wann A ⌉, oder ⌐ gegeben wird der C; daß auch D ⌉, oder ⌐ wäre, der F.

Welches zu beweisen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Grösse seynd, und noch andere drey Grössen nach solcher Beschaffenheit darzu genommen werden, also daß jederzeit zwey und zwey gegen einander gehaltener einerley Verhaltnuß haben, doch aber in einer verruckten Ordnung: Wann nun die erste Grösse, grösser, kleiner, oder gleich ist der dritten; so wird auch die vierte Grösse grösser, kleiner oder gleich seyn der sechsten.

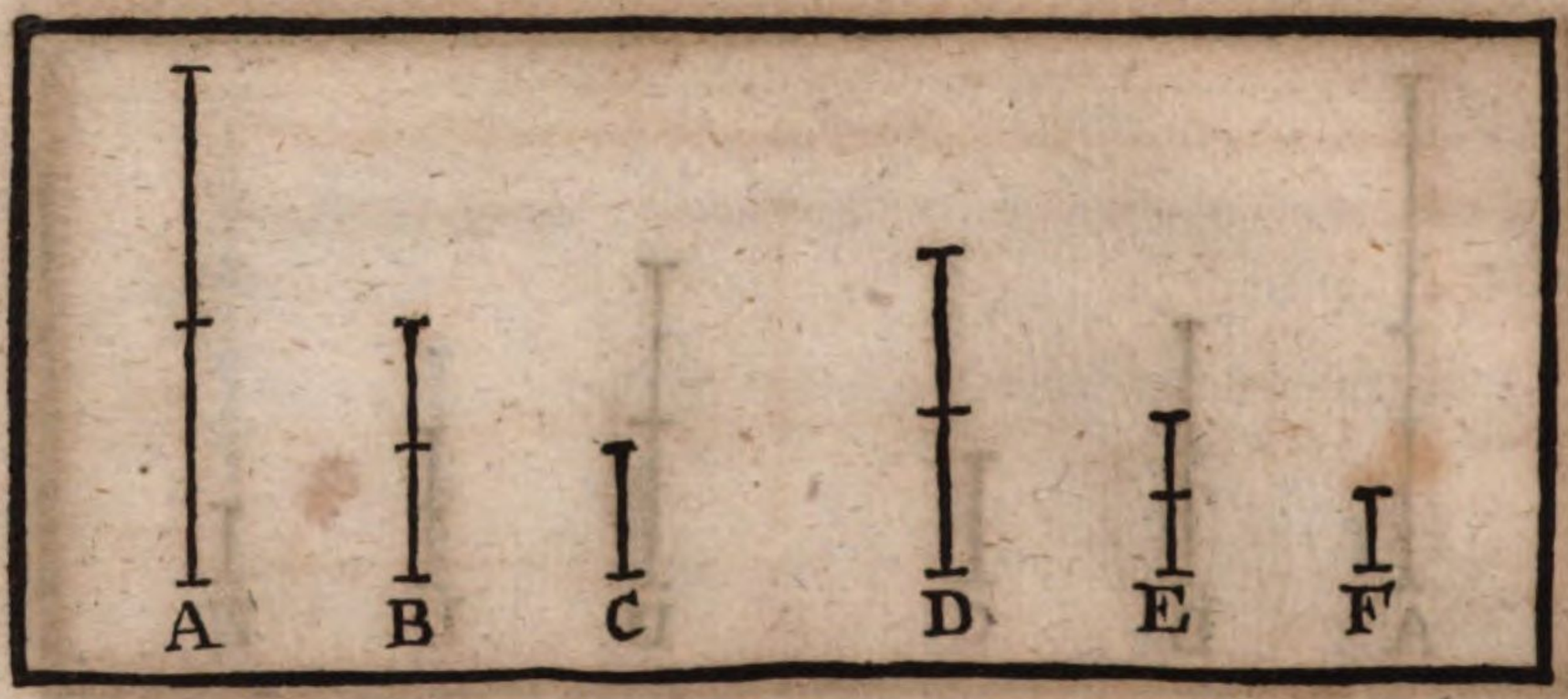
Es ist gegeben, daß die drey Grössen A. B. C, gegen denen drey Grössen D. E F. in verruckter Proportion stehen, nemlich A. B :: E. F, und B. C:: D. E. Diesem nach saget man, wann A ⌜ seye, als C, daß auch D ⌜ seye, als F. u. s. f.

Beweiß.

Weilen A ⌜ ist, als C, so wird die
Verhaltnuß A zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß C zu B. d. 8. s.
Die Verhaltnuß A zu B ist aber ⌐ der Verhaltnuß E zu F. d. d. Vorg.
Dahero wird die Verhaltnuß E zu F ⌜ seyn, als die Verhaltnuß C zu B.
Unterdessen ist gegeben B. C :: D. E.
und durch die Umbkehrung C. B :: E. D. d. 4. s.
Dahero wird die Verhaltnuß E zu F ⌜ seyn, als die Verhaltnuß E zu D.
Darauß folget, daß auch D ⌜ seye, als F. d. 10. s.

Welches zu beweisen ware.

Eben auff solche Art beweiset man, daß, wann A ⌝, oder ⌐ ist, der C; auch D ⌝, oder ⌐ seye der F.



Die XXII. Vorgab.

Betrachtung.

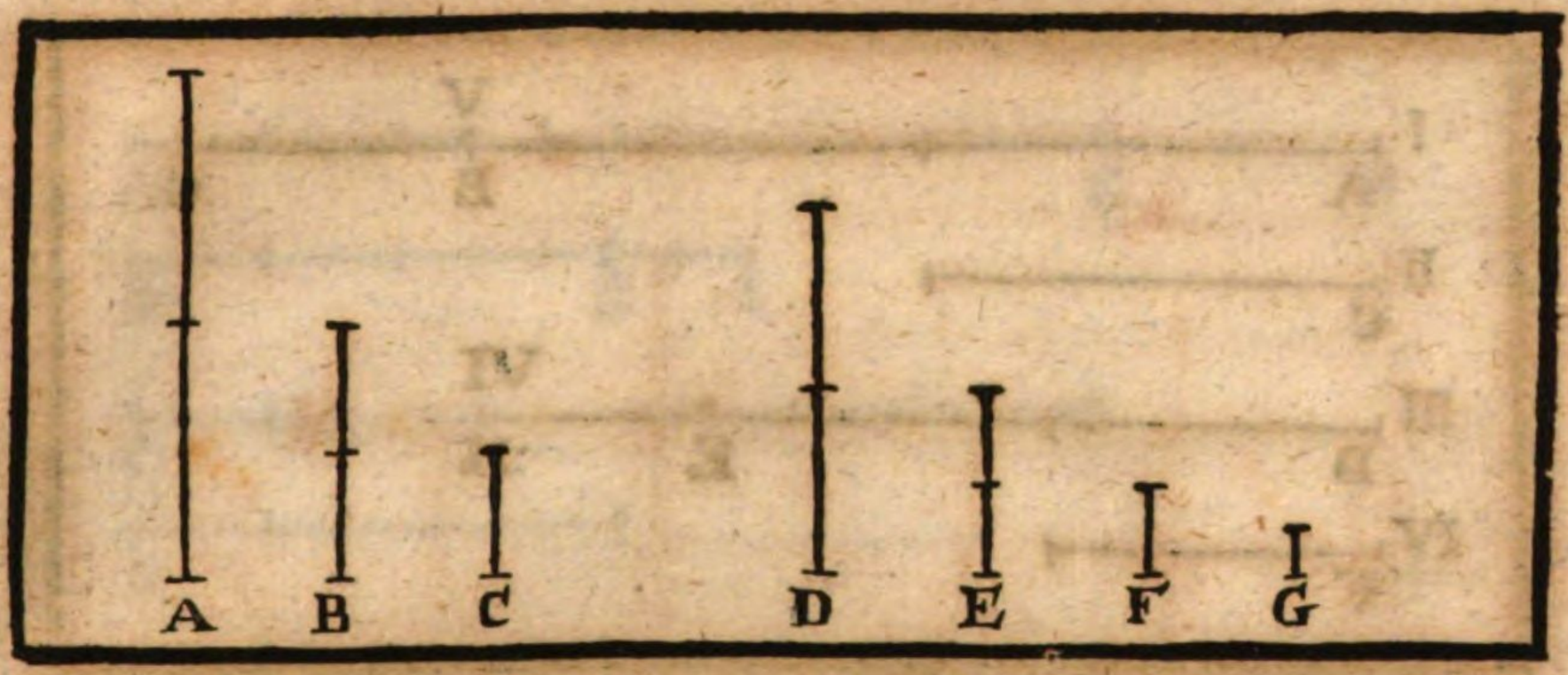
Wann so viel Grössen seynd (als man wil) und denen noch andere gleich an der Zahl in ordentlicher Proportion genommen werden: so werden solche Grössen auch in einer Verhaltnuß auß einer Gleichheit seyn.

Es ist gegeben, daß sich die drey Grössen A. B. C. zu denen drey Grössen D. E. F. in ordentlicher Proportion halten, das ist A. B :: D. E, und B. C:: E. F. Diesem nach sagt man, daß man auß der Gleichen giltig schliessen könne A. C :: D. F.

Beweiß.

Weilen gegeben ist A. B :: D. E:
so wird durch die Verwechslung seyn A. D :: B. E. d. 16. 5.
Abermahlen ist gegeben B. C:: E. F.
so wird auch durch die Verwechslung seyn B. E :: C. F. d. 16. 5.
Indeme nun ist, so wol A. D:: B. E.
als B. E:: C. F.
So schliesset man, daß auch seye A. D:: C. F; d. 11. 5.
und durch die Verwechslung A, C :: D. F, d. 16. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann so viel Gröſſen seynd, (als man wil) und denen noch andere gleich an der Anzahl in einer verruckten Proportion genommen werden: so werden solche Gröſſen auch in der Verhaltnuß auß einer Gleichheit seyn.

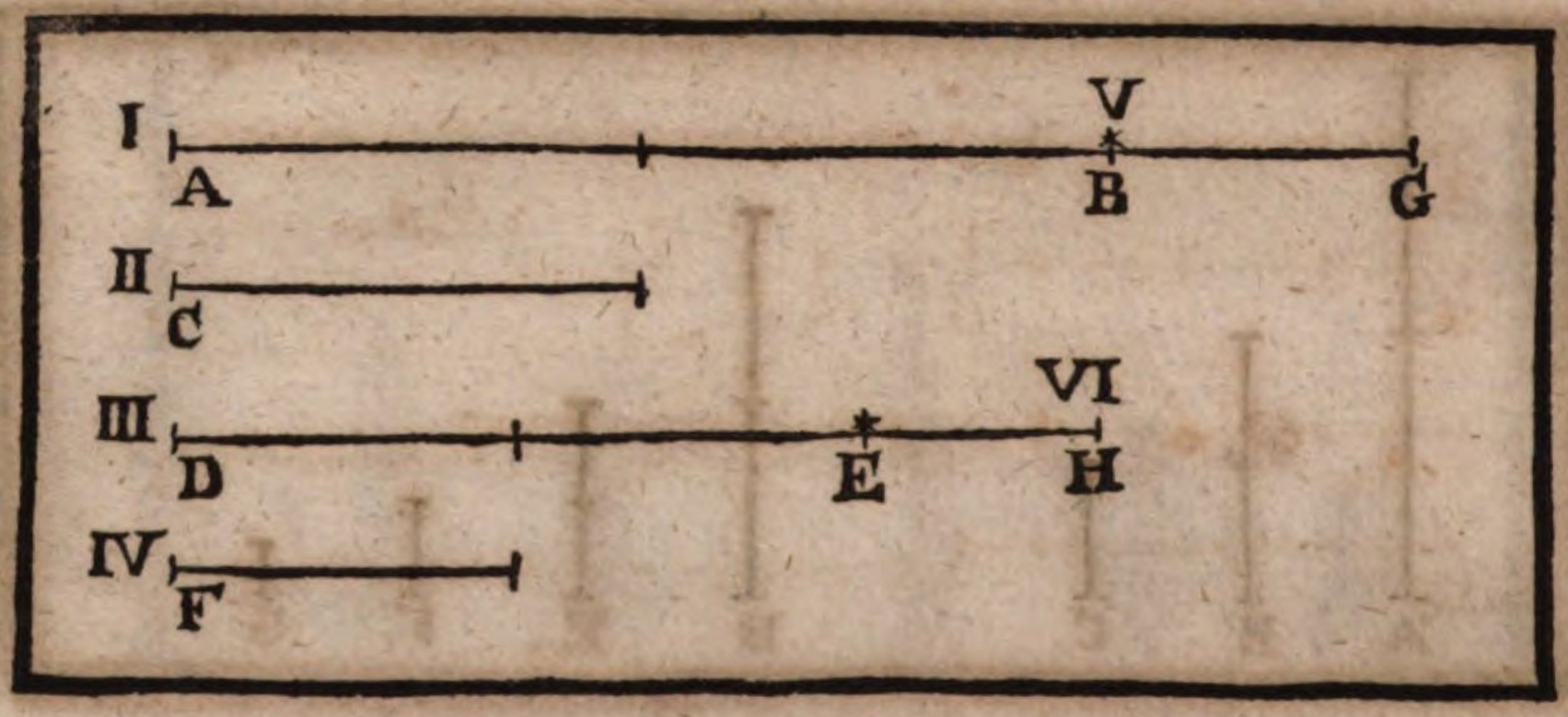
Es ist gegeben, daß sich die Gröſſe A. B. C zu denen drey Gröſſen D. E. F. in verruckter Proportion halten; nemlich daß es seye A. B :: E. F, und B C :: D. E. Diesem nach saget man, daß man auß der Gleichen giltig schlieſſen möge A. C :: D. F.

Zubereitung.

Mache vorhero B. C :: F zu einer andern, als wie nemlich zu G.

Beweiß.

Es ist gegeben B. C :: D. E.	d. d. Vorg.
und gemacht worden B. C :: F. G.	d. d. Zub.
Folget, daß auch seye D. E :: F. G.	d. 11. f.
und durch die Verwechslung D. F :: E. G.	d. 16. f.
Unterdessen ist auch gegeben A. B :: E. F, oder, so ein Ding ist, E. F :: A. B.	d. d. Vorg.
Und gemacht worden B C :: F. G, oder, so ein Ding ist, F. G :: B. C.	d. d. Zub.
Dahero wird auß dergleichen seyn E. G :: A. C.	d. 22. f.
Es ist aber schon bewiesen worden D. F :: E. G.	
Deßwegen schlieſſet man, daß letzlich seye A. C :: D. F.	d. 11. f.
Welches zu beweisen ware.	



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

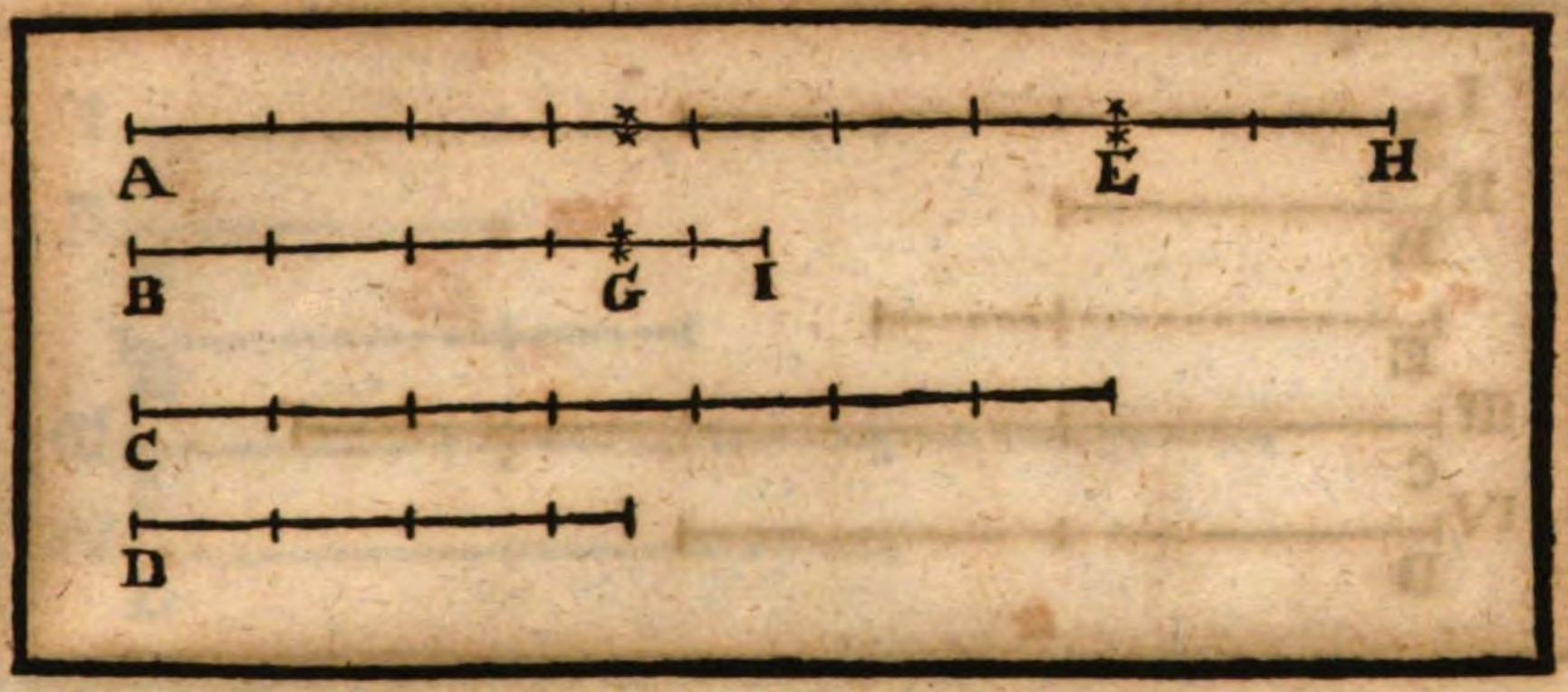
Wann die erste Grösse sich also gegen der anderten verhaltet, gleich wie die dritte gegen der vierten, und haltet sich auch die fünffte also zu der anderten, gleich wie die sechste zu der vierten: so wird auch die erste, und fünffte zusammen also zu der anderten sich verhalten, gleich wie die dritte und sechste zusammen zu der vierten.

Es ist gegeben, daß die erste AB sich verhalte zu der anderten C, gleich wie die dritte DE zu der vierten F. und die fünffte BG verhalte sich auch zu der anderten C, gleichwie die sechste EH zu der vierten F. Diesem nach saget man, daß es seyn werde AB + BG. C. :: DE + EH. F.

Beweiß.

Weilen es ist BG. C:: EH. F. d. d. Vorg.
so wird seyn durch die Umbkehrung C. BG:: F. EH. d. d. an 4. 5.
Es ist aber AB. C:: DE. F. d. d. Vorg.
Und, wie es bewiesen worden, C. BG :: F. EH.
Folget, daß auß dergleichen seye AB. BG:: DE. EH. d: 22. 5.
Und durch die Zusammensetzung AB + BG BG :: DE + EH. EH. d. 18. 5.
Es ist auch gegeben BG. C:: EH. F. d. d. Vorg.
Deßwegen letztlich auß dergleichen seyn werde AB + BG. C:: DE + EH. F.

Welches zu beweisen ware.



Die XXV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Grössen geproportionirt seynd, so wird allezeit die grössere, und die kleineste zusammen genommen grösser seyn, als die zwo übrige zusammen genommene.

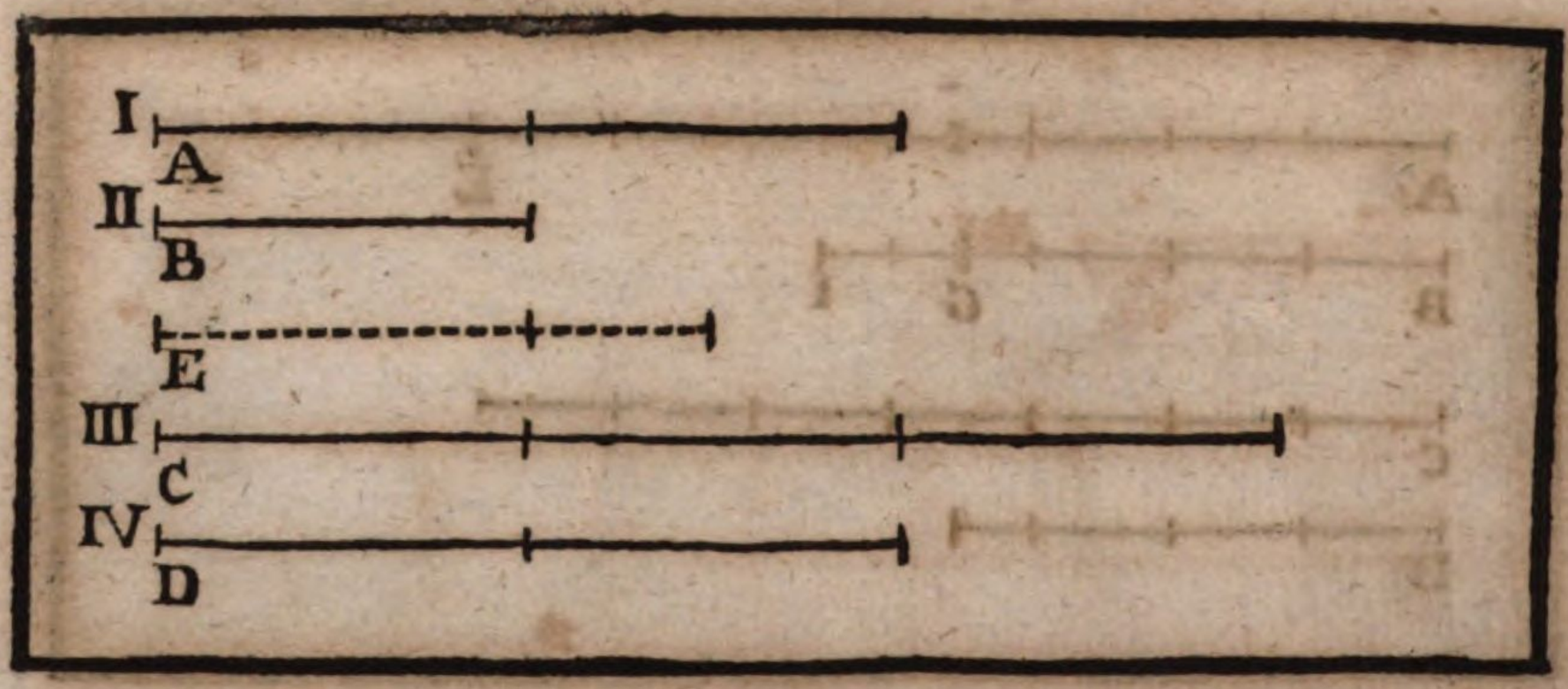
Es ist gegeben, daß seye AH. BI :: C. D, und daß AH die gröste, und also D die kleinste Grösse seye. Diesem nach saget man, daß die zwey Grössen AH + D ⌜ seynd, als die zwo übrige BI + C.

Zubereitung.

Von AH ziehe ab das Stück AE ⌐, der C. und von BI daß Stück BG ⌐, der D.

Beweiß.

Nunmehro verhaltet sich AH. BI :: AE. BG
(dann AE ⌐, der C, und BG ⌐, der D gemacht ist)
Dahero auch seyn werde EH. GI :: AH. BI. d. 19. 5.
Unterdessen ist AH ⌜ gegeben, als BI.
Folget, daß auch EH. ⌜ seye als GI.
Wann man entzwischen zu denen zwey gleichen Grössen AE, und C, zwey gleiche Grössen D, und BG hinzu setzet.
So wird AE + D ⌐ seyn, der C + BG.
Wann man aber zu diesen zwey gleichen Grössen AE + D und C + BG noch die zwey ungleiche Grössen, nemlich EH, und GI, beyderseits hinzu setzet.
So folget letztlich, daß AE + D + EH, das ist AH + D ⌜ seye, als C + BG + GI, das ist BI + C.
Welches zu beweisen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erste Grösse zu der anderten eine grössere Verhaltnuß hat, als die dritte zu der vierten: so wird durch die Umbkehrung die anderte zu der ersten eine kleinere Verhaltnuß haben, als die vierte zu der dritten.

Es ist gegeben, daß die erste A zu der anderten B eine grössere Verhaltnnß habe, als die dritte C, zu der vierten D. Diesem nach saget man, daß nach der Umbkehrung das Gegenspiel geschicht, und B zu A eine kleinere Verhaltnuß, als D zu C habe.

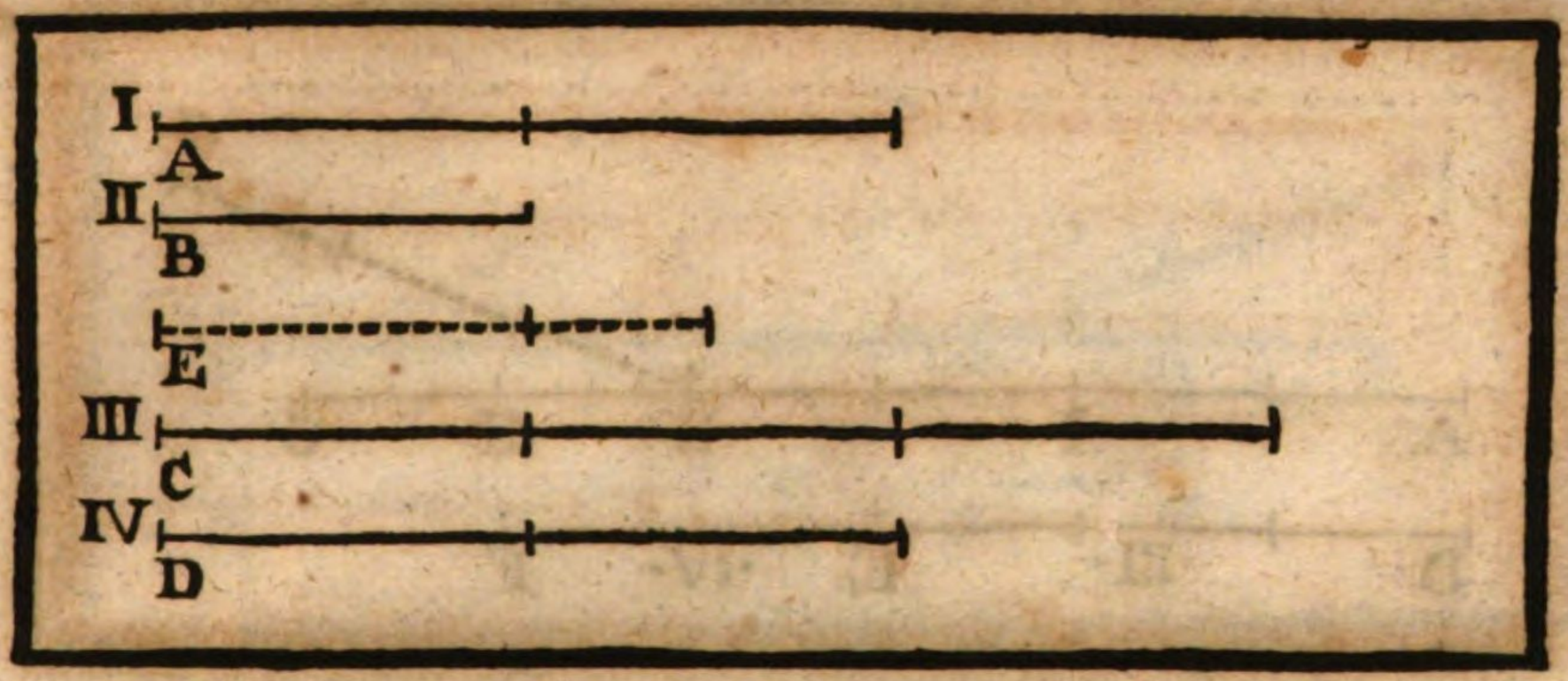
Zubereitung.

Seye gemacht C.D :: E. B.

Beweiß.

Die Verhaltnuß A zu B ist ⌜, als die Verhaltnuß C zu D. d.d.Vorg.
Dahero wird auch die Verhaltnuß A zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß E zu B.
Und deßwegen ist die A ⌜, als die E. d. 10. 5.
Darauff folget aber, daß die Verhaltnuß B zu A ⌝ seye, als die Verhaltnus B zu E. d. 8. 5.
Es ist aber gemacht E B :: C. D. d.d.Zub.
Und durch die Umbkehrung ist B. E :: D. C. d.d.an.4.5.
Dahero ist auch die Verhaltnuß B zu A ⌝, als die Verhaltnuß D zu C.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erste zu der anderten eine grössere Verhaltnuß hat, als die dritte zu der vierdten: so wird auch durch die Verwechslung die erste zu der dritten eine grössere Verhaltnuß haben, als die andere zu der vierdten.

Es ist gegeben, daß die Verhaltnuß der ersten A zu der anderten B Γ seye, als die Verhaltnuß der dritten C zu der vierdten D. Diesem nach saget man, daß nach der Verwechslung A zu C auch eine grössere Verhaltnuß haben werde, als B zu D.

Zubereitung.

Mache vorhero C. D :: E. B.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß A zu B Γ ist, als die Verhaltnuß C zu D. d. d. Vorg.

So ist auch die Verhaltnuß A zu B Γ, als die Verhaltnuß E zu B und deßwegen ist die A Γ, als die E. d. 10. 5.

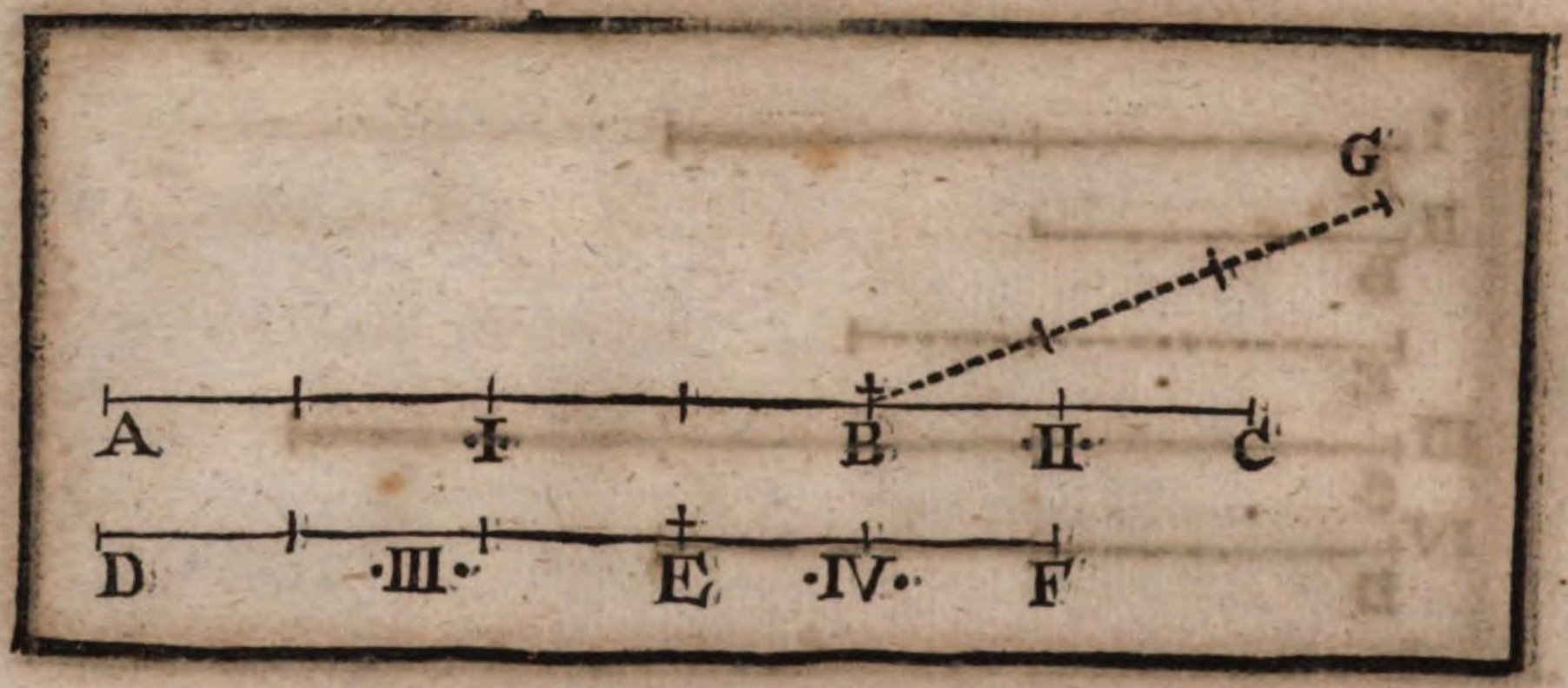
Darauff folget auch, daß die Verhaltnuß A zu C Γ seye, als die Verhaltnuß E zu C. d. 8. 5.

Es ist aber gemacht E. B :: C. D. d d. Zub.

Und durch die Verwechslung ist E. C :: B. D. d. 16. 5.

Dahero ist auch die Verhaltnuß A zu C Γ, als die Verhältnuß B zu D.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erste zu der anderten eine grössere Verhaltnuß hat, als die dritte zu der vierten, so wird auch durch die Zusammensetzung die erste mit der anderten, zu der anderten eine Grössere Verhaltnuß haben, als die dritte mit der vierten, zu der vierten.

Es ist gegeben, daß die Verhaltnuß der ersten Grösse AB, zu der anderten BC ⌜ seye, als die Verhaltnuß der dritten Grösse DE zu der vierten EF. Diesem nach saget man, daß nach der Zusammensetzung auch AB + BC, zu BC eine grössere Verhaltnuß habe, als DE + EF zu EF.

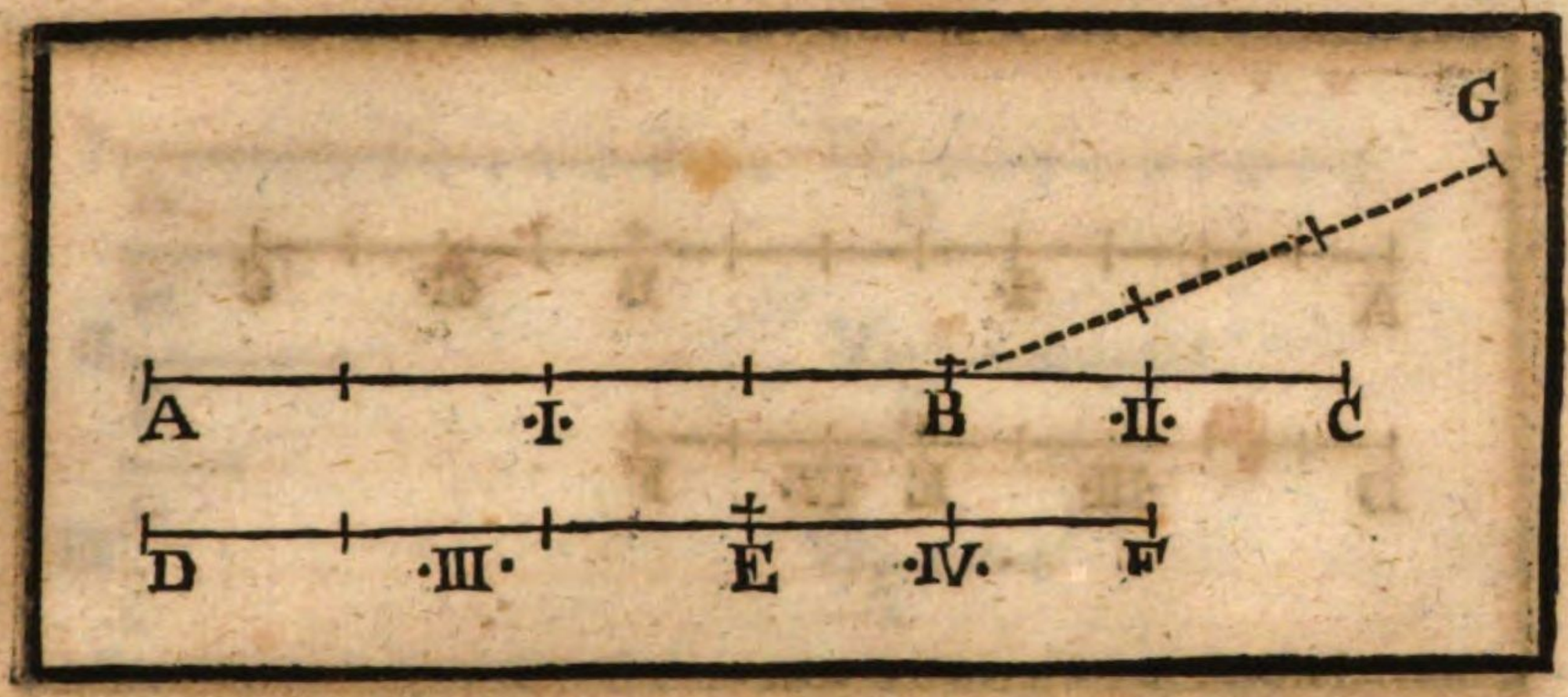
Zubereitung.

Seye vorhero gemacht GB. BC :: DE. EF.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß AB zu BC ⌜ ist, als die Verhaltnuß DE zu EF. d. d. Vorg.
so wird auch AB zu BC eine grössere Verhaltnuß haben, als GB zu BC.
Dahero ist die AB ⌜, als die GB. d. 10. 5.
Wann nun zu diesen ungleichen Grössen beyderseits die gemeine BC hinzu gesetzt wird,
So wird noch AB + BC ⌜ seyn, als GB + BC.
Unterdessen ist gemacht GB. BC :: DE. EF. d. d. Zub.
Und durch die Zusammensetzung ist GB + BC. BC :: DE + EF. EF. d. 18. 5.
Dahero auch die Verhaltnuß AB + BC zu BC ⌜ ist, als die Verhaltnuß GB + BC zu BC. d. 8. 5.
Es ist aber die Verhaltnuß GB + BC zu BC ⌐, der Verhaltnuß DE + EF zu EF.
Deßwegen wird noch die Verhaltnuß $\frac{AB + BC}{BC}$ ⌜ seyn, als $\frac{DE + EF.}{EF.}$

Welches zu beweisen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann durch die Zusammensetzung, die erste mit der anderten Grösse, zu der anderten eine grössere Verhaltnuß hat, als durch die Zusammensetzung, die dritte mit der vierten zu der vierten: so wird auch durch die Zertheilung, die erste zu der anderten eine grössere Verhaltnuß haben, als die dritte zu der vierten.

Es ist gegeben, daß AB + BC, zu BC eine grössere Verhaltnus habe, als DE + EF zu FF. Diesem nach saget man, daß nach der Zertheilung auch AB zu BC eine grössere Verhaltnuß habe, als DE zu EF.

Zubereitung.

Mache, daß es seye GB + BC. BC :: DE + EF. EF.

Beweiß.

Weilen AB + BC zu BC eine grössere Verhaltnuß hat, als DE + EF zu EF. d. d. Vorg.

So wird auch AB + BC zu BC eine grössere Verhaltnuß haben, als GB + BC. zu BC.

Daher ist die AB + BC Γ, als die GB + BC. d. 10. 5.

Wann nun beyderseits so wohl von AB + BC als GB + BC die gemeine BC darvon gezogen wird.

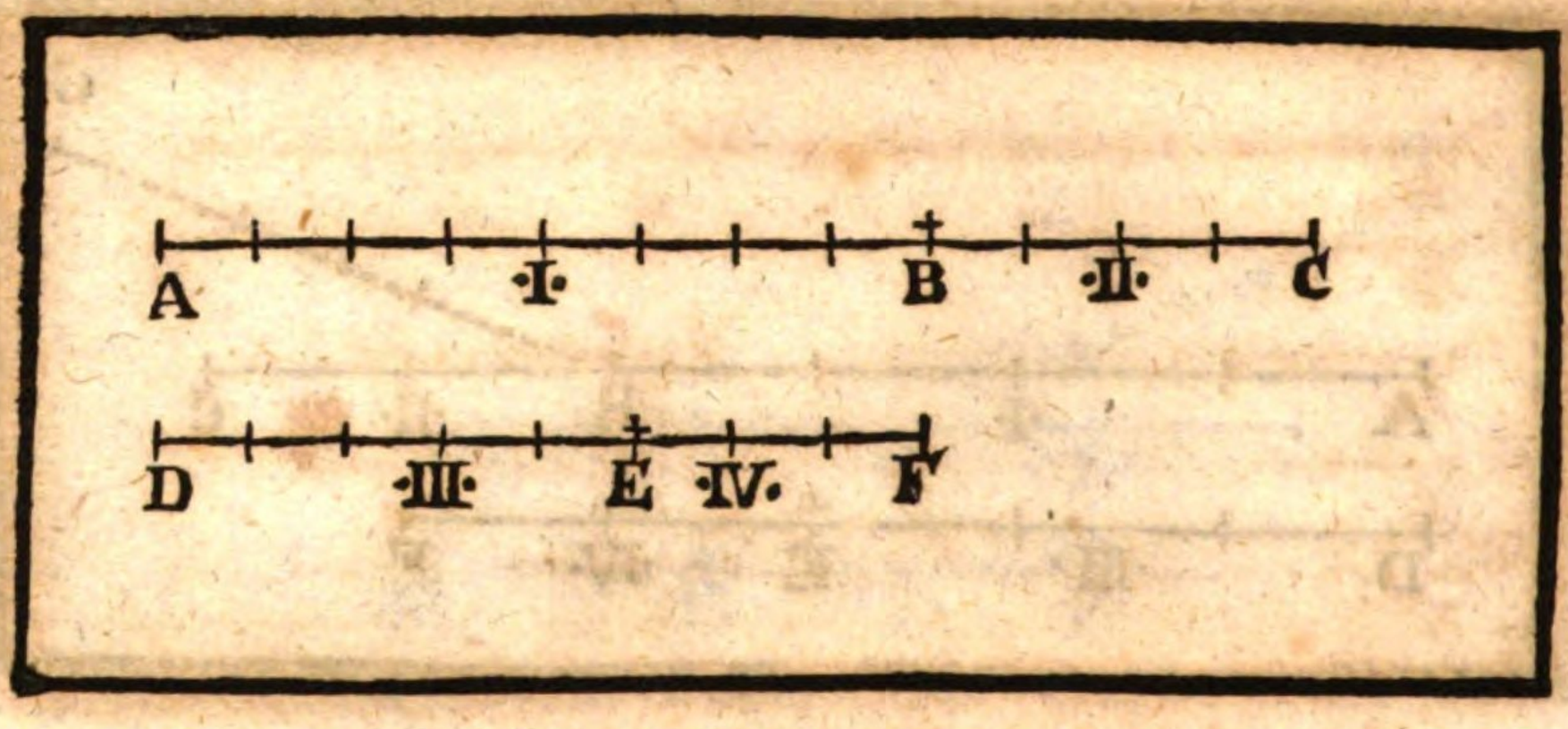
so wird auch überbleiben AB Γ, als GB. d. 5. ax.

Unterdessen ist gemacht GB + BC. BC :: DE + EF. FF. d. d. Zub.

Und durch die Zertheilung ist GB BC :: DE. EF. d. 17. 5.

Folget, daß auch AB zu BC eine grössere Verhaltnuß habe, als GB zu BC, oder dergleichen DE zu EF.

Welches zu beweisen ware.



Die XXX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann durch die Zusammensetzung, die erste mit der anderten Grösse, zu der anderten eine grössere Verhaltnuß hat, als durch die Zusammensetzung, die dritte mit der vierten zu der vierten, so wird entgegen durch die Verwendung die erste und anderte zusammen, zu der ersten eine kleinere Verhaltnuß haben, als die dritte und vierte zusammen zu der dritten.

Es ist gegeben, daß die zusammen gesetzte AB + BC zu BC eine grössere Verhaltnuß habe, als DE + EF zu EF: Diesem nach saget man, daß nach der Verwendung das Gegenspiel geschicht, nnd AB + BC. zu AB eine kleinere Verhaltnuß habe, als DE + EF zu DE.

Beweiß.

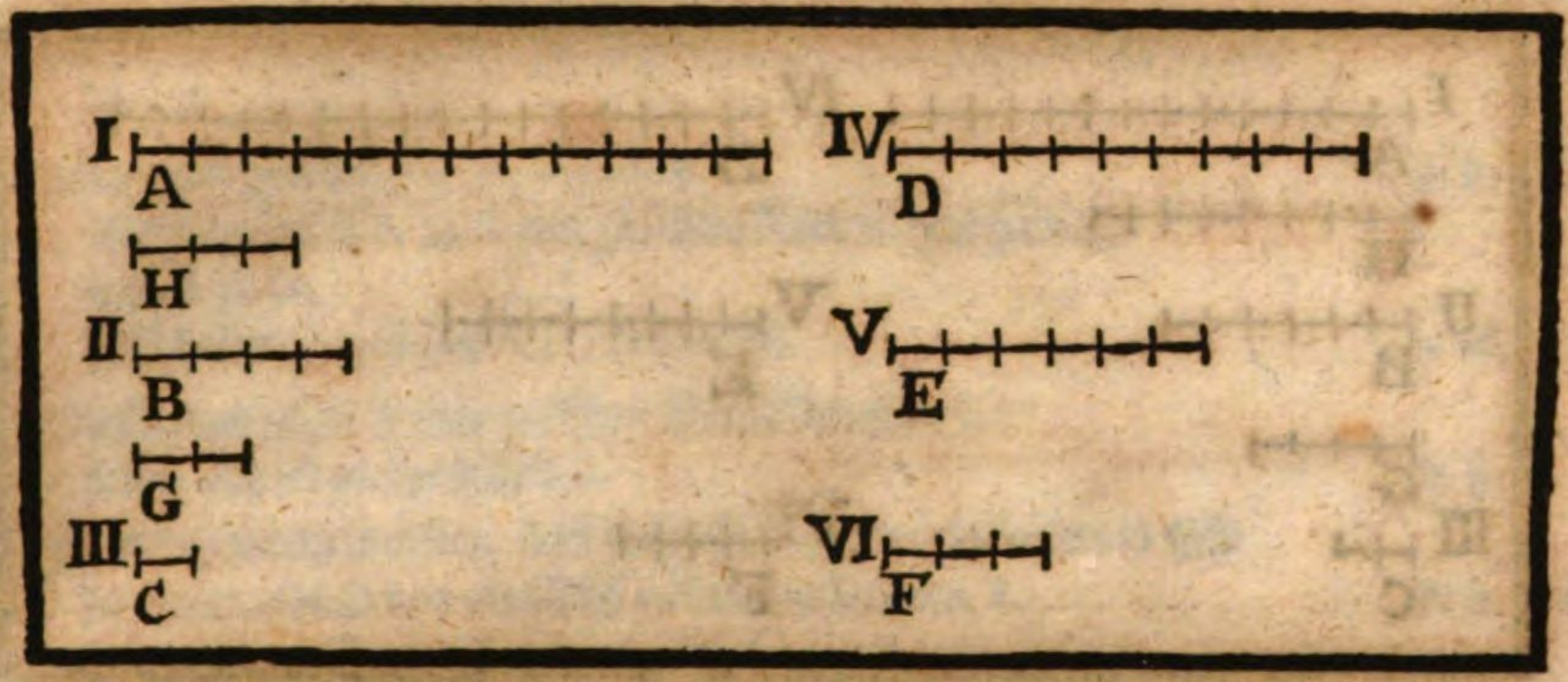
Dieweilen AB + BC zu BC eine grössere Verhaltnuß hat, als DE + EF zu EF. d. d. Vorg.

So ist durch die Zertheilung dannoch die Verhaltnuß AB zu BC grösser, als die Verhaltnuß DE zu EF. d. 29. 5.

Entgegen durch die Umbkehrung hat BC zu AB eine kleinere Verhaltnuß, als EF zu DE. d. 26. 5.

Und eben durch die Zusammensetzung hat AB + BC zu AB eine kleinere Verhaltnuß, als DE + EF zu DE. d. 28. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXI. Vorgab. Betrachtung.

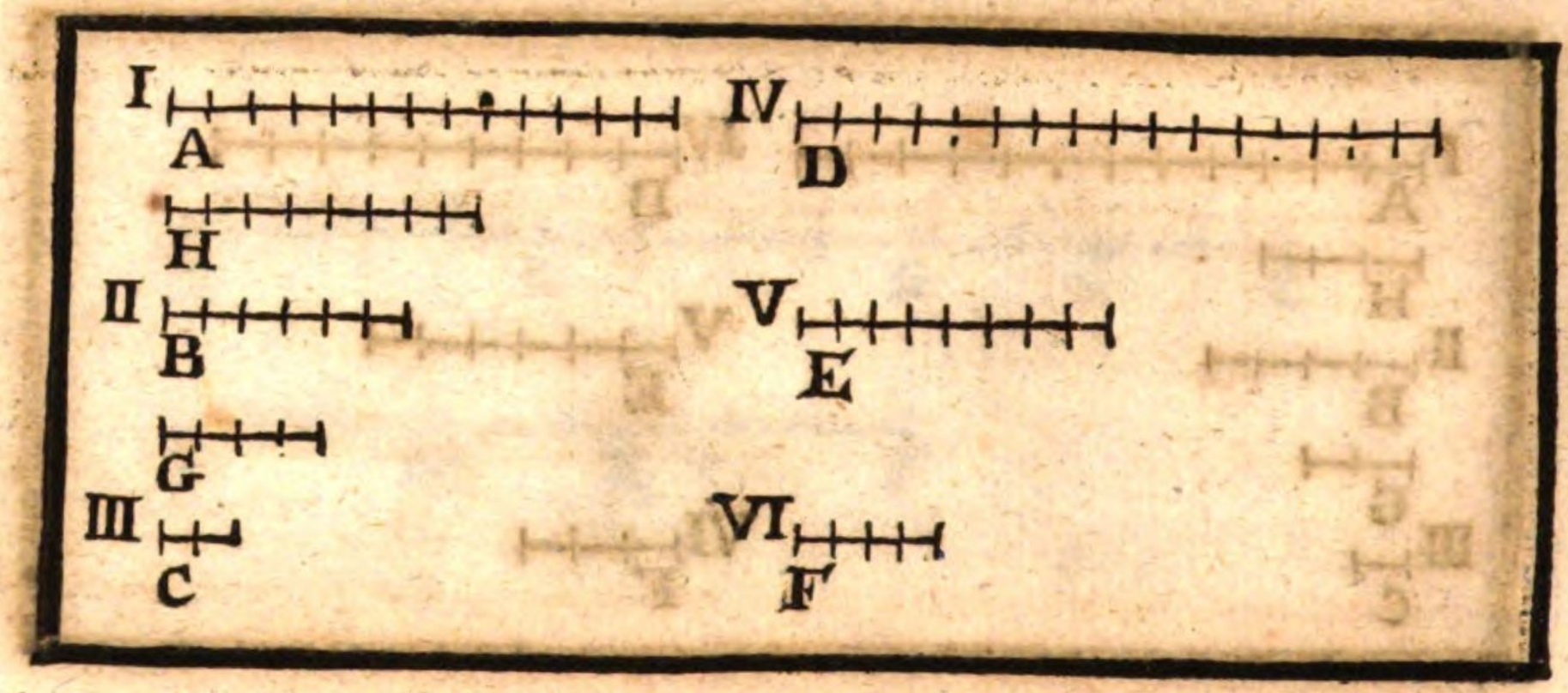
Wann drey Grössen seynd, und diesen noch andere drey nach solcher Beschaffenheit darzu genommen werden, also, daß die Verhaltnuß der ersten zu der anderten grösser seye, als die Verhaltnuß der vierten zu der fünfften; und abermahlen die Verhaltnuß der anderten zu der dritten auch grösser seye, als die Verhaltnuß der fünfften zu der sechsten: So wird auch auß dergleichen die erste zu der dritten eine grössere Verhaltnuß haben, als die vierte zu der sechsten.

Es ist gegeben, daß die erste Grösse A zu der anderten B eine grössere Verhaltnuß habe, als die vierte D zu der fünfften E, und abermahlen die anderte B zu der dritten C eine grössere Verhaltnuß habe, als die fünffte E zu der sechsten F. Diesem nach saget man, daß nach der Verhaltnuß auß einer Gleichheit auch A zu C eine grössere Verhaltnuß habe, als D zu F.

Zubereitung. Mache, daß seye G. C :: E. F. und H. G :: D. E.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß B zu C Γ ist, als die Verhaltnuß E zu F, d. d. Vorg.
So ist auch die Verhaltnuß B zu C Γ, als die Verhaltnuß G zu C. d. 10. f.
Dahero folget, daß die B Γ seye, als die G.
Und deßwegen ist die Verhaltnuß A zu G. auch Γ,
als die Verhaltnuß A zu B. d. 8. f.
Es ist aber gegeben, daß die Verhaltnuß A zu B Γ seye,
als die Verhaltnuß D zu E. d. d. Vorg.
Folget dahero, daß A noch viel eine grössere Verhaltnuß habe zu G, als D zu E.
Ferners, weilen gemacht ist, H. G :: D. E.
so wird auch A eine grössere Verhaltnuß haben zu G, als H zu G.
und deßwegen ist die A Γ, als die H. d. 10. f.
Darauff folget, daß die Verhaltnuß A zu C auch Γ seye,
als die Verhaltnuß H zu C. d. 8. f.
Es ist aber gemacht H. G :: D. E d. d. Zub.
und G. C :: E. F.
und auß dergleichen ist H. C :: D. F. d. 22. f.
Dahero schliesset man, daß auch A zu C noch eine grössere Verh. habe, als D zu F.
Welches zu beweisen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Grössen seynd, und diesen darzu noch andere drey nach solcher Beschaffenheit genommen werden, daß nemlich die erste zu der anderten eine grössere Verhaltnuß habe, als die fünffte zu der sechsten; und abermahlen die anderte zu der dritten eine grössere Verhaltnuß habe, als die vierdte zu der fünfften: so wird auch auß dergleichen die erste zu der dritten eine grössere Verhaltnuß haben, als die vierte zu der sechsten.

Es ist gegeben, daß die erste Grösse A zu der anderten B eine grössere Verhaltnuß habe, als die fünffte E zu der sechsten F. und abermahlen die anderte habe eine grössere Verhaltnuß zu der dritten C, als die vierte D zu der fünfften E hat. Diesem nach saget man, daß auß der Verhaltnuß einer Gleichheit auch A eine grössere Verhaltnuß zu C habe, als D zu F.

Zubereitung.

Mache vorgehends, daß seye G. C :: D. E.
und H. G :: E. F.

Beweiß.

Es ist gegeben, daß die Verhaltnuß B zu C Γ seye,
als die Verhaltnuß D zu E. d. d. Vorg.
Dahero auch B zu C eine grössere Verhaltnuß hat, als G zu C.
Und deßwegen ist die B Γ, als die G.
Und folgends hat A eine grössere Verhaltnuß zu G d. 10. 5.
als dieselbe A zu B. d. 8. 5.
Es ist aber gegeben, daß A eine grössere Verhaltnuß habe
zu der B, als die E zu der F. d. d. Vorg.

Folget dann. daß A noch viel eine grössere Verhaltnuß habe zu G, als E zu F.

Indeme auch gemacht ist H. G :: E. F. d. d. Zub.

So wird auch A zu G eine grössere Verhaltnuß haben, als H zu G.

Und deßwegen ist die A ⌜, als die H. d. 10. 5.

Darauff folget, daß A eine grössere Verhaltnuß zu C habe, als H zu derselben C. d. 8. 5.

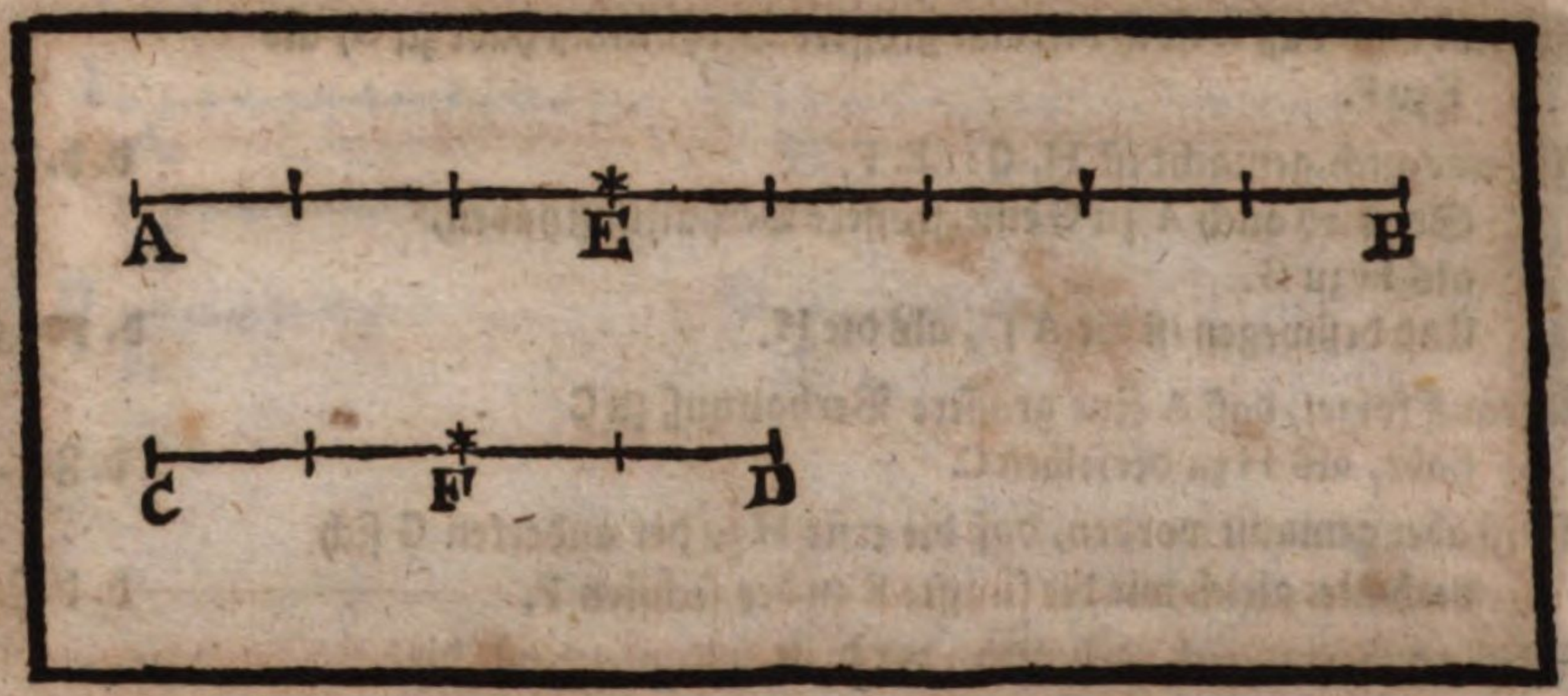
Es ist aber gemacht worden, daß die erste H zu der anderten G sich verhalte, gleich wie die fünffte E zu der sechsten F. d. d. Zub.

Und die anderte G sich verhalte zu der dritten C, gleich wie die vierdte D zu der fünfften E.

und auß dergleichen alsdann seye H. C :: D. F. d. 23. 5.

Dahero schliesset man, daß auch die Verhaltnus A zu C grösser seye, als die Verhaltnus D zu F.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine gantze Grösse zu einer andern gantzen Grösse eine grössere Verhaltnuß hat, als das eine davon abgezogene Stück zu dem andern davon abgezogenenen Stück: so wird hernach das eine übrige Stück, zu dem andern übrigen Stück eine grössere Verhaltnuß haben, als das eine Gantze zu dem andern Gantzen.

Es ist gegeben, daß die gantze A B eine grössere Verhaltnuß zu der andern gantzen CD habe, als das abgezogene Stück A E zu dem andern abgezogenen Stück CF. Diesem nach saget man nun, daß das übrige Stück EB eine grössere Verhaltnuß habe zu dem übrigen Stück FD, als die gantze AB zu der gantzen CD.

Beweiß.

Es ist gegeben, daß AB zu CD eine grössere Verhaltnuß habe, als AE zu CF. d. d. Vorg.

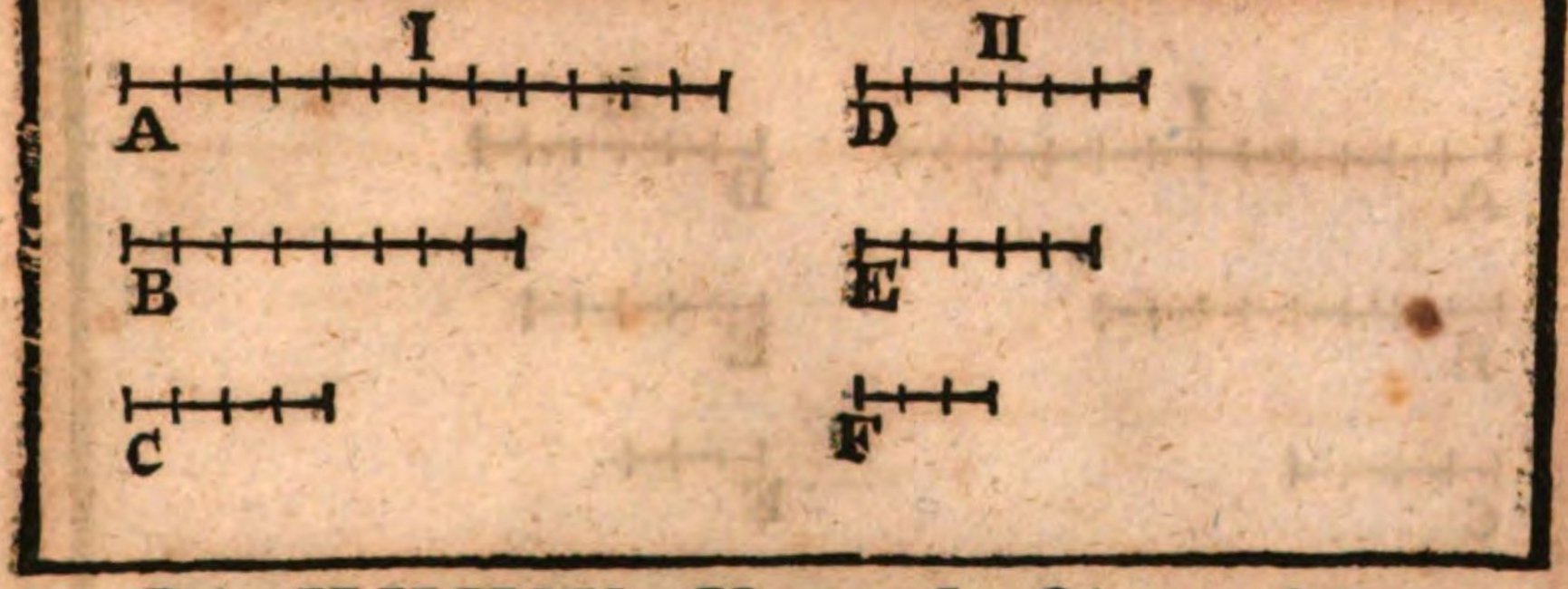
So wird durch die Verwexlung auch AB zu AE eine grössere Verhaltnuß haben, als CD zu CF. d. 27. 5.

Entgegen durch die Verwendung hat AB zu EB eine kleinere Verhaltnuß, als CD zu FD. d. 30. 5.

Dahero durch die Verwexlung hat auch AB zu CD eine kleinere Verhaltnuß, als EB zu FD. d. 27. 5.

Das ist ein Ding, als wann man sagete, daß die Verhaltnuß EB zu FD (nemlich eines übrigen Stücks zu dem andern übrigen Stück) ⌜ seye als AB zu CD (nemlich) eines gantzen zu dem andern gantzen⌝.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXIV. Vorgab. Betrachtung.

Wann so viel Grosse auff einer Seiten, als auff der andern Seiten, seynd, und die erste auff einer Seiten habe eine grössere Verhaltnuß zu der ersten auff der andern Seiten, als die anderte auff der einen Seiten, zu der anderten auff der anderten Seiten, und auch die anderte auff der einen Seiten habe eine grössere Verhaltnuß zu der anderten auff der anderten Seiten, als die dritte auff der einen Seiten, zu der dritten auff der anderten Seiten, und so fort. So geschicht, daß die Grösse sammentlich auff einer Seiten eine grössere Verhaltnuß haben zu denen Grössen sammentlich auff der andern Seiten, als die übrige Grösse sammentlich (wann beyderseits die erste darvon seynd abgezogen worden) zu denen übrigen Grössen sammentlich auff der andern Seiten. Eine kleinere Verhaltnuß aber, als die erste zu der ersten; und leztlich eine grössere Verhaltnuß, als die letzte zu der letzten.

Es seynd gegeben auff einer Seiten die drey Grössen A. B. C, und auff der andern Seiten die drey Grössen D. E. F. und A habe zu D eine grössere Verhaltnuß, als B zu B, und auch B zu E habe eine grössere Verhaltnuß, als C zu F. Diesem nach saget man,

Daß die Verhaltnuß auß denen A + B + C ⌜ seye zu denen D + E + F, als die Verhaltnuß deren übrigen B + C zu denen übrigen E + F.

Die Verhaltnuß deren A + B + C seye aber ⌝ zu denen D + E + F, als A zu D hat. Letztlich,

Daß auch die Verhaltnuß deren A + B + C ⌜ seye zu denen D + E + F, als C zu F.

Beweiß.

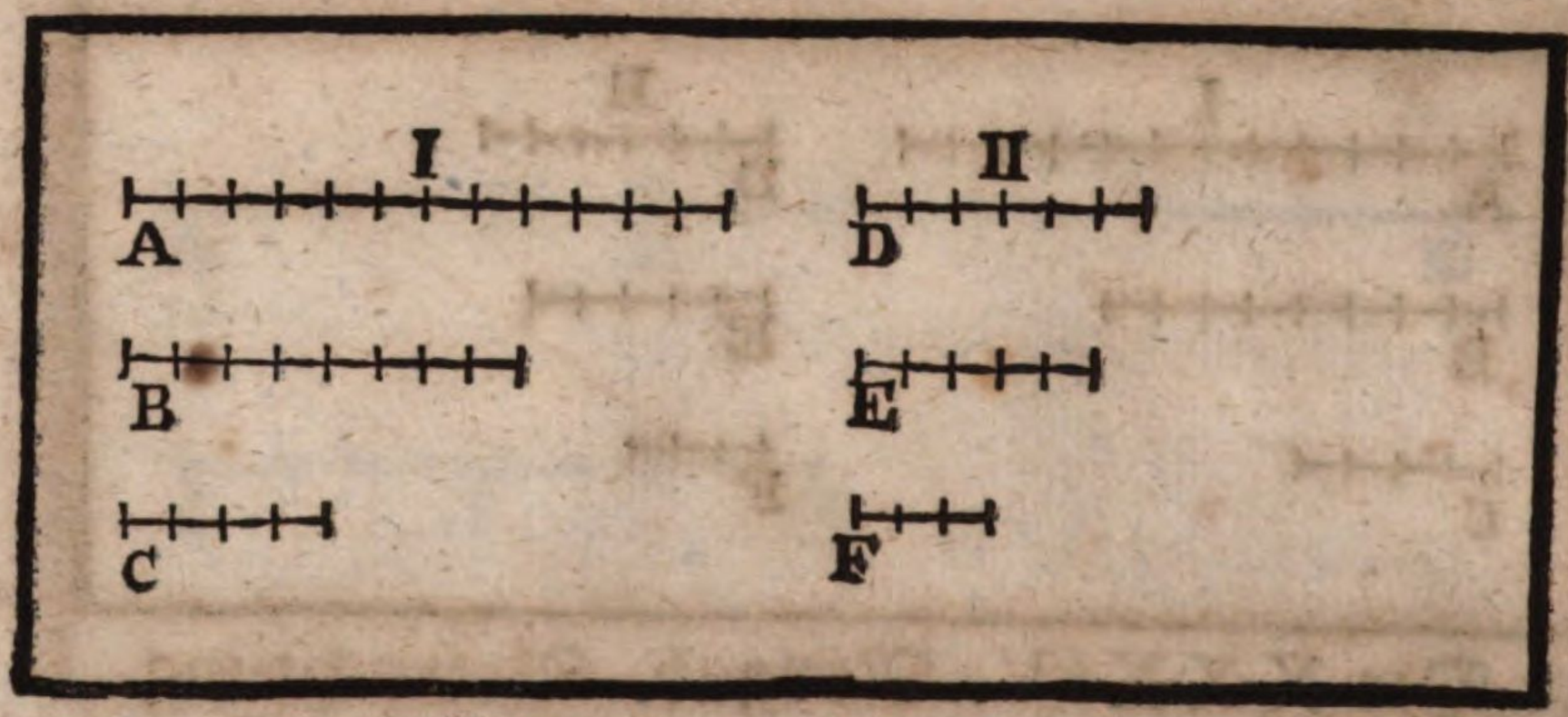
Weilen die Verhaltnuß A zu D ⌜ ist, als die Verhaltnuß B zu E. d. d. Vorg.

So wird durch die Verwechslung auch die Verhaltnuß A zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß D zu E. d. 27. 5.

Und durch die Zusammensetzung wird auch die Verhaltnuß A + B zu B ⌜ seyn, als die Verhaltnuß D + E zu E. d. 28. 5.

Und wiederumb durch die Verwechslung ist die Verhaltnuß der A + B ⌜ zu D + E, als die Verhaltnuß B zu E. d. 27. 5.

Nachdem dann die gantze A + B zu der gantzen D + E eine grössere Verhaltnuß hat, als die abgezogene B zu der abgezogenen E.



So wird auch folgends die übrige A zu der übrigen D eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die gantze A + B zu der gantzen D + E. d. 33. f.

Eben auß dieſer Urſach wird B zu E eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die gantze B + C, zu der gantzen E + F.

Dahero iſt die Verhaltnuß A zu D noch viel ⌜, als die Verhaltnuß der gantzen B + C zu der gantzen E + F.

Und durch die Verwexlung hat A zu der gantzen B + C eine gröſſere Verhaltnuß, als D zu der gantzen E + F.

Und durch die Zuſammenſetzung hat die gantze A + B + C eine gröſſere Verhaltnuß, zu der übrigen B + C, als die gantze D + E + F, zu der übrigen E + F. d. 28. f.

Letztlich wird durch die Verwexlung die Verhaltnuß der gantzen A + B + C zu der gantzen D + E + F ⌜ ſeyn, als die übrige B + C zu denen übrigen E + F.

Welches zum erſten zu beweiſen ware.

So ſaget man weiters, daß die Verhaltnuß deren A + B + C ſammentlich zu denen D + E + F ſammentlich ⌝ ſeye, als die Verhaltnuß A zu D.

Dann die Verhaltnuß der gantzen A + B + C zu der gantzen D + E + F iſt ⌜, als die Verhaltnuß der abgezogenen B + C zu der abgezogenen E + F.

So folget, daß auch die übrige A zu der übrigen D eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die gantzen A + B + C zu der gantzen D + E + F. d. 33. f.

Welches für das andere zu beweiſen ware.

Letztlich ſaget man, daß A + B + C ſammentlich zu D + E + F ſammentlich eine gröſſere Verhaltnuß habe, als C zu F.

Die Urſach iſt, weilen B zu E eine gröſſere Verhaltnuß hat, als C zu F. d. d. Vorg.

Dahero iſt durch die Verwexlung die Verhaltnuß B zu C auch ⌜, als die Verhaltnuß E zu F. d. 27. f.

Und durch die Zuſammenſetzung iſt auch die Verhaltnus der gantzen A + B zu C ⌜, als die Verhaltnuß der gantzen E + F zu F d. 28. f.

Und dahero wiederumb durch die Verwexlung hat die gantze A + B zu der gantzen E + F eine gröſſere Verhaltnuß, als C zu F.

Es iſt unterdeſſen ſchon bewieſen worden, daß A + B + C zu D + E + F eine gröſſere Verhaltnuß habe, als B + C zu E + F.

Dahero ſchlieſſet man, daß A + B + C zu D + E + F. noch viel eine gröſſere Verhaltnuß habe, als C zu F allein.

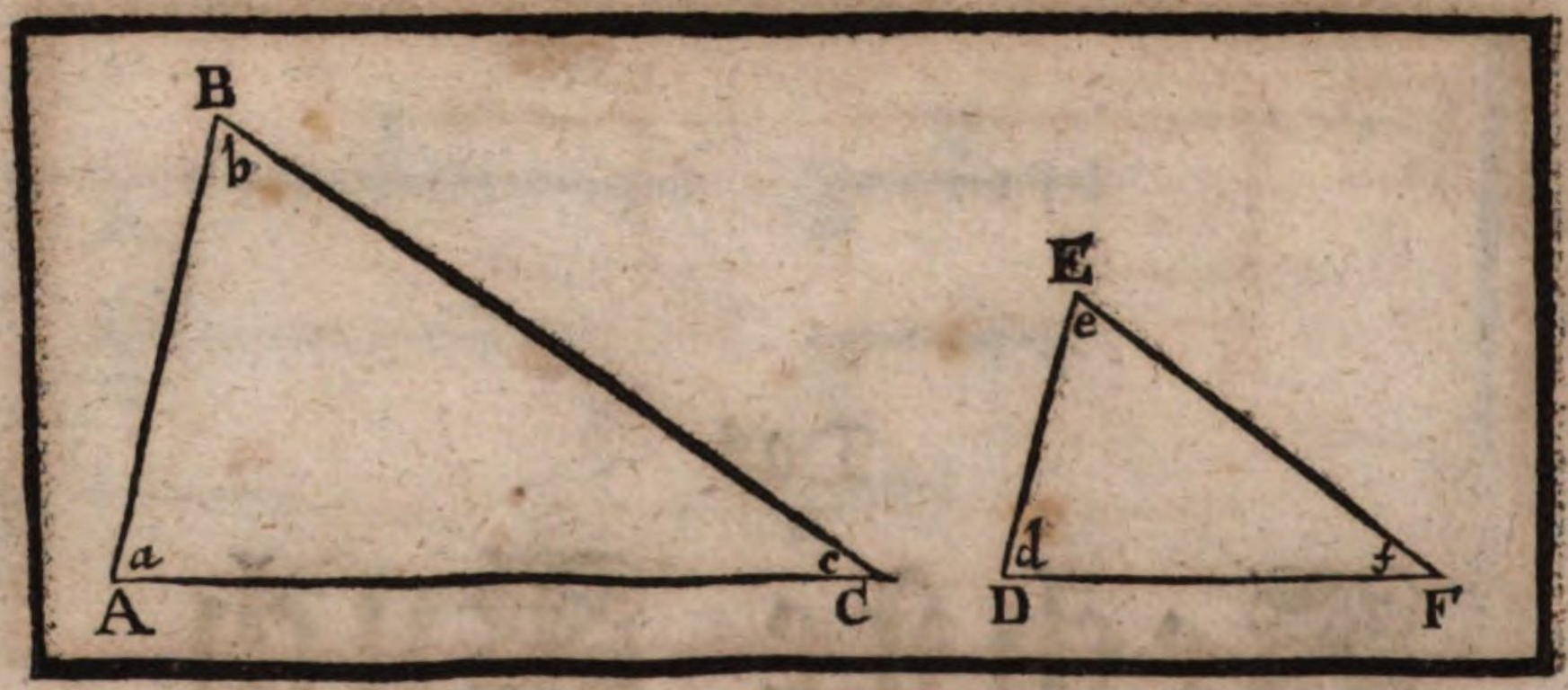
Welches zu beweiſen ware.

Das

Sechste Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort-Erklärungen.

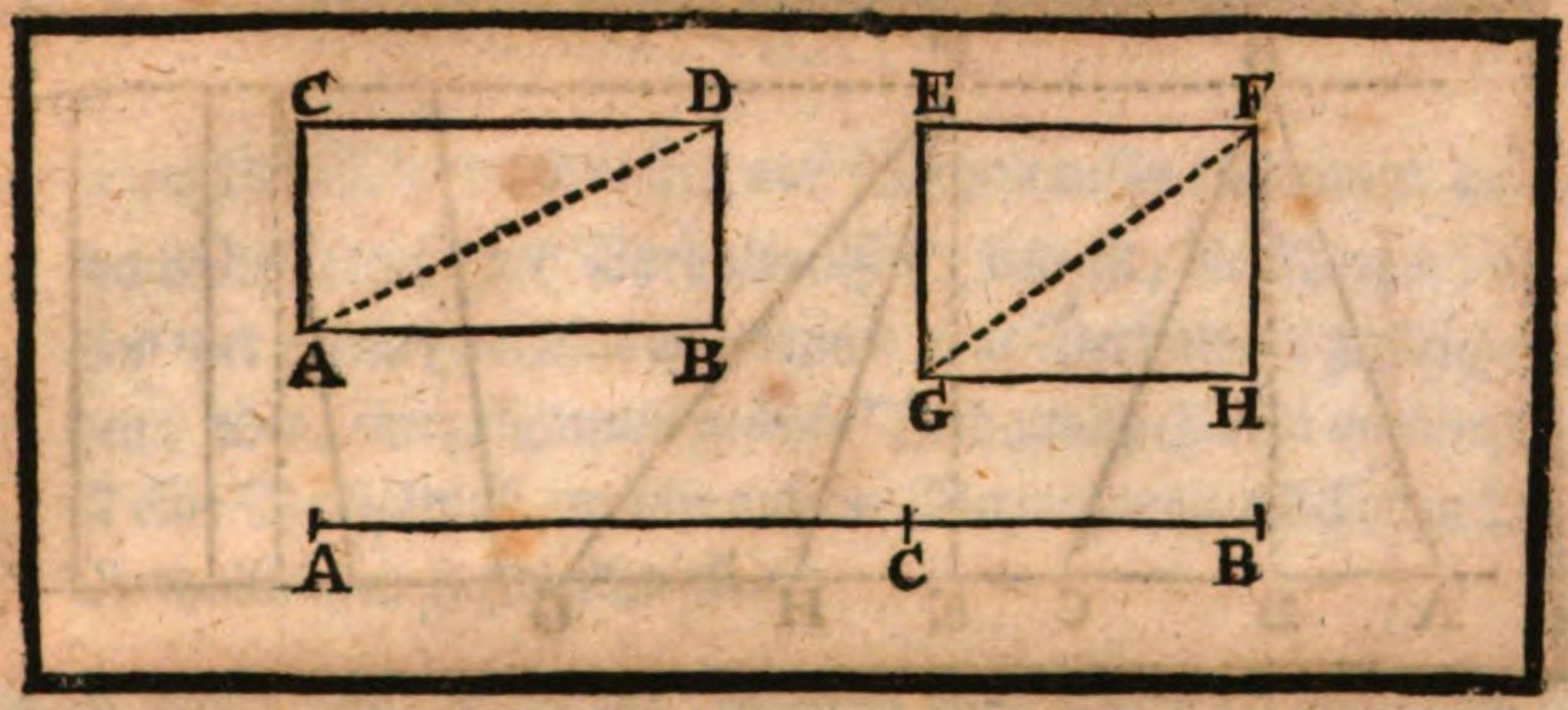
I.

Gleichförmige geradtlinische Figuren seint (Figuræ similes), welche alle Winckeln insonderheit gegen einander gleich-groß, und die Seiten, welche umb sothane gleiche Winckeln stehen, gleich-verhaltend (oder proportionirlich) haben.

Außlegung.

Zwey Sachen müssen in gleichförmigen geradtlinischen Figuren beobachtet werden; nemlich alle Winckeln insonderheit einer Figur müssen gleich seyn, allen Winckeln insonderheit der andern Figur. Als wie hier in dem △ ABC ist der ∠ a □, dem ∠ d in dem △ DEF: und der ∠ b ist □, dem ∠ e. und letztlich der ∠ c ist □, dem ∠ f.

Hernach müssen die Seiten, so umb die gleiche Winckeln stehen, gleichverhaltend seyn; das ist, in dem △ ABC muß sich die Seiten AC gegen der Seiten AB verhalten, gleich wie sich in dem △ DEF, die Seiten DF zu der Seiten DE verhaltet; so muß sich auch AB zu BC verhalten, gleich wie DE, zu EF; und letztlich muß sich verhalten BC zu CA, gleich wie sich verhaltet EF zu FD. Diesem nach werden die zwey △ ABC, DEF einander gleichförmig genannt.



II.

Widerkehrliche, oder widerkehrlich-proportionirte Figuren (Reciprocæ figuræ) seynd, welche nach solcher Beschaffenheit verhaltend gegen einander seynd, daß nemlich in der ersten Figur das erste vorgehend, und das andere nachgehend; in der andern Figur aber, das erste nachgehend, und das andere vorgehend sich befinden.

Auslegung.

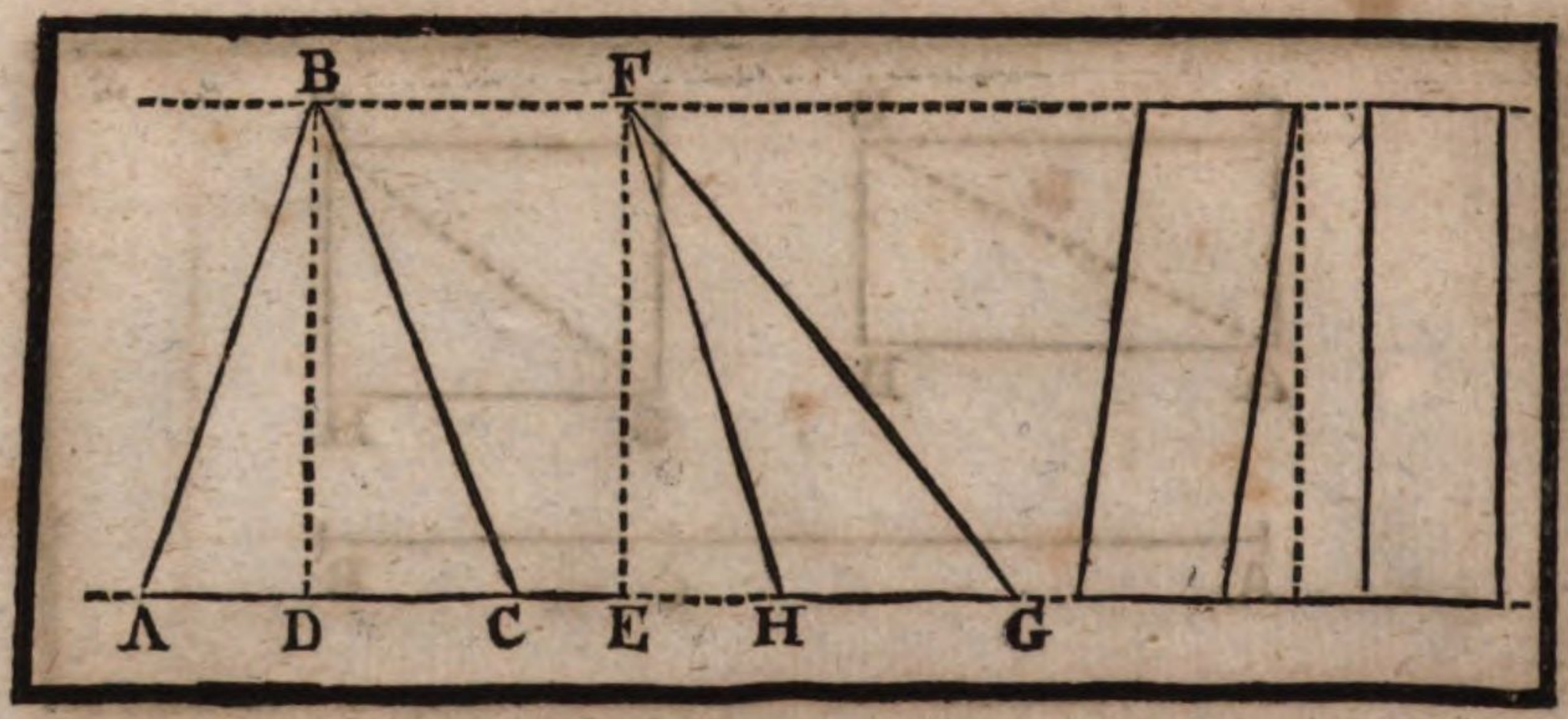
Es seynd die zwey ▭ AD, und GF. Wann sich nun die Seiten AB zu der Seiten GH also verhaltet, gleich wie die Seiten HF sich verhaltet zu der Seiten BD. das ist, in dem ersten ▭ AD. befindet sich das erste vorgehend AB, und das andere Nachgehend BD. in dem andern ▭ GF aber, ist das erste nachgehend GH, und das anderte Vorgehend HF: so werden diesem nach, beyde ▭ (obwohlen sie nicht gleichförmig seynd) widerkehrliche, oder Widerkehrlich-proportionirte Figuren genannt.

Weilen die △ ABD, und GHF die Helffte deren ▭ AD, und GF seynd, so werden sie deßwegen auch widerkehrliche Figuren seyn.

III.

Man saget, daß eine gerade Linie (gleichwie AB) nach der äusserſten, und mittlern Proportion, oder Verhaltnuß zertheilt seye, wann die gantze Linie (AB) sich also zu dem grössern Theil (AC) verhalte, gleich wie derselbe grössere Theil (AC) sich zu dem kleinern (CB) verhaltet.

Das ist, wann es seye AB. AC :: AC. CB. so saget man, daß die Linie AB nach der äusserſten und mittlern Proportion im Punct C seye zertheilet worden.



IV.

Die Höhe einer Figur ist die bleyrechte Linie, welche von dem Spitze, oder Scheidel-Punct, auff die Basis, oder Grund-Linie herunter gelassen wird.

Außlegung.

Allhier in dem △ ABC ist die Höhe, die ⊥ BD, welche auß dem Spitz B auff die Basis AC ist herunter gelassen worden: in dem △ HFG ist die Höhe, die ⊥ EF, welche auß dem Spitz F auff die verlängerte Basis GH ist herunter gezogen worden.

Anmerckung.

Die jene Figur, deren Bases in einer geraden Linie fort stehen, und einerley Höhe, das ist, gleiche lange ⊥ haben, stehen zwischen einerley Parallel-Linien; und hingegen die Figuren, welche zwischen einerley Parallel-Linien liegen, haben einerley Höhe, oder gleiche ⊥.

Zu einem Exempel, es stehen die zwey △ ABC, und HFG mit ihren Bases AC, und HG in einer geraden Linie fort, und haben ihre Höhe, nemlich die ⊥ BD, und FE einander gleich. Wann man nun durch die äusserste Ende der Höhen B, und F eine gerade Linie ziehet: so werden die Linien AG, und BF einander Parallel seyn, und deßwegen die zween △ ABC, und HFG zwischen einerley Parallel-Linien liegen.

Die Ursach ist, weilen der ∠ BDC ⊓ ist, dem ∠ FEG. (dann sie beyde recht seint) dahero wird die Linie DB = seyn, der Linie EF (d. 28. 1.) Unterdessen ist die Höhe DB ⊓ gegeben worden, der Höhe EF: deßwegen folget, daß auch die Linie EF = seye, der Linie DH, oder der verlängerten AG (d. 33 1.)

Hingegen, indeme die Linien BF und DH, zwischen welchen die zween △ ABC und HFG liegen, einander Parallel seint, auch wegen deren gleichen, nemlich rechten ∠ BDC und FEG, die Linie DB = ist, der Linie EF: so wird BFED ein ▭ seyn, und deßwegen die gegenüberstehende Seiten DB, und FF einander gleich haben, (d. 34. 1.) das ist, die △ ABC, und HFG werden einerley Höhe haben.

V.

Eine Verhaltnuß, saget man, seye auß Verhaltnussen zusammen gesetzt, wann die Grösse der Verhaltnussen (das ist, die Nenner) unter einander vermehrter, eine andere, und neue Verhaltnuß gemacht haben: oder, eine zusammen gesetzte Verhaltnuß (Ratio composita) ist eine Verhaltnuß, welche auß der Vermehrung etlicher anderer Verhaltnussen entstanden ist.

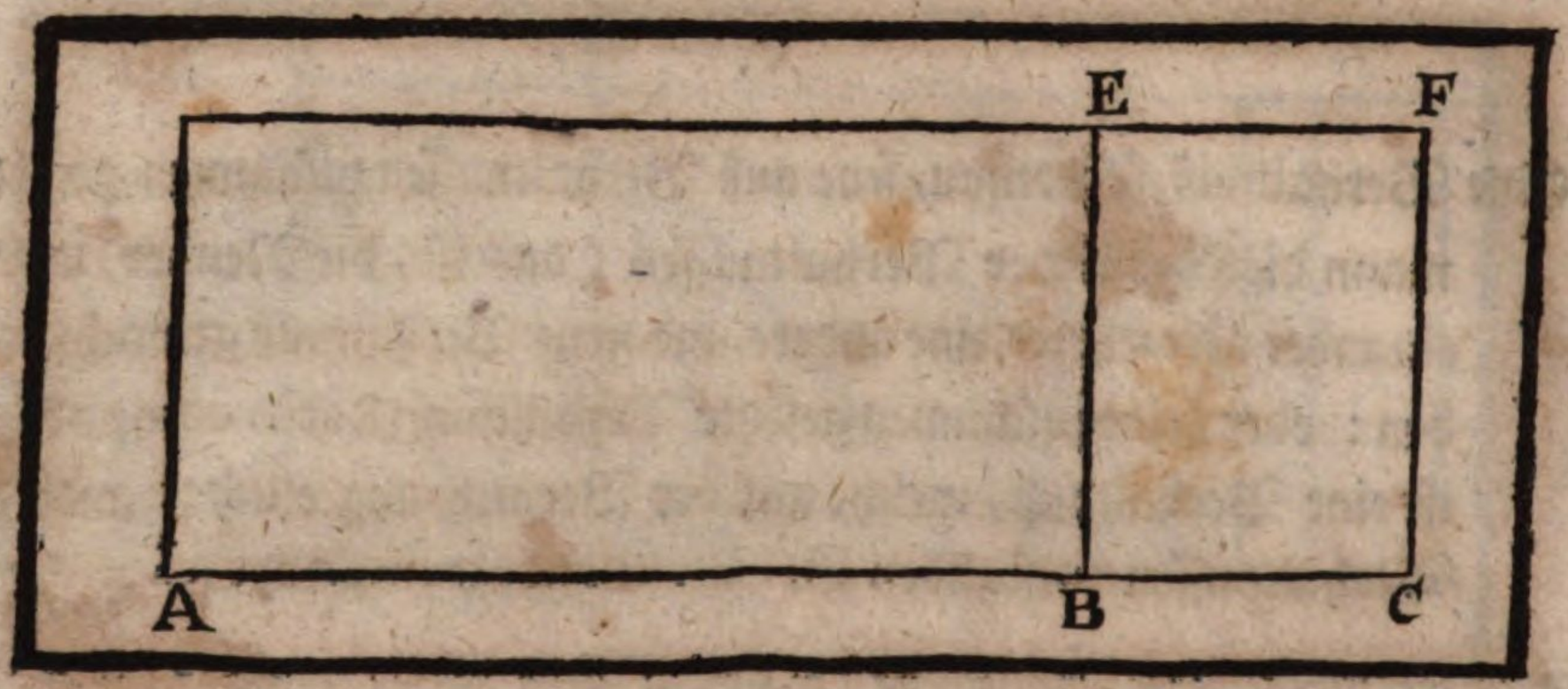
Was die Grösse einer Verhaltnuß (welche in dieser Wort-Erklärung auch ein Nenner genandt wird) seye, und wie solche zu finden, ist in der Anmerckung über die 3. def. deß 5. Buchs angezeiget worden; wann es sich nun zutraget, daß mehr Grössen oder Nenner der Verhaltnussen, eine durch die andere ordentlich vermehret werden, so heist man die letzte darauß entstandene Zahl oder Grösse eine zusammengesetzte Verhaltnuß.

Zu einem Exempel, es seynd die stäts nacheinander gehende Grössen A. B. C. D. der Nenner oder die Grösse der Verhaltnuß A zu B ist 3, oder, so ein Ding, die Grösse der Verhaltnuß A zu B ist dreyfach: der Nenner oder die Grösse B zu C ist 2, oder gedoppelt. Letztlich der Nenner, oder Grösse der Verhaltnuß C zu D, ist 3. oder dreyfach.

A	B	C	D
36	12	6	2
	3	2	3

Wann nun diese drey Nenner, oder Grössen 3.2.3. einer durch den andern ordentlich vermehret wird: so bekommt man in der letzt-entstandenen Zahl, endlich den neuen Nenner 18 (oder achtzehenfache Verhaltnuß) welche die zusammengesetzte Verhaltnuß ist, welche zwischen A. B. C. D. sich befindet. Dann klar ist, daß die dreyfache Grösse der Verhaltnuß, so A zu B hat, vermehrter mit der doppelten, welche B zu C hat, eine sechsfache Verhaltnuß mache. Diese aber mit der dreyfachen, so C zu D. hat, vermehrter giebet letztlich eine achtzehenfache Verhaltnuß.

Diß ist zu verstehen, wann die Grösse, als wie in vorstehendem Exempel, stäts nach einander folgen. Wann sie aber in etlichen Absetzungen bestehen, gleich wie: wann man A 8 zu B 2, und hinwiederumb C 12 zu D 6 haltet, so ist nöthig, daß man sie anfänglich (deß leichten Beweiß halber) in stetsfolgende Grösse, welche doch mit denen A zu B, und C zu D einerley, oder gleichförmige Verhaltnuß haben, verändere. Man nehme dahero nach Gefallen eine Grösse oder Zahl, als wie 24. mache darmit, gleich wie A 8 zu B 2 ist, also seye 24 zu der gefundenen 6, alsdann sage, wie C. 12 zu D. 6 sich haltet, also seye die gefundene 6 zu 3.

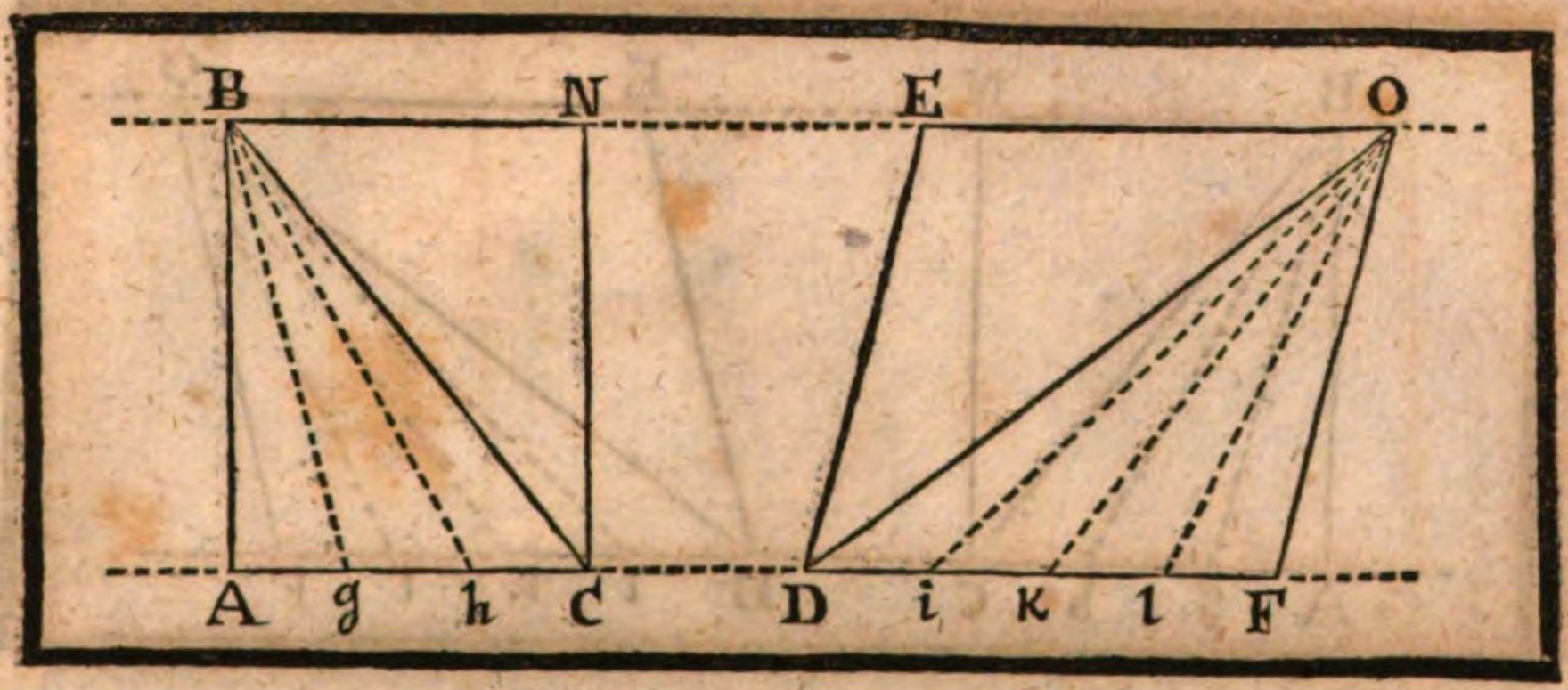


Diese drey Zahlen nun 24, 6, 3. werden stets nach einander folgen, und mit denen abgesetzten Grössen A zu B, und C zu D geproportionirt seyn. Unterdessen ist die zusammengesetzte Verhaltnuß deren Grössen 24, 6, 3 der neue Nenner 8. Dahero werde auch deren abgesetzten Grössen A. B. C. D. die zusammengesetzte Verhaltnuß der neue Nenner 8 seyn. Dann die Grösse der Verhaltnuß A 8 zu B 2 ist 4: und C 12 zu D 6 ist 2. Wann nun diese zwey Nenner 4 und 2 durch einander vermehrt werden; so geben sie eben den neuen Nenner 8.

VI.

Wann auff einer geraden Linie ein Parallelogram gestellt wird, welches die gantze Linie nicht einnimmet, und hernachmahln eben in gleicher Höhe und Winckeln ein anders Parallelogram auff den Abgang der geraden Linie beschrieben wird: so saget man, daß das erste Parallelogram ein abgehendes Parallelogram seye. Entgegen wann ein Parallelogram auff einer längern Linie, als die gegebene ist, gestellt wird, und hernachmahln auff der gegebenen geraden Linie ein anders Parallelogram in gleicher Höhe und Winckeln gemacht wird, so sagt man, daß das erste ein übertreffendes Parallelogram seye.

Also ist auff der Linie AC, das ▭ AE ein abgehendes, und das ▭ BF ist der Abgang. Hingegen auff der Linie AC (wann solche länger, als die gegebene AB genommen wird) ist das ▭ AF ein übertreffendes, und das ▭ BF ist der Unterschied oder Uberschuß.



Die 1. Vorgab.

Betrachtung.

Die Triangeln, und die Parallelogrammen, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Bases.

Es seynd gegeben die zween △ ABC, und DOF, auch die ▭ AN, und DO, welche einerley Höhe haben: Diesem nach saget man, daß sich der △ ABC, oder das ▭ AN zu dem △ DOF, oder dem ▭ DO verhalte, gleich wie die Basis AC, zu der Basis DF. das ist

AC. DF :: { △ ABC. △ DOF. / ▭ AN. ▭ DO.

Zubereitung.

Indeme die fürgegebene △ ABC, und FOD gleiche Höhe haben, so setze sie zwischen zwey ═. d. an. 4. def. 6.

Hernach zertheile die Bases AC, und DF auff solche Art, daß beyde durch einen gemein-mäßlichen Theil geradt auffgemessen werden.

Seye Ag ein solcher Theil, welcher die Basis AC just dreymahlen, und die Basis DF just vier mahlen auffmesse.

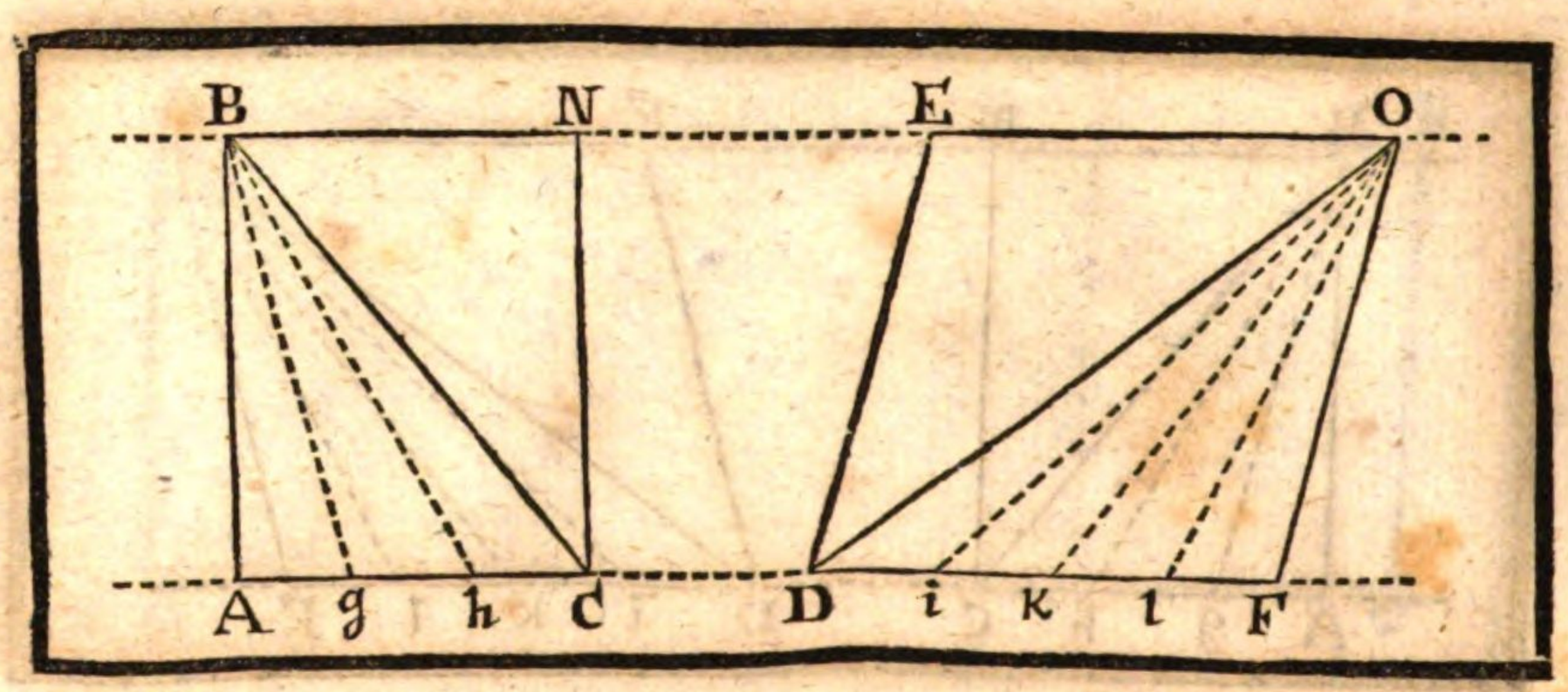
Ziehe letztlich die Puncten g. h in B, und die Puncten i. k. l. in O zusammen.

Beweiß.

Dieweilen die Theile, oder kleine Bases Ag. gh. hC. und Di ik. kl. lF einander seint ⊓ gemacht worden. d. d. Zub.

So werden auch alle kleine △, als wie ABg, gBh, hBC, und DOi iOk. kOl. lOF. einander ⊓ seyn, d. 38. 2.

Und die Anzahl dieser kleinen △ ⊓ seyn der Anzahl deren gleichen Theile, oder kleinen Bases.



Die Basis AC unterdessen ist just in drey gleiche Theile, und die Basis DF just in vier gleiche Theile abgetheilet worden. d. d. Zub.
deßwegen wird der △ ABC auch just in drey gleich kleine △, und der △ FOD just in vier gleich kleine abgetheilet seyn.
Und wegen gleicher Anzahl in einem und anderen seyn,
Daß wie offt die kleine Basis Ag in der gantzen Basis DF begriffen ist, so offt auch der kleine △ ABg in dem gantzen △ FOD begriffen seyn werde.
Und ferners, so offt die zwey kleine und gleiche Bases Ag + gh in der gantzen Basis DF begriffen seynd, so offt auch die zwey kleine und gleiche △ ABg + △ gBh in dem gantzen △ FOD begriffen seyn werden.
Letztlich, so offt die drey kleine und gleiche Basen Ag + gh + hC (oder AC) d. 14. ax. 1.
in der gantzen Basis DF begriffen seynd, so offt auch die drey kleine und gleiche △ ABg + △ gBh + △ hBC (das ist, der △ ABC) in dem gantzen △ FOD begriffen seyn werde.
Und dahero seyn AC. DF :: △ ABC. △ DOF. { d. 6. def. 5. / d. 7. def. 5.

II.

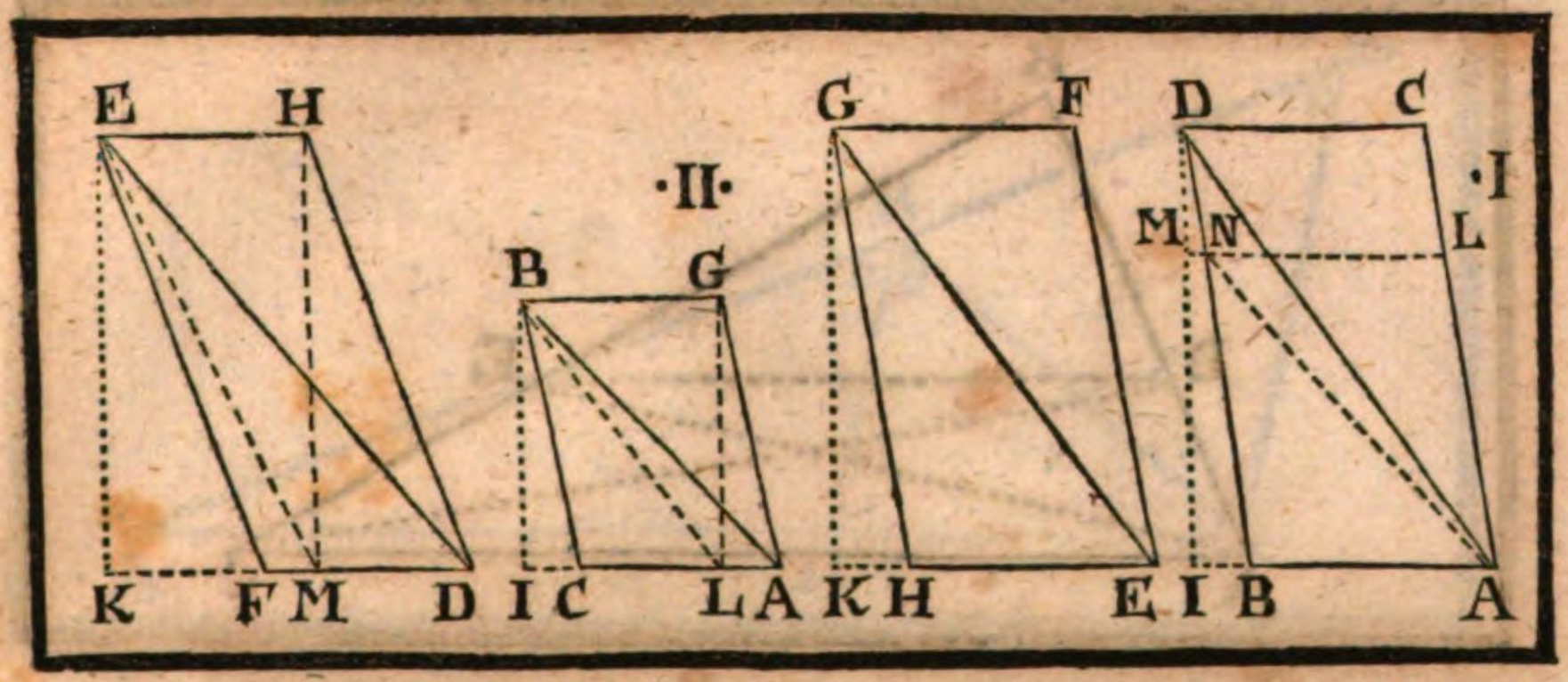
Es verhaltet sich der △ ABC zu dem △ DOF; als wie das □ AN zu dem □ DO. { de 14. 5. / und 41. 1.
Der △ ABC ist aber zu dem △ DOF; als wie die Bases AC zu der Basis DF. d. d. Vorg.
Folget, daß auch das □ AN zu dem □ DO seye; als wie die Basis AC, zu der Basis DF. d. 11. 5.
Welches zu beweisen ware.

Anmerckung. I.

Die Triangeln (als wie ADB, EGH Fig. I.) und die Parallelogrammen (AD. EG), welche sich gegen einander verhalten, gleich wie ihre Bases (AB, und EH), haben einerley, oder gleiche Höhe (ID, KG).

Beweiß.

Wann man es nicht gestehen will, sondern sagen, daß die Höhe ID ⌜ seye, als die Höhe KG.



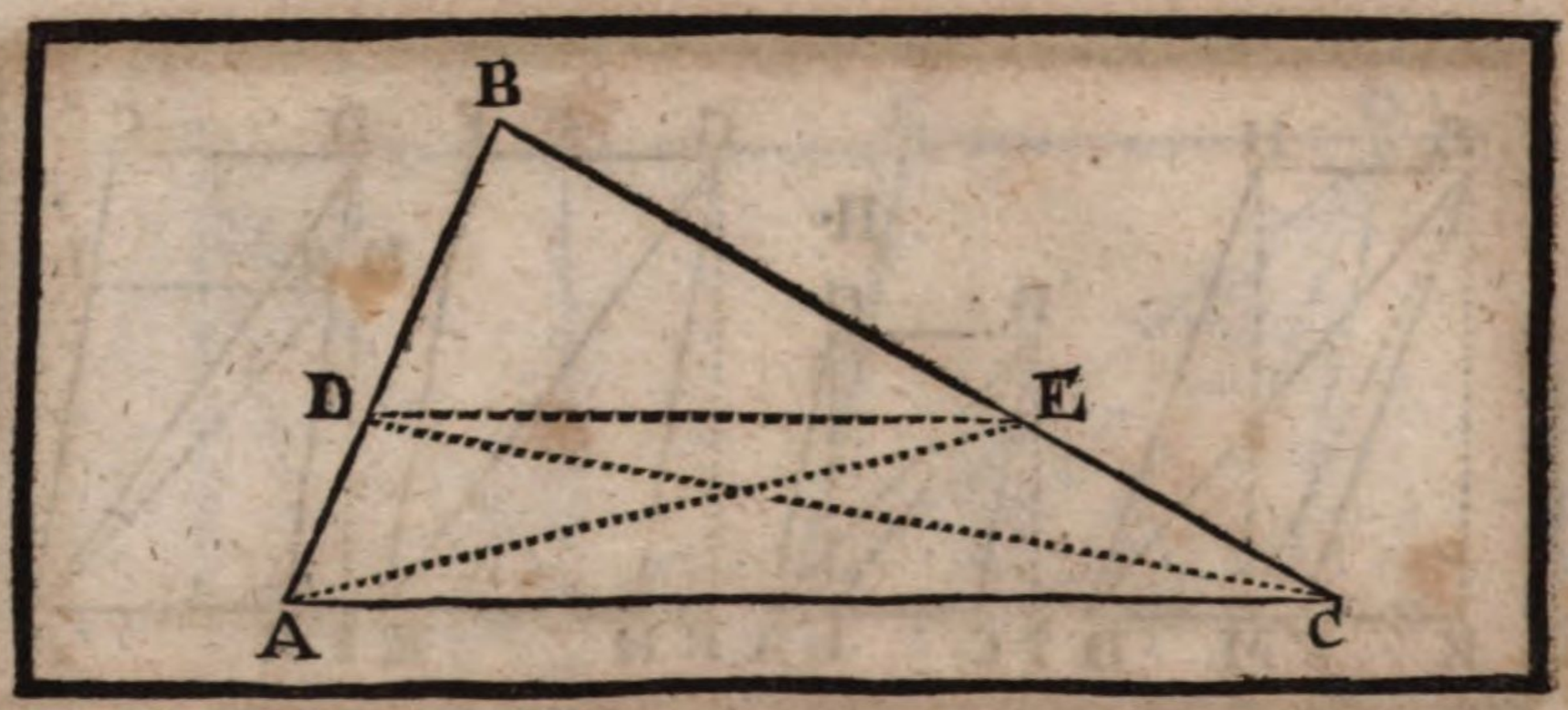
So mache (wann es möglich ist,) IM ⌐, KG,
und ziehe LM ═, AI, welche die Seiten BD
abschneiden werde in Punct N. d. 31. 1.
Ziehe letzlich A. N zusammen.
Nunmehro wegen gleich vermeinter Höhe muß seyn
der △ ANB. △ EGH :: AB. EH. d. 1. 6.
Es ist auch gegeben worden △ ADB. △ EGH :: AB. EH.
Dahero werden die zwey △ ANB. ADB. zu dem △ EGH einer-
ley Verhaltnuß haben, und folgends der △ ANB ⌐ seyn dem [d. 11. 5. und 9. 5.
△ ADB.
Welches ungereimt ist, nemlich ein Theil ⌐, seinem gantzen.
Deßwegen die Höhe nicht ungleich, sondern einander ⌐ seyn werden.
Eben das gleiche wird von denen ▭ AD. EG (dann sie geradt die
Helffte deren △ ADB. EGH seint) geschlossen. d. 41. 1. [d. 15. und 11. 5.

Fig. II.

Die △ ABC, und DEF, und die ▭ AB, und DE, welche gleiche Bases
AC, und DF haben, halten sich gegen einander, gleich wie ihre Höhen
IB. KE.
Mache vorhero IL ⌐, AC, und KM ⌐, DF. d. 3. 1.
Ziehe zusammen LG. LB. IB, und MH. ME. KE.

Beweiß.

Die zwey Linien IL, und KM haben einerley Höhe: L: d. d. Zub.
Dahero seyn werde △ LBI. △ MEK :: IB. KE. d. 1. 6.
Unterdessen ist der △ LBI ⌐, dem △ ACB. [d. 38. 1. und Zub.
und der △ MKE ⌐, dem △ DEF.
Folget, daß auch seye der △ ABC. △ DEF :: IB. KE, [d. 7. 5. d. 1. 6.
Nemlich eine Höhe zu der andern Höhe.
Und folgends, das ▭ GC. ▭ HF :: IB. KE. [d. 41. 1. und 15. 5.



Die II. Vorgab. Betrachtung.

Wann man in einem Triangel einer Seiten eine Parallel-Linie ziehet: so werden dardurch die andere zwo Seiten proportionirlich zertheilt: Und wann die zwo Seiten eines Triangels, durch eine gerade Linie seynd proportionirlich zertheilt worden: so wird eine solche Linie der übrigen Seiten Parallel lauffen.

Es ist der Triangel ABC gegeben, in welchem die Linie ED = gezogen ist der Seiten AC: so saget man, daß durch diese Linie die andere zwo Seiten AB. CB proportionirlich seynd abgetheilt woroen. Das ist, es werde seyn BD, DA :: BE, EC.

Ziehe vorhero zusammen A, E. und C, D.

Beweiß.

Dieweilen die zwey △ ADE. CED zwischen zwey = liegen, und einerley Basis DE haben. d. 7. 5.

So wird der △ ADE ⊓ seyn, dem △ CED. d. 37. 1.
und deßwegen wird der △ DBE zu diesen zwey gleichen △ einerley Verhaltnuß haben.

Das ist △ DBE. △ ADE :: △ DBE. △ CED.

Unterdessen wegen einerley Höhe wird auch seyn
der △ DBE. △ ADE :: die Basis BD zu DA d. 1. 6.
und der △ DBE. △ CED :: die Basis BE, zu EC.

Dahero letztlich seyn wird BD. DA :: BE, zu EC. d. 11. 5.

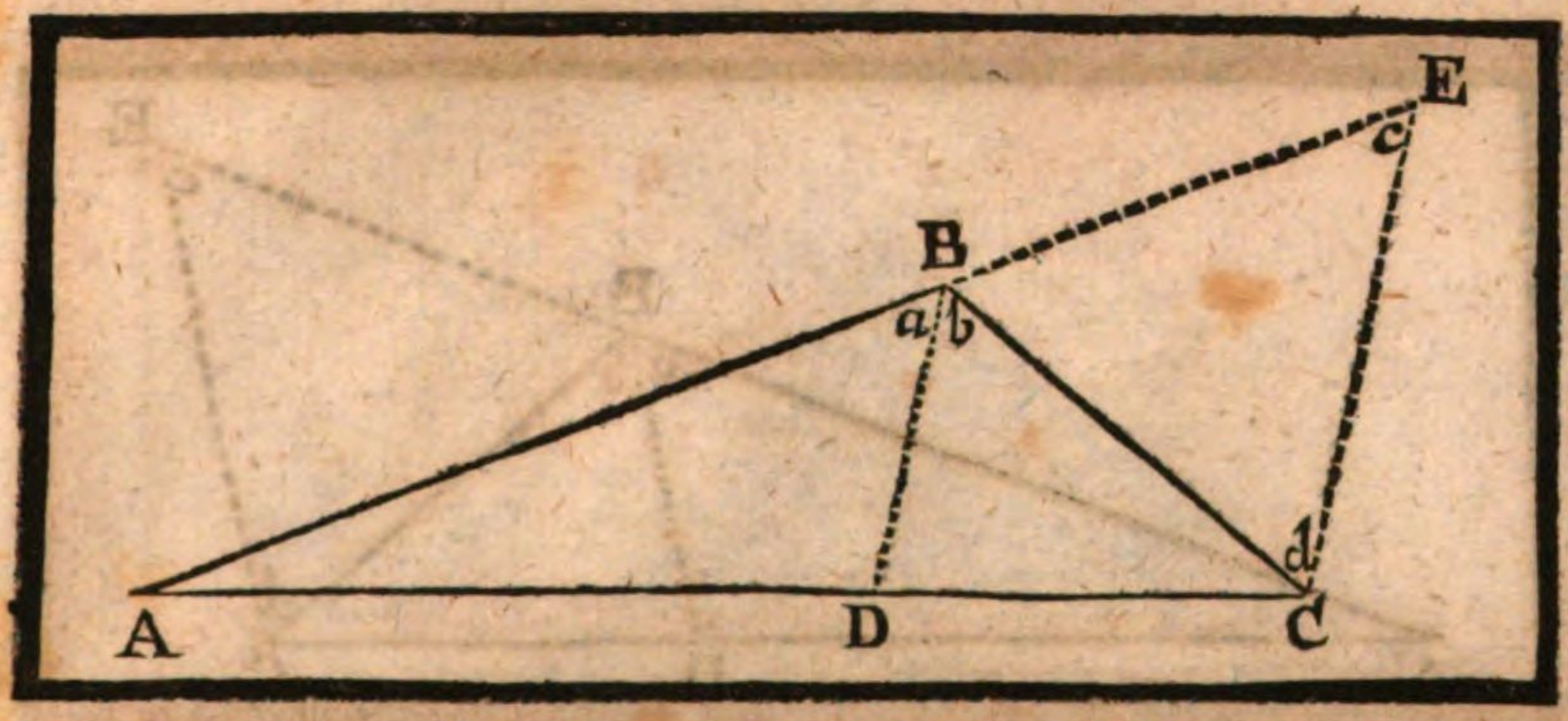
II.

Es ist gegeben, daß die Linie DE die zwey Seiten deß △ ABC proportionirlich zertheile, nemlich BD. DA :: BE. EC. so saget man, daß dieselbe Linie DE mit der dritten Seiten AC = lauffe.

Dann der △ DBE. △ ADE :: △ DBE. △ CED. d. d. Vorg.

Dahero wird wegen gleicher Verhaltnuß der △ ADE ⊓ seyn, dem △ CED. d. 9. 5.
Und folgends die Linie DE = seyn, der Linie AC. d. 39. 1.

Welches zu beweisen ware.



Die III. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ein Winckel eines Triangels mit einer geraden Linie ist gleich entzwey getheilt worden, und solche Linie auch die Basis in einem Punct durchschneidet, so werden sich die zwey Stücke der Basis also gegen einander verhalten, gleich wie die zwo Seiten deß Triangels. Und hinwiederumb, wann die zwey Stücke der Basis mit denen übrigen zwo Seiten eine gleiche Verhaltnuß haben: so wird die gerade Linie, welche auß dem Winckel in die Basis ist gezogen worden, und dieselbe durchschnitten, sothanen Winckel gleich entzwey schneiden.

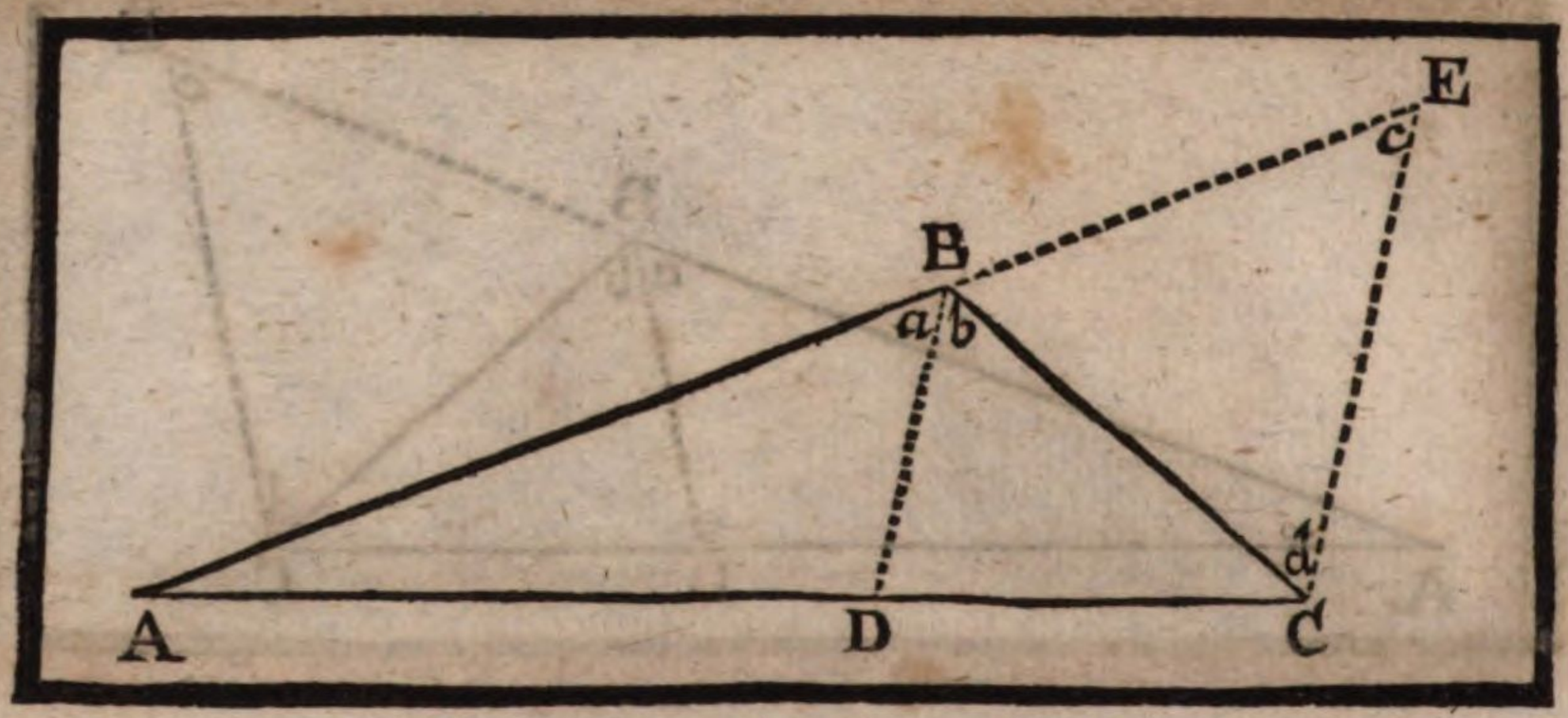
Es ist gegeben der △ ABC, dessen ∠ a + b gleich entzwey mit der Linie BD, welche die Basis AC im Punct D durchschneidet, zertheilet worden: so saget man, daß die Stücke AD. DC denen zwo Seiten AB. BC geproportioniret seyn, das ist AD. DC:: AB. BC.

Zubereitung.

Verlängere die Seiten AB, biß daß das Stück BE der Seiten BC ⊓ werde.
Hange E. C zusamm.

Beweiß.

Die Seiten BE ist ⊓, der Seiten BC. d. 6. Zus.
Dahero ist der ∠ c ⊓, dem ∠ d. d. 5. 1.
Unterdessen ist der ∠ a + b ⊓, beyden ∠ c und d. d. 32. 1.
Deßwegen ist die Helffte, oder der ∠ b ⊓ dem ∠ d.
Dahero ist folgends die Linie DB = der Linie CE, d. 27. 1.
und dann sich verhaltet AB. BE (oder dergleichen BC):: AD. DC. d. 2. 6.
Welches das erste zu beweisen ware.



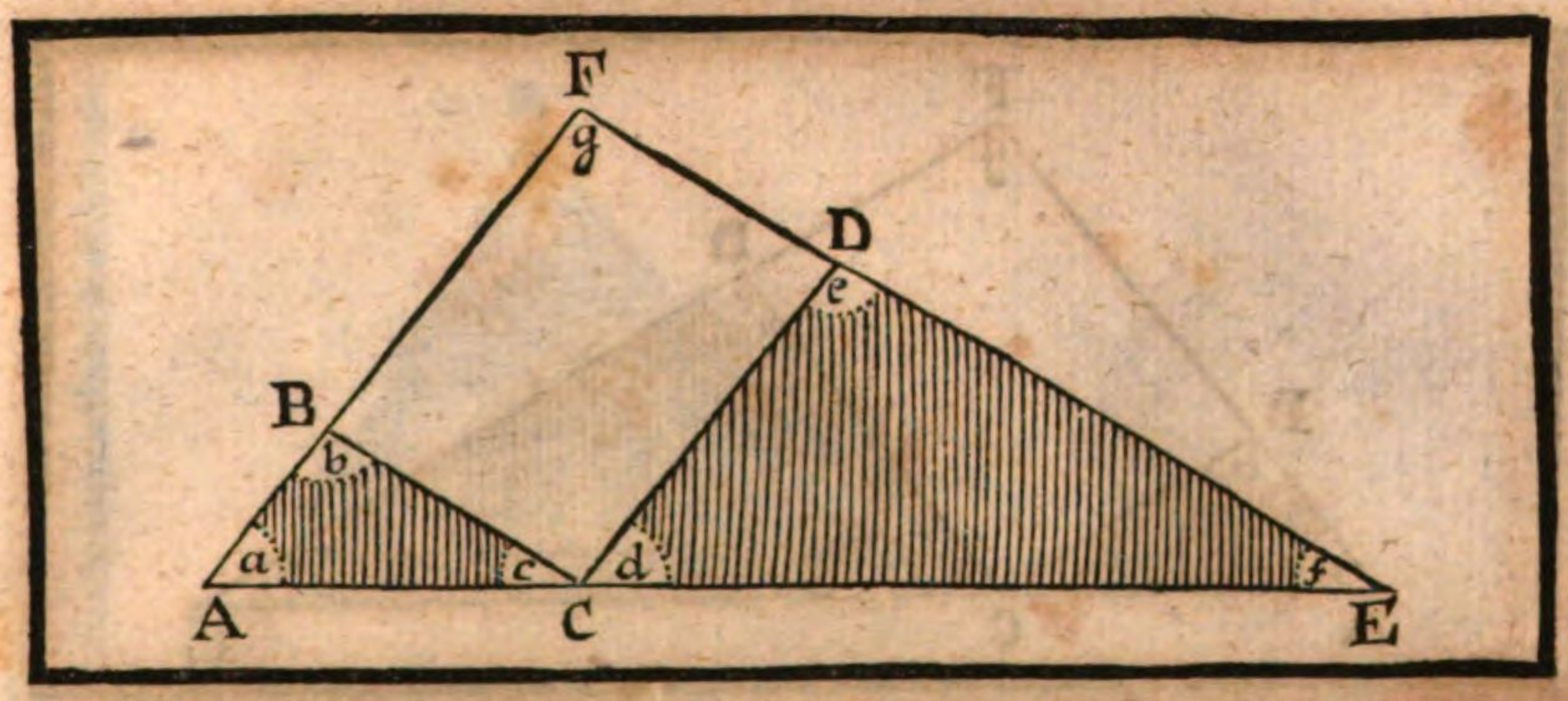
II.

Es ist gegeben, daß in dem △ ABC die Linie DB die Basis AC
mit denen zwo Seiten AB. BC proportionirlich zertheilt habe,
nemlich, daß es seye AD. DC: · AB. BC: so saget man, daß die
Linie DB den ∠ a + b gleich entzwey werde zertheilt haben.
Mache vorhero die Figur, wie vorgehends.

Beweiß.

Es ist AB. BC (oder dergleichen BE) :: AD. DC. d. d. Vorg.
Dahero wird die Linie DB = seyn, der Linie CE, d. 2. 6.
und der ∠ a ⌐, dem ∠ c, und der b ⌐, dem ∠ d. d. 29. 1.
Wegen der zwey gleichen Seiten BC. BE aber, ist der ∠ c ⌐, dem ∠ d. d. 5. 1.
Dahero auch der ∠ a ⌐, dem ∠ b ist. d. 1. ax. 1.
Worauß man schliesset, daß der ∠ a + b geradt entzwey
von der Linie DB seye zertheilt worden.

Welches zum anderten zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichwincklichte Triangeln, haben die jene Seiten, welche umb gleiche Winckeln stehen, gegen einander proportionirter; und die gleichförmig-haltnuß-sagende Seite seynd, welche die gleiche Winckeln unterspannen.

Es seynd gegeben die zween △ ABC, und CDE, welche gleichwincklicht seint, nemlich der ∠ a ist ⊓, dem ∠ d. und der ∠ b ⊓, dem ∠ e. und der ∠ c ⊓, dem ∠ f. Diesem nach saget mau, daß die Seiten beyder △ einander geproportionirt seint, das ist, es wird sich verhalten AB, AC :: CD, CE. und AC, BC :: CE, DE; letztlich AB. BC :: CD. DE, darauß auch erscheinet, daß die gleichförmig-haltnuß-sagende Seiten, die Seiten AB. CD, und AC. CE, und CB, ED seint.

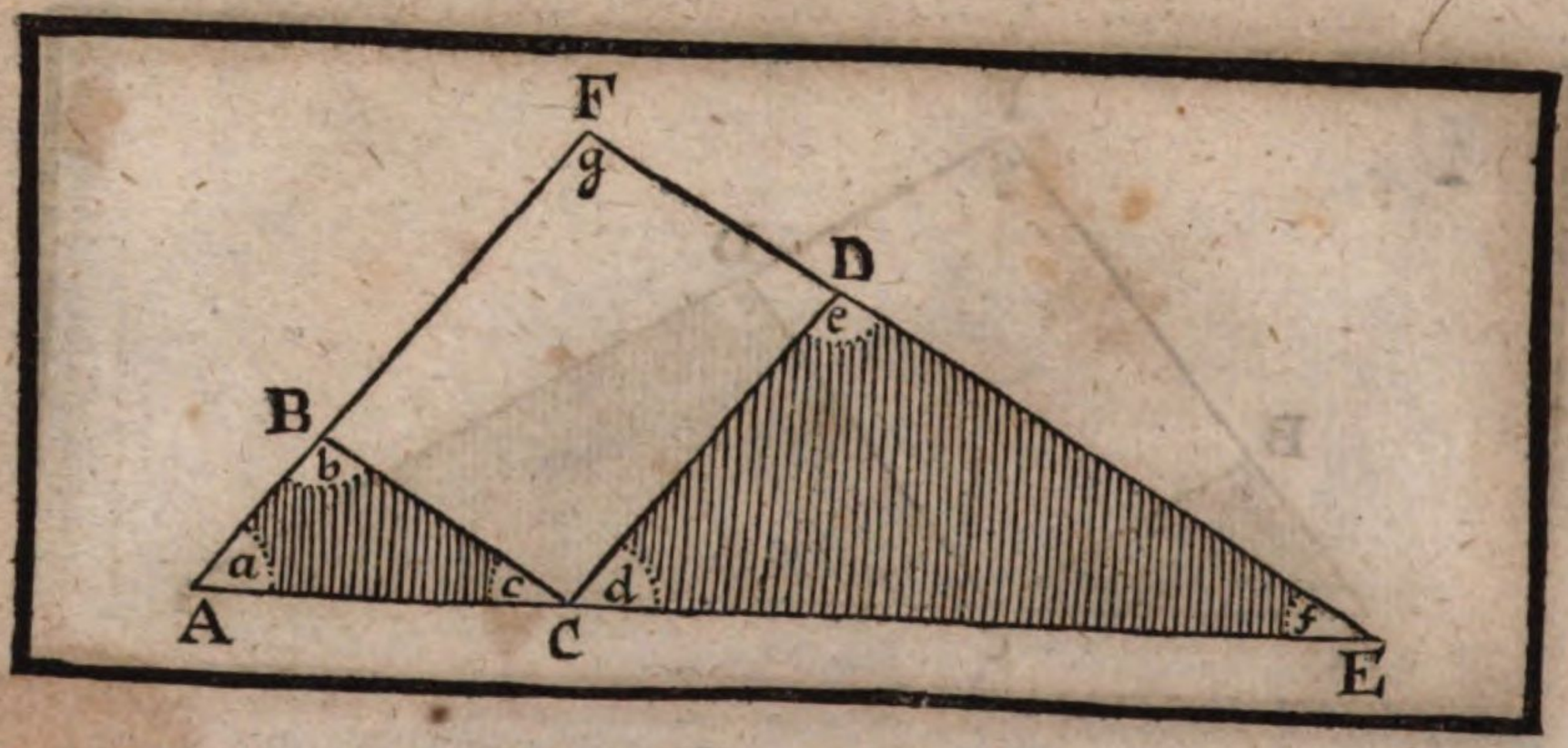
Zubereitung.

Setze die zwey △ also zusammen, daß die beyde Seiten AC, und CE eine gerade Linie machen.

Verlängere die Seiten AB, und ED, biß sie in einem Punct, als wie F, zusammen stossen.

Beweiß.

Der ∠ a ist ⊓, dem ∠ d. — d. d. Vorg.
Dahero ist die Linie AF ═, der Linie CD. — d. 28. 1.
Ingleichen auch, indeme der ∠ c ⊓ ist, dem ∠ f. — d. d. Vorg.
so wird die Linie BC ═ seyn, der Linie FE, oder dem Stück DF. — d. 28. 1.
Worauß man schliesset, daß die Figur BFDC ein ▭ seye, — d. 35. def. 1.
und deßwegen die Seiten BF ⊓, CD, und FD ⊓, BC habe. — d. 34. 1.
Nach diesem betrachte den grossen neu-entstandenen △ AFE, sagend,
Weilen BC ═ ist, der Seiten FE. — d. d. Vorg.



So wird seyn AB. BF (oder dergleichen CD) :: AC. CE.
Und durch die Verwexlung AB. AC:: CD. CE. d. 2. 6.
Welche die erste Vergleichung ist. d. 16. 5.
Hernach ist in dem △ AFE, auch CD ═, der Seiten AF.
So wird seyn AC. CE :: FD (oder dergleichen BC) ED d. d. Vorg.
Und durch die Verwexlung AC. BC :: CE. DE. d. 16. 5.
Welche die anderte Vergleichung ist.
Letztlich in deme ist AB. AC:: CD. CE, und d. d. Vorg.
AC. BC:: CE. DE.
So wird auß dergleichen seyn AB. BC: : CD. DE. d. 22. 5.
Welches zum letzten zu beweisen ware.

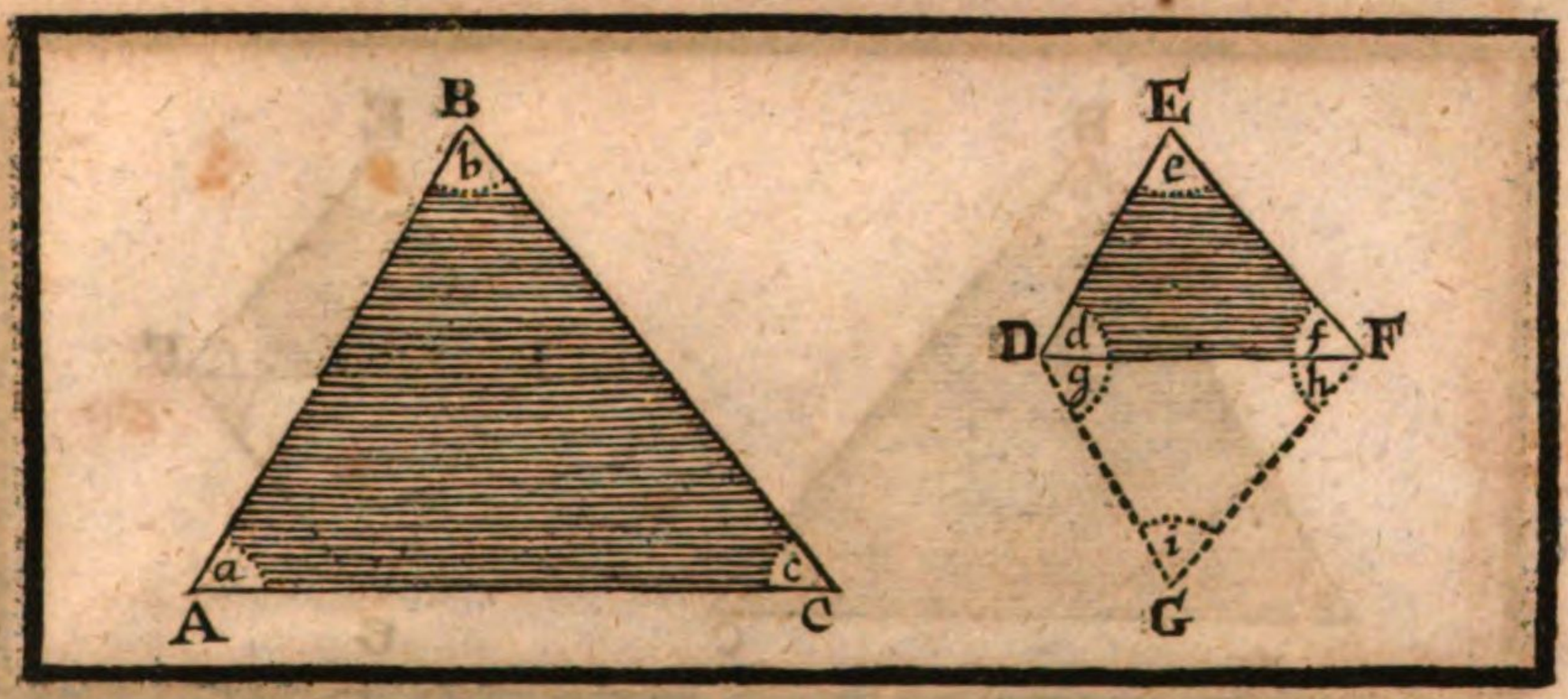
Folge.

I.

Alle gleichwincklichte △ seint auch gleichförmig.

II.

Wann man in einem △ eine Linie ziehet ═, einer Seiten deß ▲,
so wird solche einen kleinen △ abschneiden, der gleichförmig ist dem ganzen.
Gesetzt man ziehet in dem △ AFE die Linie CD, ═ der Seiten AF.
so wird hernach der △ CDE gleichförmig seyn, dem △ AFE.
Dann der ∠ d ist ⊓, dem ∠ a, und der ∠ e ⊓, dem ∠ g.
der ∠ f ist auch beyden △ gemein. d. 29. 1.
Dahero werden beyde △ gleichwincklicht, und folgends durch
diese 4. Vorg. einander gleichförmig seyn.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

Wann zwey Triangel ihre Seiten gegen einander geproportionirt haben: so werden sie auch ihre Winckeln, welche von gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten unterspannet seynd, gleich einander haben.

Es seynd gegeben die zwey △ ABC. DEF, die ihre Seiten gegen einander geproportionirt haben, nemlich BA. AC :: ED. DF, und BC. CA :: EF. FD. Letztlich BC. BA :: EF. ED. so saget man, daß sie einander gleich wincklicht seyn, und die gleichförmig-haltnuß-sagende Seiten BA. ED, und AC. DF, und CB. FE gleiche Winckeln unterspannen.

Zubereitung.

Mache auff DF den △ DGF, also, daß der ∠ g ⊓, dem ∠ a, und der ∠ h ⊓, dem ∠ c seye. Der ∠ i wird hernach ⊓ seyn dem ∠ b. d. 23. I. d. 32. I.

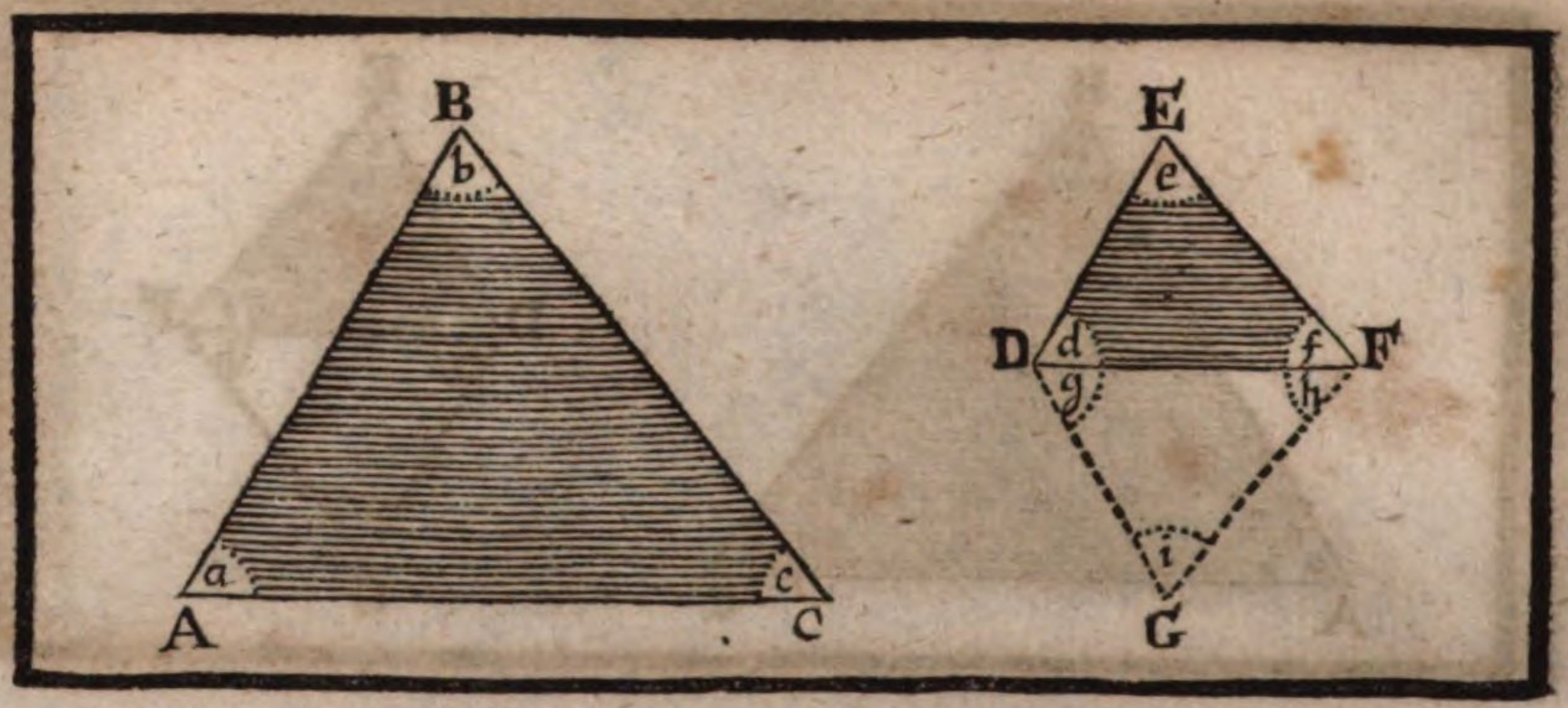
Beweiß.

Der △ DGF ist gleichförmig, dem △ ABC. — [d. d. Zuh. und 4. Cor. 1. 6.
Dahero wird sich halten GD. DF :: BA. AC. — d. 1. def. 6.
Es haltet sich auch BA. AC :: ED. DF. — d. d. Vorg.
deßwegen wird auch seyn GD. DF :: ED. DF. — d. 11. 5,
Worauff folget, daß DG ⊓ seye, der ED. — d. 9. 5.

Abermahlen, indeme ist GF. FD :: BC. CA — [d. d. Zub. u. 4 Cor. 1. 6.
und sich auch haltet BC. CA :: EF. FD. — d. d. Vorg.
so wird auch seyn GF. FD :: EF. FD. — d. 11. 5.
Worauff folget, daß GF ⊓ seye der EF. — d. 9. 5.

Letztlich, wegen der gemeinen Basis DF, wird der △ DGF ⊓ seyn, dem DEF. — d. 8. I.
Und folgends der ∠ d ⊓, dem ∠ g (oder dem gleichen ∠ a.)
und der ∠ f ⊓, dem ∠ h (oder dem gleichen ∠ c.)
Letztlich auch der ∠ e ⊓ dem ∠ b. — d. 32. I.

Welches zu beweisen ware.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zwey Triangeln, ein Winckel eines, gleich ist, einem Winckel deß andern, und die zwo Seiten, welche die gleiche Winckeln begreiffen, gegen einander geproportionirt seint, so werden solche zwey Triangeln gleichwincklicht einander seyn.

Es seint gegeben die zwey △ ABC. DEF, welche die ∠ a und d einander gleich haben, und die Seiten, welche die gleichen ∠ begreiffen, geproportionirt, daß ist BA. AC :: FD. DF. Diesem nach saget man, daß solche beyde △ auch gleichwincklicht einander seyn, nemlich der ∠ b ⊓, dem ∠ e, und der ∠ c ⊓, dem ∠ f.

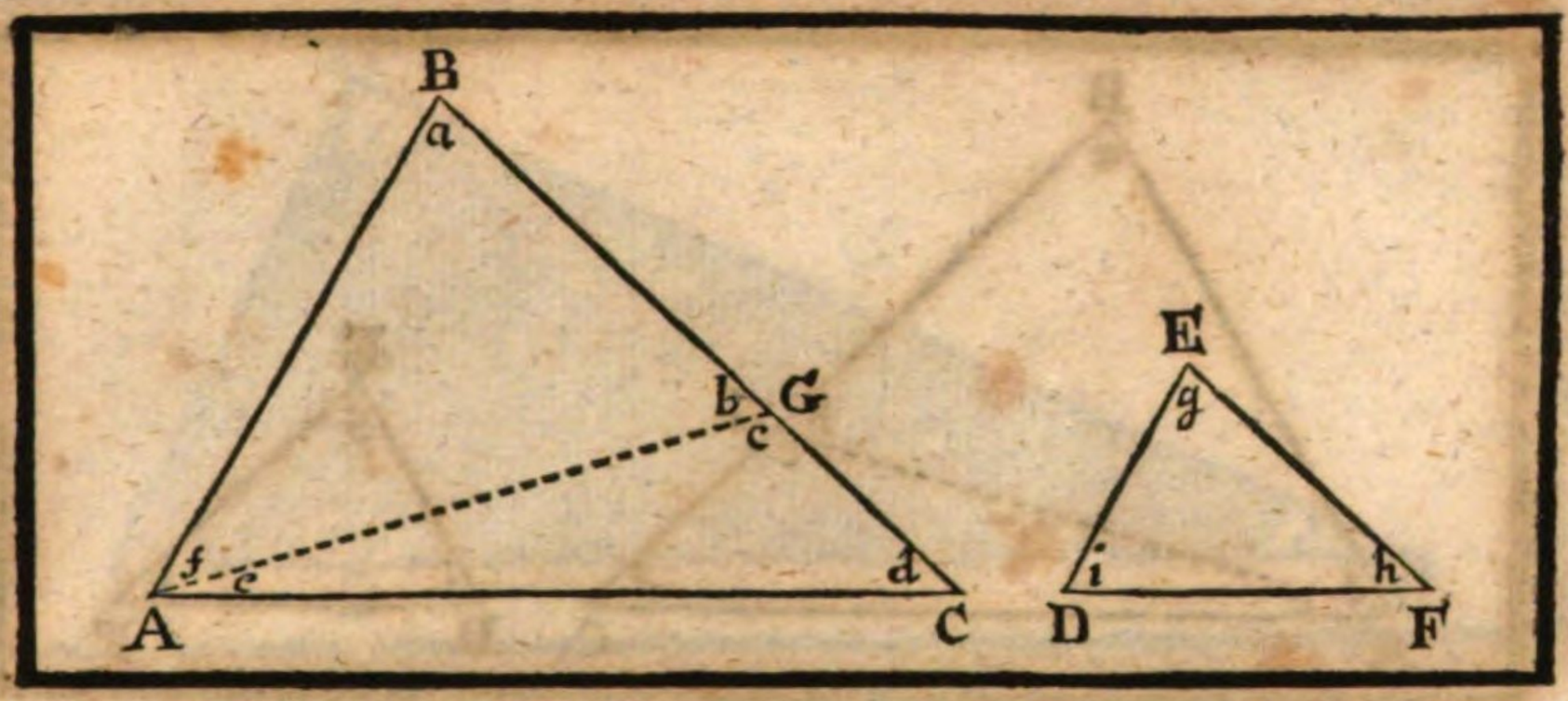
Zubereitung.

Auff DF mache den △ DGF solcher gestalt, daß der ∠ g ⊓ seye, dem ∠ a, und die beyde ∠ h. i ⊓, beyden ∠ c. b. d. 23. 1.

Beweiß.

Der △ DGF ist gleichförmig dem △ ABC; [d. d. Zub. und 4. 6.
Deßwegen sich verhaltet GD. DF :: BA. AC.
Es ist aber BA. AC :: ED. DF. d. d. Vorg.
Derohalben wird auch seyn GD. DF :: ED. DF. d. 11. 5.
und deßwegen ist GD ⊓ der ED. d. 9. 5.
Unterdessen ist die Seiten DF beyden △ DGF. DEF gemein, [d. d. Zub. und Vorg.
und der ∠ g (oder der gleiche ∠ a), ⊓ dem ∠ d.
Dahero wird auch die Seiten GF ⊓ seyn, der Seiten FE,
und folgends die übrige ∠ deß △ DEF ⊓ seyn, denen d. 4. 1.
übrigen ∠ deß △ DGF, welche seynd gemacht
worden ⊓ denen übrigen ∠ deß △ ABC.

Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zweyen Triangeln, ein Winckel eines gleich ist, einem Winckel deß andern, und zwo Seiten, so umb andere zwey Winckeln stehen, gegen einander geproportionirt seyn, die übrige zwey Winckeln aber entweder ein jeder zugleich kleiner, oder ein jeder zugleich gröſſer seint, als ein rechter: so werden die zwey Triangeln gleichwincklicht seyn, und die jene Winckeln, umb welche die proportionirte Seiten stehen, einander gleich haben.

Es seynd gegeben die zwey △ ABC, und DEF, deren ein ∠ a ⊓ ist, dem andern g, und die zwo Seiten BA. AC umb den ∠ f + e geproportionirt seynd, denen zwo Seiten ED. DF umb den ∠ i; die übrige zween ∠ d und h aber, ein jeder zugleich, sonderlich kleiner, oder sonderlich gröſſer ist, als ein rechter. Diesem nach saget man, daß die zwey △ ABC, und DEF einander gleichwincklicht, und die ∠ f + e und i (umb welche die geproportionirte Seiten BA. AC, und ED. DF stehen, letztlich auch die übrige zween ∠ d und h einander gleich seyn werden.

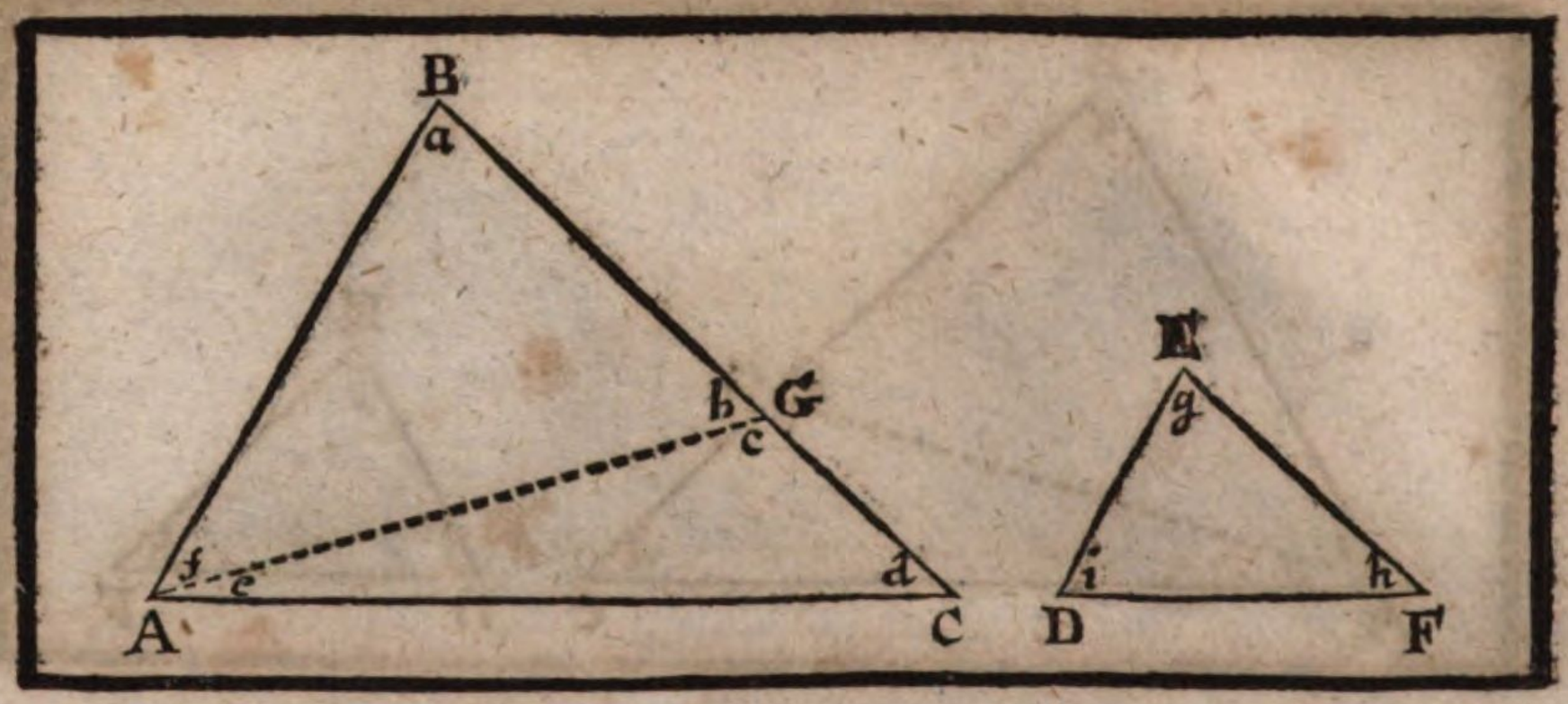
Erster Fall, worinnen die zwey ∠ d, und h beyde spitzig gegeben werden.

Beweiß.

Will man es nicht gestehen, sondern einwerffen, daß, obwohlen beyde ∠ d und h spitzig gegeben worden seint, nichts destoweniger der ∠ f + e doch ⊓, und also ungleich seyn werde dem ∠ i.

So mache dann, wann es möglich ist, mit der Linie AG den ∠ f ⊓, dem ∠ i.

Weilen nunmehro der ∠ a ⊓ ist dem ∠ g. d. d. Vorg.
und der ∠ f ⊓ gemacht worden, dem ∠ i,
nach deß Widersagers Meynung.

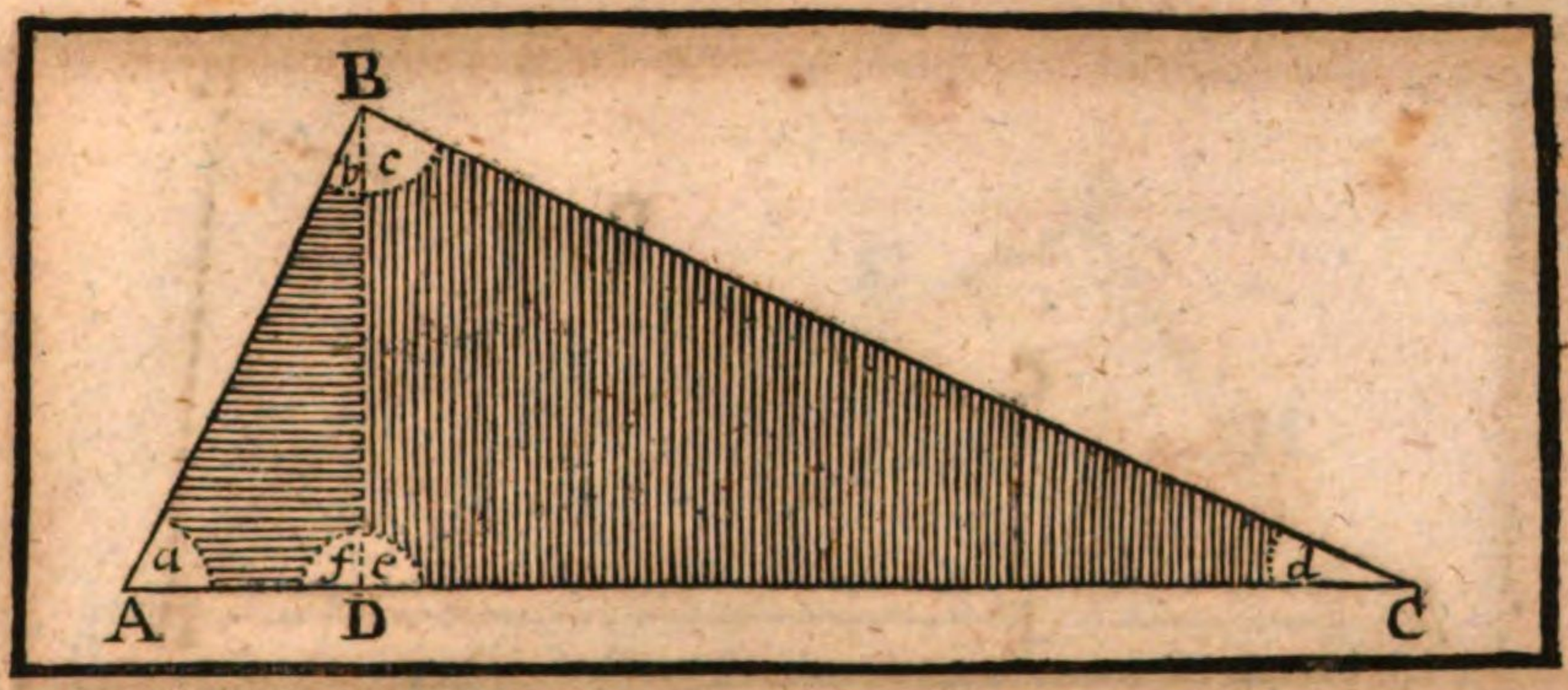


So folget, daß auch der ∠ b ⌐ seye, dem ∠ h. d. 32. 1.
und deßwegen werden beyde △ ABG, und DEF
einander gleichförmig seyn. d. 4. 6.
und sich verhalten BA. AG :: ED. DF. d. 1. def. 6.
Es ware aber anfänglich BA. AC :: ED. DF. d. d. Vorg.
Dahero wird auch seyn BA. AG :: BA. AC. d. 11. 5.
Darauß folget, daß AG ⌐ seye, AC. d. 9. 5.
und deßwegen der ∠ c ⌐ seyn werde, dem ∠ d. d. 5. 1.
Der ∠ d aber, gleich wie der ∠ h, ist ein jeder für einen
spitzigen ∠ angegeben worden.
Dahero auch der ∠ c ein spitziger seyn werde.
und folgends der ∠ b ein stumpffer ∠ seyn muß. d. 13. Cor. 1.
Welches aber ungerimt ist, massen der ∠ b schon spitzig,
und erst ⌐, dem ∠ h ist bewiesen worden. d. d. Vorg.

II.

Wann beyde ∠ d, und h ein jeder stumpff gegeben wird.
So werde eben diese Unförmlichkeit darauß entstehen,
daß nemlich der ∠ c ein stumpffer, und der ∠ b ein spitziger
seyn werde, indeme doch der ∠ b auch ein stumpffer
nach Meinung deß Widersagers hätte seyn müssen.
Dahero man letztlich schliesset, daß gestalt dieser Sachen nothwendig
der △ ABC gleichwincklicht seye, dem △ DEF; und also die
übrige ∠ f + e und d ⌐ habe, denen übrigen ∠ i. und h,

Welches zu beweisen ware.



Die VIII. Vorgab. Betrachtung.

Wann auß einem Winckel eines rechtwincklichten Triangels eine bleyrechte Linie auff die Basis herunter gelassen wird: so machet solche zween andere winckelrechte Triangeln, welche so wohl mit dem gantzen, als unter sich selbsten, einander gleichförmig seyn werden.

Es ist gegeben der △ ABC, der einen rechten ∠ b + c hat, auß welchem die bleyrechte BD auff die Basis AC ist herunter gelassen worden. Diesem nach saget man, daß die zwey gemachte kleine △ ADB, und CDB nicht allein unter sich, sondern auch mit dem gantzen △ ABC, gleichförmig seyn werden.

Beweiß.

Erstlich ist klar, daß die drey ∠ b + c, und f, und e, drey rechte Winckeln seynd, und deßwegen einander gleich. [d. d. Vorg. d. 10. ax. 1.

Nun ist in denen zwey △ ADB, und ABC, der ∠ f ⊓, dem ∠ b + c, und der ∠ a beyden △ gemein:

Dahero wird auch der dritte ∠ b ⊓ seyn, dem dritten ∠ d. d. 32. 1.
und deßwegen der △ ADB gleichförmig seyn dem △ ABC. d. 4. 6.

Abermahlen ist in denen zwey △ BDC, und ABC, der ∠ c ⊓, dem ∠ b + c und der ∠ d beyden △ gemein.

Folget, daß auch der dritte ∠ c ⊓ seye, dem dritten ∠ a. d. 32. 1.
Deßwegen ist auch der △ BDC. gleichförmig dem △ ABC. d. 4. 6.
und folgends seynd alle drey △ ADB. BDC. ABC einander gleichförmig. d. 11. 5.
Welches zu beweisen ware.

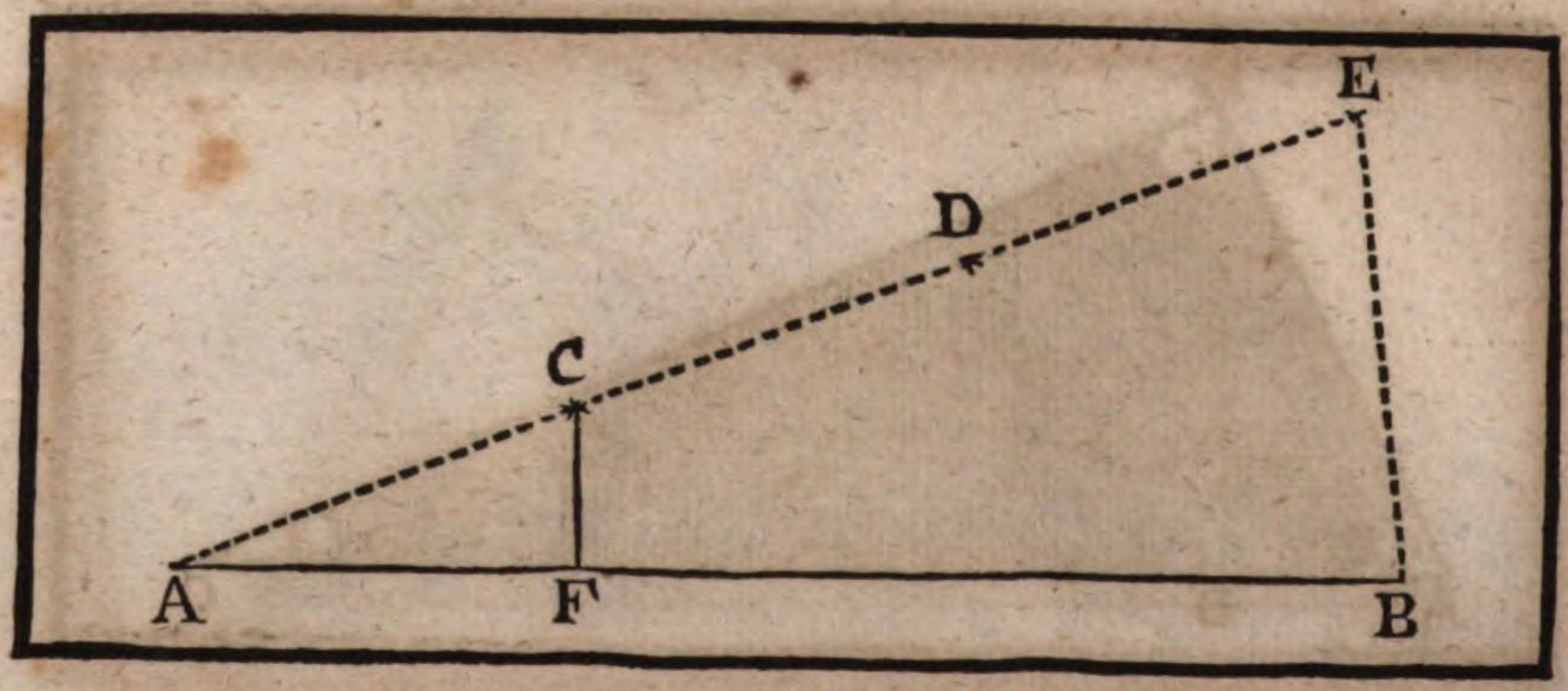
Folge. I.

Daß die ⊥ BD die mittlere Proportional-Linie zwischen denen zweyen Stücken AD, und DC der gantzen Basis AC seye, dann wegen der Gleichförmigkeit deren zwey △ ADB, und BDC wird seyn: AD. DB :: DB. DC. d. 4. 6.

II. Daß eine jede Seiten, welche den rechten ∠ begreiffen, die mittlere Proportional-Linie seye zwischen der gantzen Basis AC, und dem Stück, welches solche Seiten berühret: dann wegen der Gleichförmigkeit deren zwey △ ABC, und ADB wird erstlich seyn

AC. AB :: AB. AD. d. 4. 6.

Hernach wegen der Gleichförmigkeit deren zween △ ABC, und BDC, wird auch seyn AC. BC :: BC. DC. d. 4. 6.



Die IX. Vorgab.

Handgriff.

Von einer vorgegebenen geraden Linie einen gewissen begehrten Theil abzuschneiden.

Es seye gegeben die gerade Linie AB, von welcher man verlanget, zu einem Exempel den dritten Theil darvon.

Handgriff.

Ziehe die gerade Linie AB, welche mit AB einen ∠ nach Gefallen mache.

Nehme nach Gefallen einen Theil, als wie AC, auff der Linie AE so offt, als viel man Theile von AB abzuschneiden verlange; als wie hier verlanget man den dritten Theil.

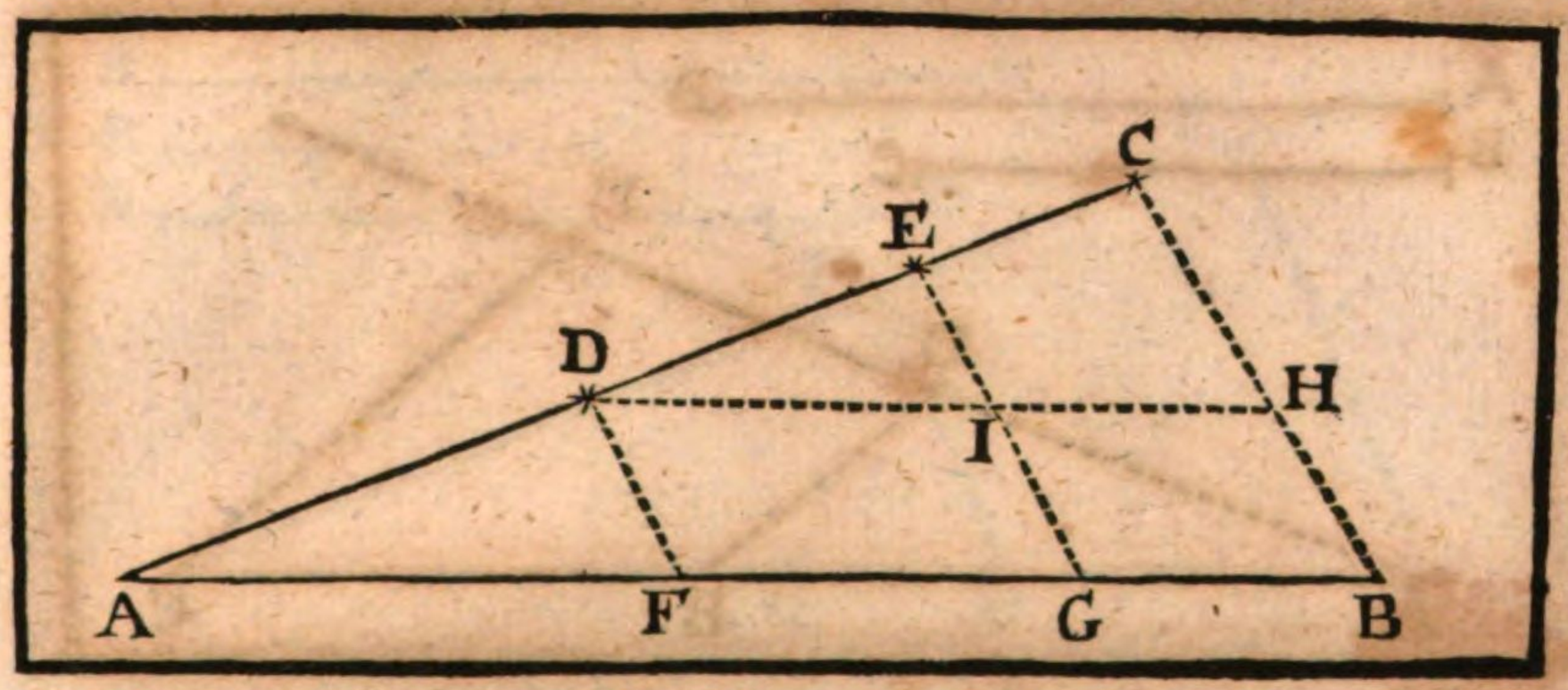
Setze dann den Theil AC in die Linie AE dreymahlen nacheinander in denen Puncten C. D. E.

Hange EB zusammen, und ziehe auß C die Linie CF. d. 31. 1.
Welche = lauffe mit EB.

Nun sage ich, daß das Stück AF auch ein Drittheil von der gantzen Linie AB seye.

Beweiß.

Weilen in dem △ ABE die Linie CF = ist der Linie BE d. d. Hand.
so wird seyn EC. CA :: BF. FA d. 2. 6.
Und durch die Zusammensetzung EA. CA :: BA. FA. d. 18. 5.
Es ist aber AC, ein dritter Theil von der gantzen AE. d. d. Hand.
Folget, daß auch AF ein dritter Theil seye von der gantzen AB.
Welches zu machen ware.



Die X. Vorgab.

Handgriff.

Eine vorgegebene gerade Linie in gleichförmige Stücke abzutheilen, gleich wie eine andere vorgegebene gerade Linie getheilet ist.

Es seynd zwey gerade Linien AC, uud AB gegeben, die erste ist nach Gefallen in drey Stücke zerschnitten worden, nemlich in AD. DE, und EC; hiermit verlanget man die andere Linie AB eben in drey Stücke zu schneiden, welche aber gleichförmig, das ist, geproportionirt denen drey Stücken der Linie AC seyn solten, nemlich AF. FG :: AD. DE, und FG. GB :: DE. EC.

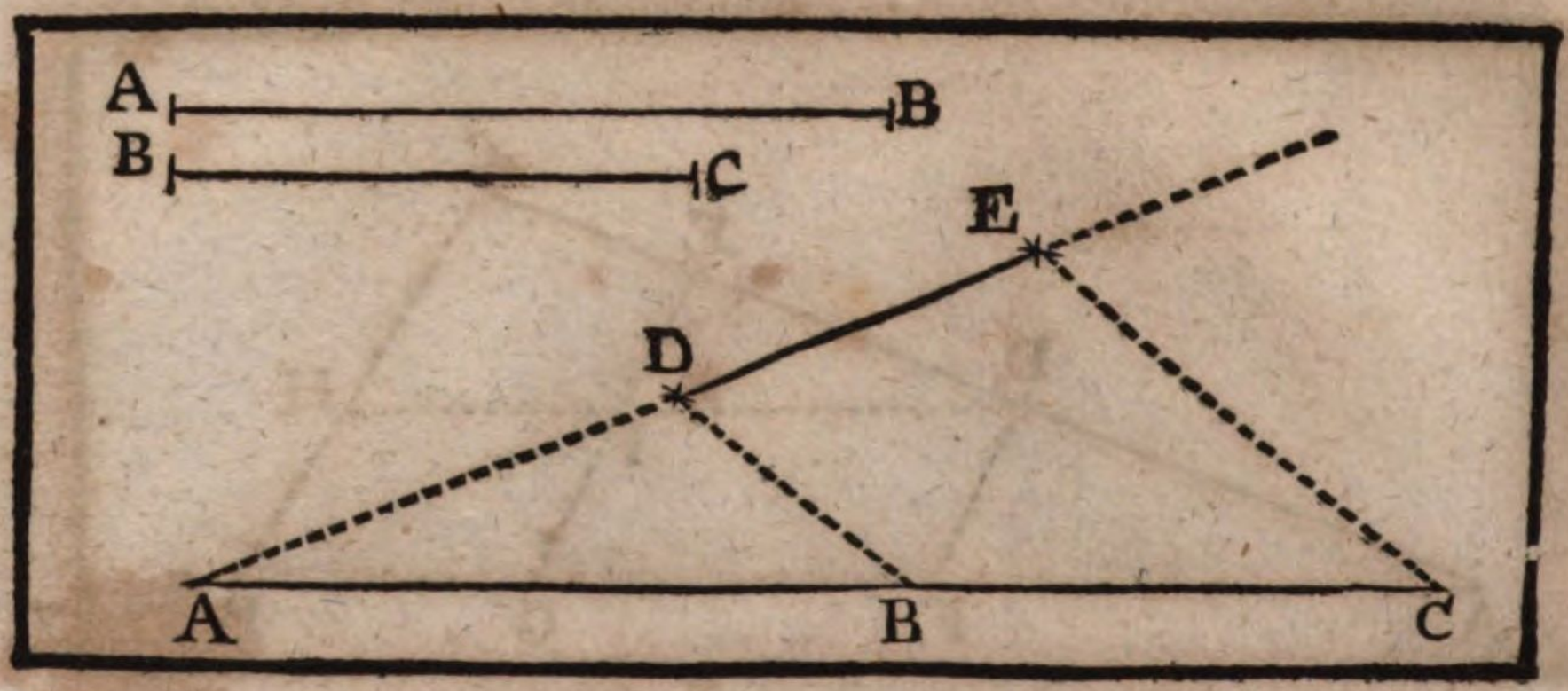
Handgriff.

Laine die Linie AC auff AB, damit sie ungefähr mit ihrem Ende einen ∠ mache.
Hange CB zusammen; und auß denen Puncten E, und D ziehe
die Linien EG, und DF ═, der Linie BC. d. 31. 1.
Letztlich ziehe auß D die Linie DH ═, der Linie AB,
Welche die ═ EG, und BC in denen Puncten I und H
durchschneidet, und verursachet, daß die Figuren FI, und
GH ▭ seynd. {d. 33. 1. und 35. def. 1.

Beweiß.

In dem △ AGE ist die Linie DF ═, der Linie GE. d. d. Hand.
Dahero werde seyn AF, FG : : AD. DE. d. 2. 6.
das ist, die Theile AF. FG seynd proportionirlich denen Theilen
AD. DE.
Ferner, weilen in dem kleinen △ DHC die Linie EI ═ ist, der HC. d. d. Hand.
So wird sich verhalten DI. IH :: DE. EC d 2. 6.
Unterdessen seynd die Figuren FI, und GH ▭, und DI, IH ⌐ {d. d. Hand.
denen FG GB {und 33. 1.
Dahero wird auch seyn FG. GB :: DE. EC. d. 7. 5.

Welches zu machen ware.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

Zu zweyen vorgegebenen geraden Linien die dritte Proportional-Linie zu finden.

Es seynd gegeben die zwey Linien AB. BC, zu welchen man die dritte Proportional-Linie zu haben verlanget; das ist, es solte seyn AB. BC:: BC, zu der gefundenen, nemlich DE.

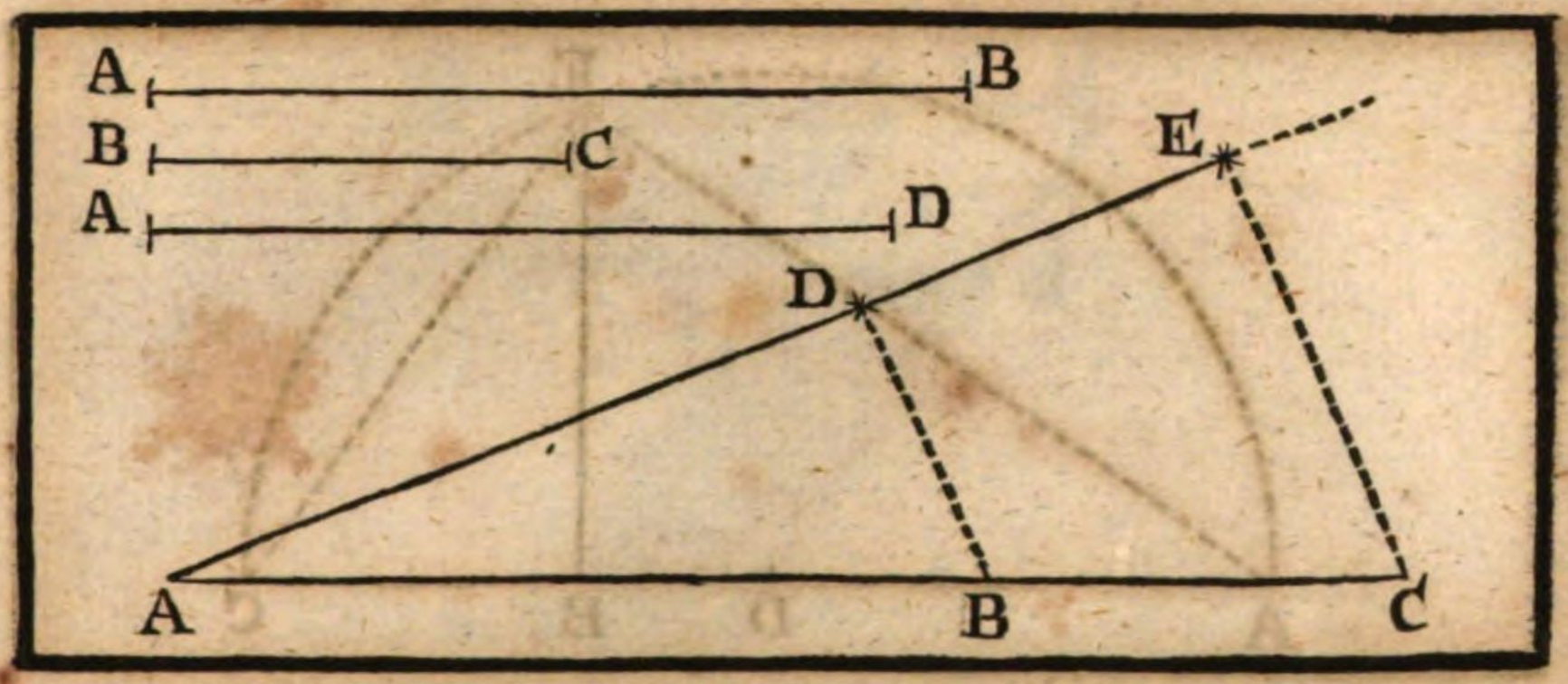
Handgriff.

Mache nach Gefallen einen ∠, als wie CAE
Auff die Linie AC setze nach einander die gegebene AB. BC.
Auff der Linie AE mache das Stück AD □, der Linie BC.
Hange D. B zusammen, und ziehe auß C die Linie CF ═ der Linie CD. D. 31. 1.
So wird das Stück DE die gesuchte dritte Proportional-Linie seyn.

Beweiß.

In dem △ CAE ist DB ═, EC. D. d. Hand.
Dahero wird seyn AB. BC:: AD. DE. D. 2. 6.
Es ist aber AD □ gemacht worden, der BC. D. d. Hand.
folget, daß auch seye AB. BC:: BC. DE.

Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

Zu drey vorgegebenen geraden Linien, die vierte Proportional-Linie zu finden.

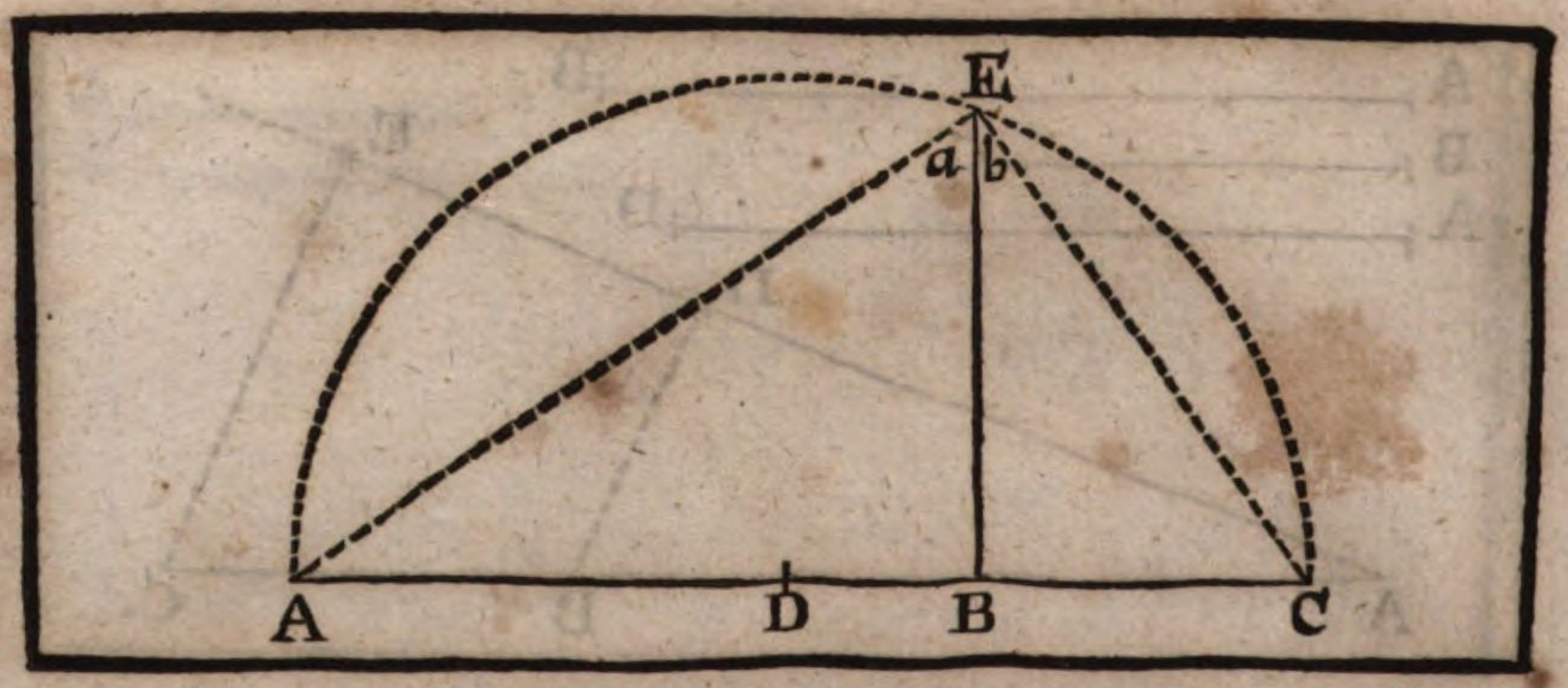
Es seynd gegeben die drey Linien AB. BC, und AD, zu welchen man die vierte Proportional-Linie zu haben verlanget, daß es nemlich seye AB. BC:: AD zu der gefundenen vierten DE.

Handgriff.

Mache nach Gefallen einen ∠, als wie CAE.
Auff die Linie AC setze an einander die Linien AB. BC.
Und auff die Linie AE, die dritte Linie AD.
Hange DB zusammen, und auß C ziehe CE ═, BD, d. 31. 1.
So wird das Stück DE die vierte Proportional-Linie seyn.

Beweiß.

In dem △ CAE ist DB ═, der Linie CE. d. d. Hand.
Dahero wird sich halten AB. BC:: AD. DE. d. 2. 6.
Das ist, DE ist die vierte Proportional-Linie.
Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Handgriff.

Zwischen zwey geraden Linien eine mittlere Proportional-Linie zu finden.

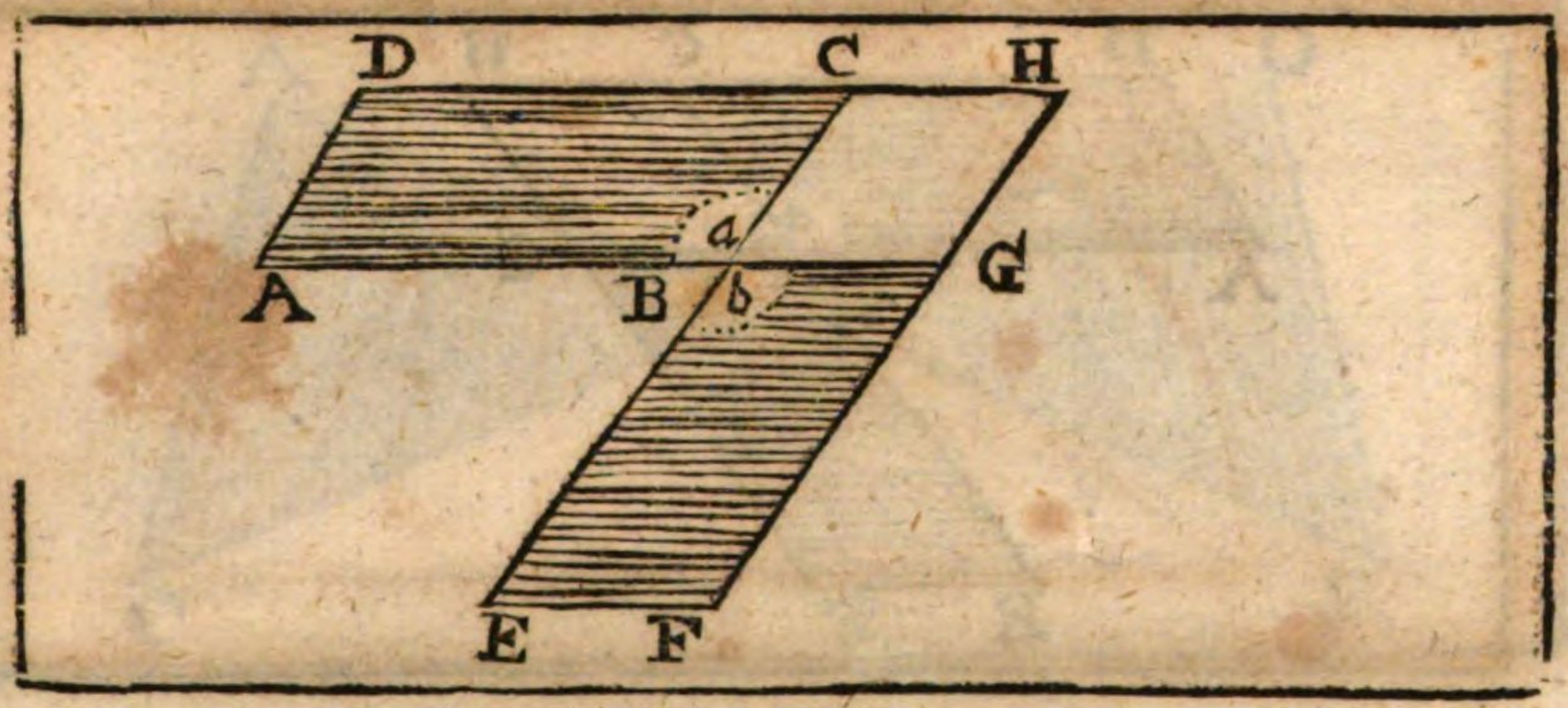
Es seynd gegeben die zwey Linien AB, und BC, zwischen welchen man die mittlere Proportional haben will, nemlich, es solte sich verhalten AB. zu der gefundenen mittlern Proportional-Linie BE. als wie dieselbe gefundene BE. zu BC. das ist AB. BE :: BE. BC.

Handgriff.

Setze AB. BC geradt in einer Linie fort.
Zertheile AC in mitten in D.
Auß D mit der Weite AD schreibe einen halben Zirckel AEC.
Auß dem Punct B erhöhe die ⊥ BE, biß an den Umbkreiß.
Diese Linie BE wird die mittlere Proportional-Linie seyn.
Hange unterdessen A, E, und C, E zusammen.

Beweiß.

Der ∠ a + b ist ein rechter ∠. d. 31. 3.
Dahero wird die ⊥ BE, welche auß dem rechten ∠ a + b in die Basis AC gezogen worden, die mittlere Proportional-Linie seyn, nemlich d. 8. Cor. 1. 6.
AB. BE :: BE. BC.
Welches zu machen ware.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Deren gleich grossen Parallelogrammen, die einen gleichen Winckel haben, seint die Seiten, welche umb die gleichen Winckeln stehen, widerkehrt-geproportionirt: und hinwiederumb die Parallelogrammen, die einen gleichen Winckel, und die Seiten, welche umb die gleichen Winckel stehen, widerkehrt-geproportionirter haben, seynd einander gleich groß.

Es seynd gegeben die zwey ▭, AC, und BF, welche erstlich einen gleich grossen Inhalt, hernach die zwey ∠ a und b einander gleich haben. Diesem nach saget man, daß ihre Seite AB, BC, und EB, BG, so umb die gleiche ∠ a und b stehen, widerkehrt-geproportionirt haben, das ist, es wird sich verhalten AB. BG :: EB. BC.

Zubereitung.

Setze die zwey ▭, allwo sie die gleichen ∠ a und b haben, solcher gestalt an einander, daß nicht allein die zwo Seiten AB, BG eine gerade Linie, sondern auch die andere zwo Seiten EB, und BC eine andere gerade Linie machen.

Hernach verlängere DC, und FG, biß sie in einen Punct, als wie H, zusammen kommen.

Auß dieser Zubereitung wird ein drittes ▭ BH entstehen, Welches wegen der Parallel-Linien, so wol mit dem ▭ AC, als mit dem ▭ BF einerley Höhe haben werde.

Beweiß.

Das ▭ AC ist ⊓, dem ▭ BF. d. d. Vorg.

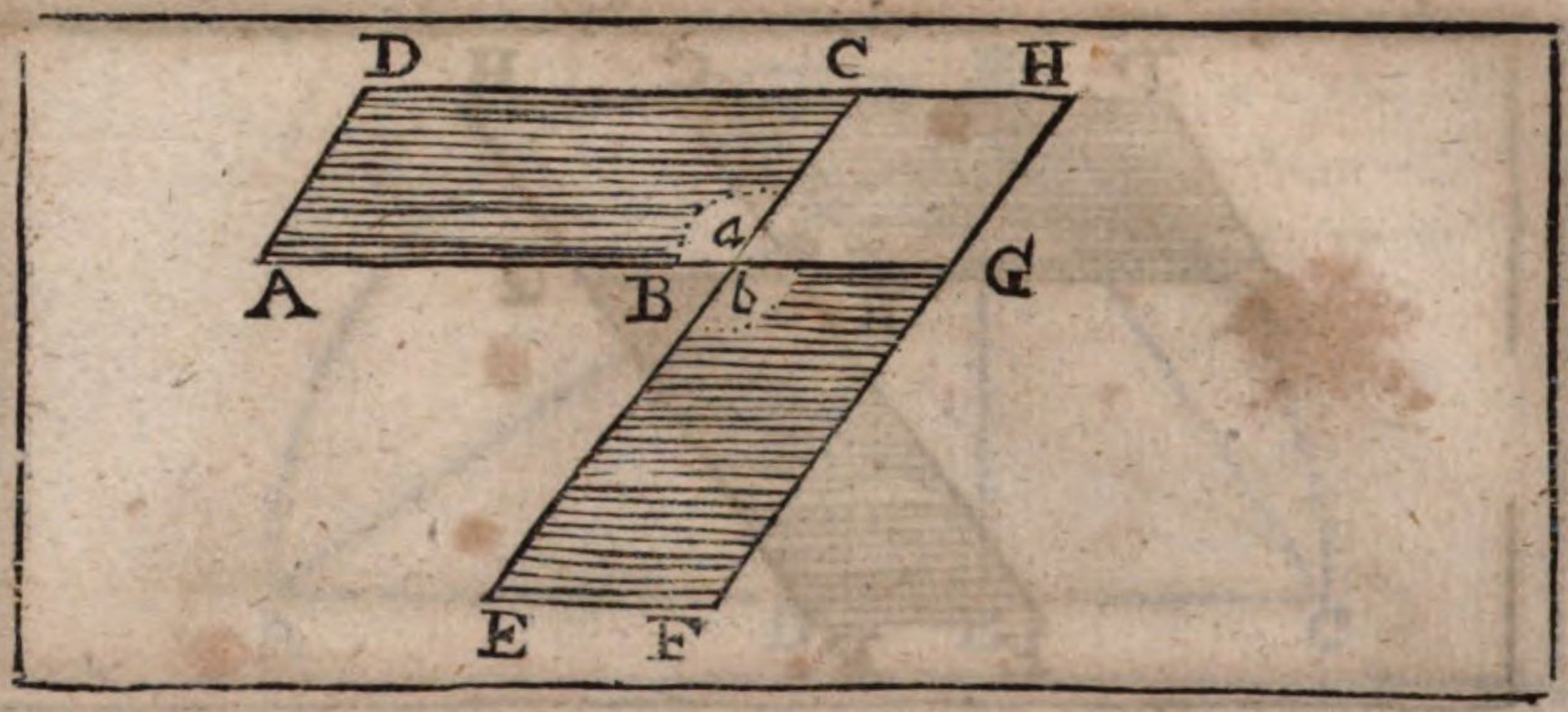
Dahero wird seyn, das ▭ AC. ▭ BH :: ▭ BF. ▭ BH. d. 7. 5.

Es verhaltet sich aber das ▭ AC. ▭ BH : : Basis AB. Basis BG. d. 1. 6.

Und das ▭ BF. ▭ BH :: Basis EB. Basis BC.

Dahero wird letztlich seyn AB. BG :: EB. BC. d. 11. 5.

Welches das erste zu beweisen ware.



II.

Es seynd gegeben die ▭ AC, und BF, welche erstlich die zween ∠ a, und b einander gleich, hernach die Seiten widerkehrt geproportionirter haben, das ist, AB. BG:: EB BC; so saget man, daß diese zwey ▭, von einerley Grösse, oder Inhalt seynd.

Die Zubereitung bleibet, wie oben.

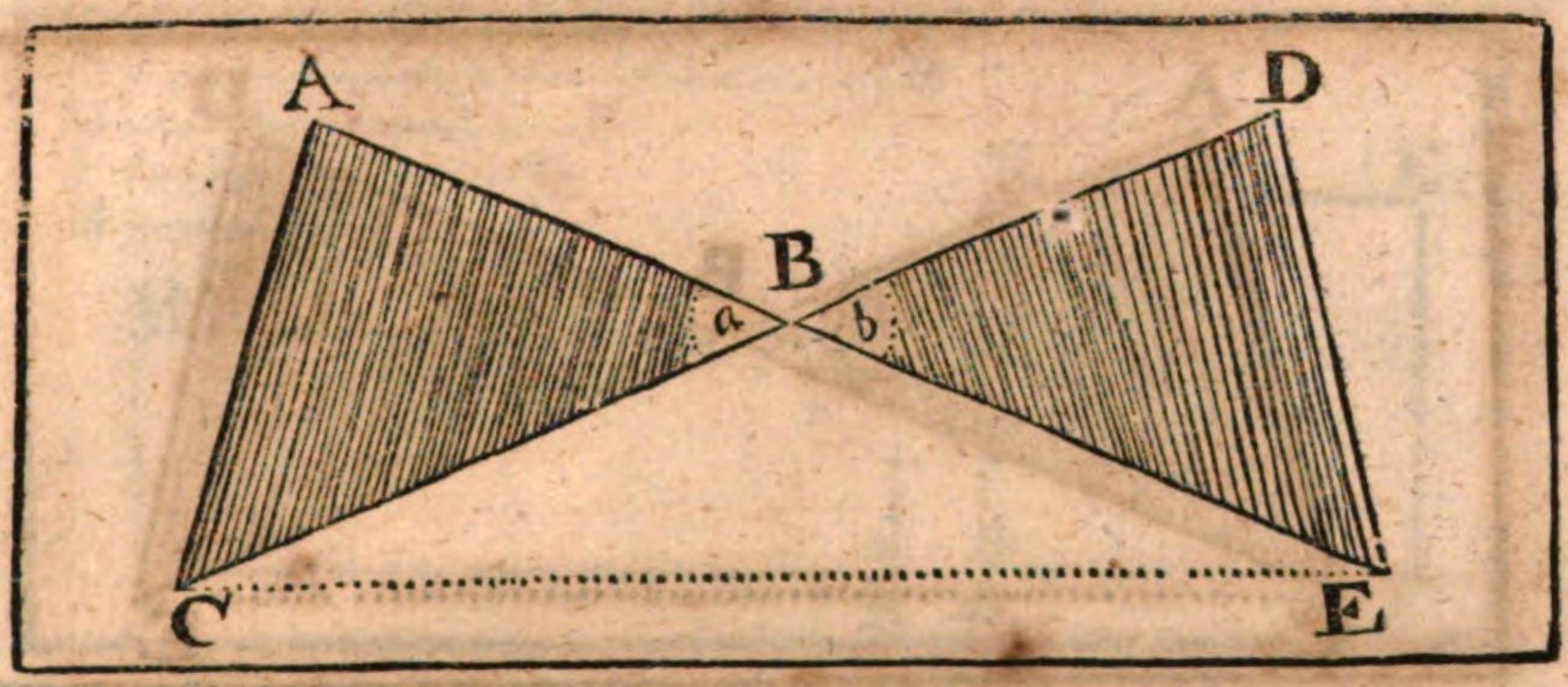
Beweiß.

Wegen einerley Höhe des ▭ BH mit denen zwey ▭ AC. BF.
wird seyn, Basis AB. Basis BG:: ▭ AC. ▭ BH. d. 1. 6.
und Basis EB. Basis BC:: ▭ BF. ▭ BH.

Es ist aber gegeben AB. BG:: EB BC.
Dahero wird auch seyn ▭ AC. ▭ BH:: ▭ BF. ▭ BH. d. 11. 5.

Und deßwegen wird das ▭ AC ▭ seyn, dem ▭ BF. d. 9. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

Deren gleich grossen Triangeln, welche einen gleichen Winckel haben, seint die Seiten, so umb die gleiche Winckeln stehen, wiederkehrt-geproportionirt, und hinwiederumb die Triangeln, welche einen gleichen Winckel, und die Seiten, so umb die gleiche Winckeln stehen, wiederkehrt-geproportionirter haben, seynd einander gleich groß.

Es seynd gegeben die zween △ ABC, und DBE, welche erstlich einen gleich grossen Inhalt, hernach die zween ∠ a, und b einander gleich haben. Diesem nach saget man, daß sie ihre zwey Seiten AB. CB. und DB. EB, welche umb die gleiche ∠ a, und b stehen, wiederkehrt geproportionirt haben, das ist AB. BE :: DB. BC.

Zubereitung.

Setze die zwo Seiten AB. BE, allwo die gleichen ∠ a und b stehen, nach einander in einer geraden Linie ABE fort.

So wird folgends auch CBD eine gerade Linie seyn. d. 14. und 15. 1.

Ziehe hernach C und E zusammen, worauß ein dritter △ CBE entstehet, welcher so wohl mit dem △ ABC einerley Höhe BC, als mit dem △ DBE einerley Höhe BE hat.

Beweiß.

Weilen der △ ABC ⊓ ist, dem △ DBE. d. d. Vorg.

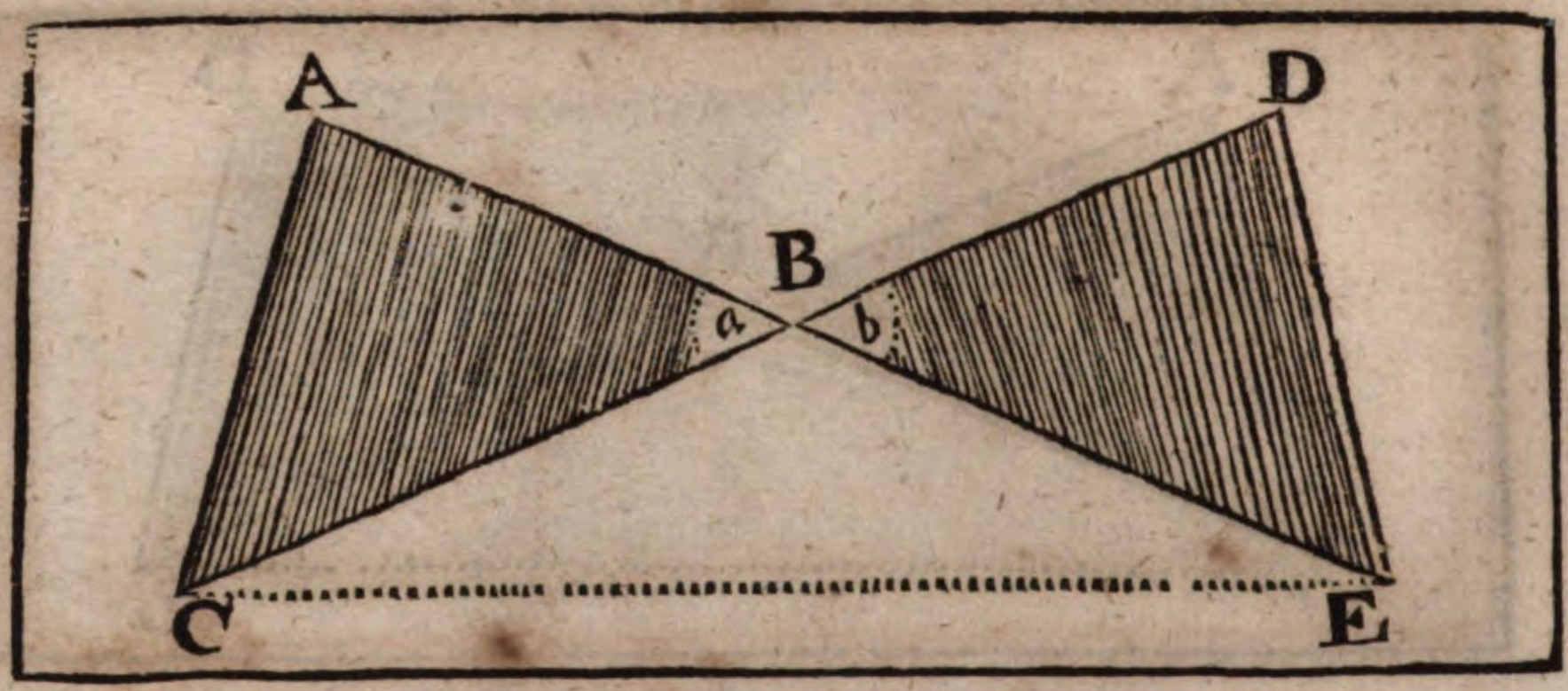
so wird seyn der △ ABC. △ BCE :: △ DBE. △ CBE. d. 7. 5.

Es haltet sich aber der △ ABC. △ CBE :: Basis AB. Basis BE, d. 1. 6.

und der △ DBE. △ CBE :: Basis DB. Basis BC.

Dahero wird auch seyn AB. BE :: DB. BC. d. 11. 5.

Welches das erste zu beweisen ware.



II.

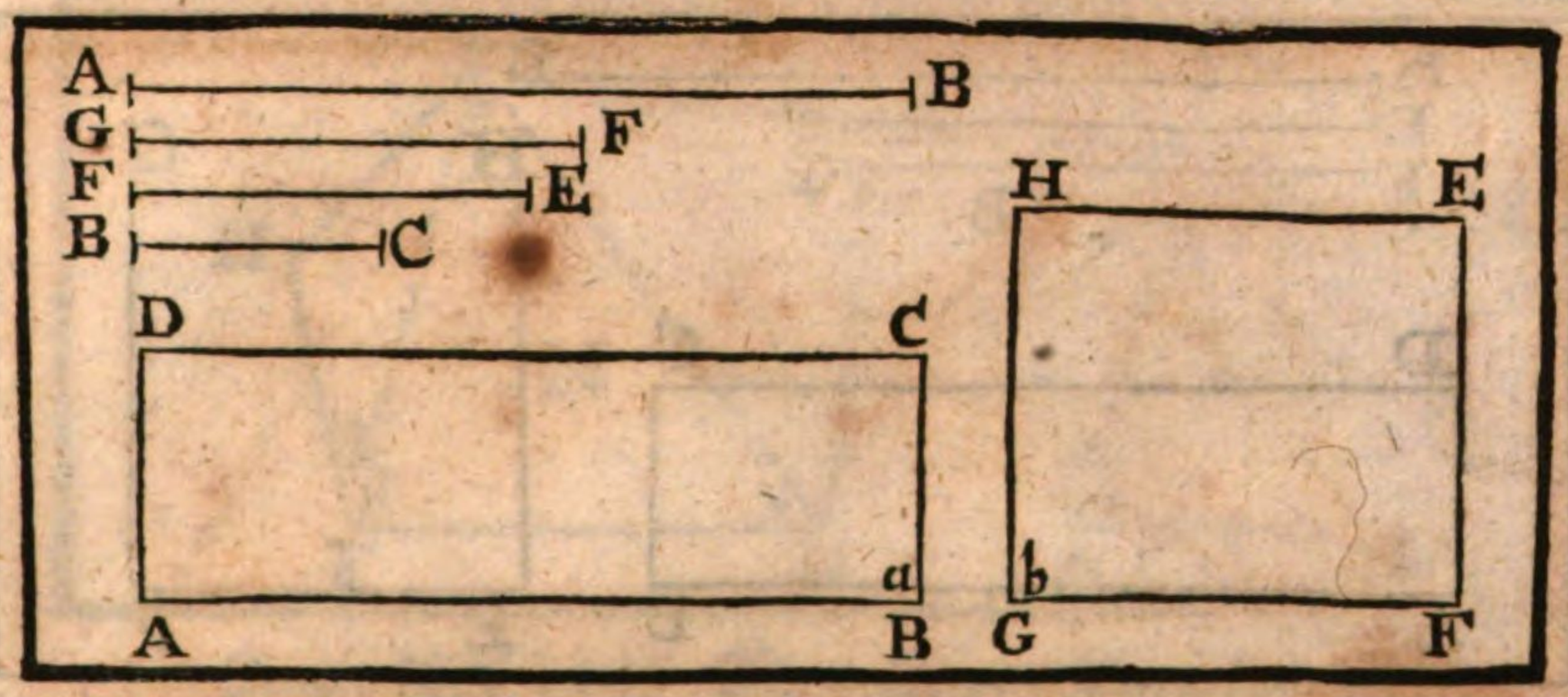
Es seynd gegeben die zween △ ABC, und DBE, welche erstlich die ∠ a, und b einander gleich haben, und hernach die Seiten AB. BC, und DB. BE einander wiederkehrt proportionirlich haben, das ist AB. BE :: DB. BC. Diesem nach saget man, daß der △ ABC ⌐ seye, dem △ DBE.

Die Zubereitung verbleibet wie oben.

Beweiß.

Es ist AB. BE :: △ ABC. △ CBE. d. 1. 6.
und DB. BC :: △ DBE. △ CBE
Durch die Vorgab aber ist AB. BE :: BD. BC
Dahero seyn werde △ ABC. △ CBE :: △ DBE. △ CBE. d. 11. 5.
Und deßwegen wird der △ ABC ⌐ seyn, dem △ DBE. d. 9. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab. Betrachtung.

Wann vier gerade Linien geproportionirt seint: so wird das winckelrechte Parallelogram, welches von denen zwey äussersten Linien ist zusammen gesetzt worden, gleich seyn dem winckelrechten Parallelogram, welches von denen zwey mittlern Linien ist gemacht worden: und hinwiederumb, wann das winckelrechte Parallelogram, so von denen zwey äussersten Linien ist gemacht worden, gleich ist, dem winckelrechten Parallelogram, welches von denen zwo mittlern Linien ist zusammen gesetzt worden: so seynd solche vier Linien geproportionirt.

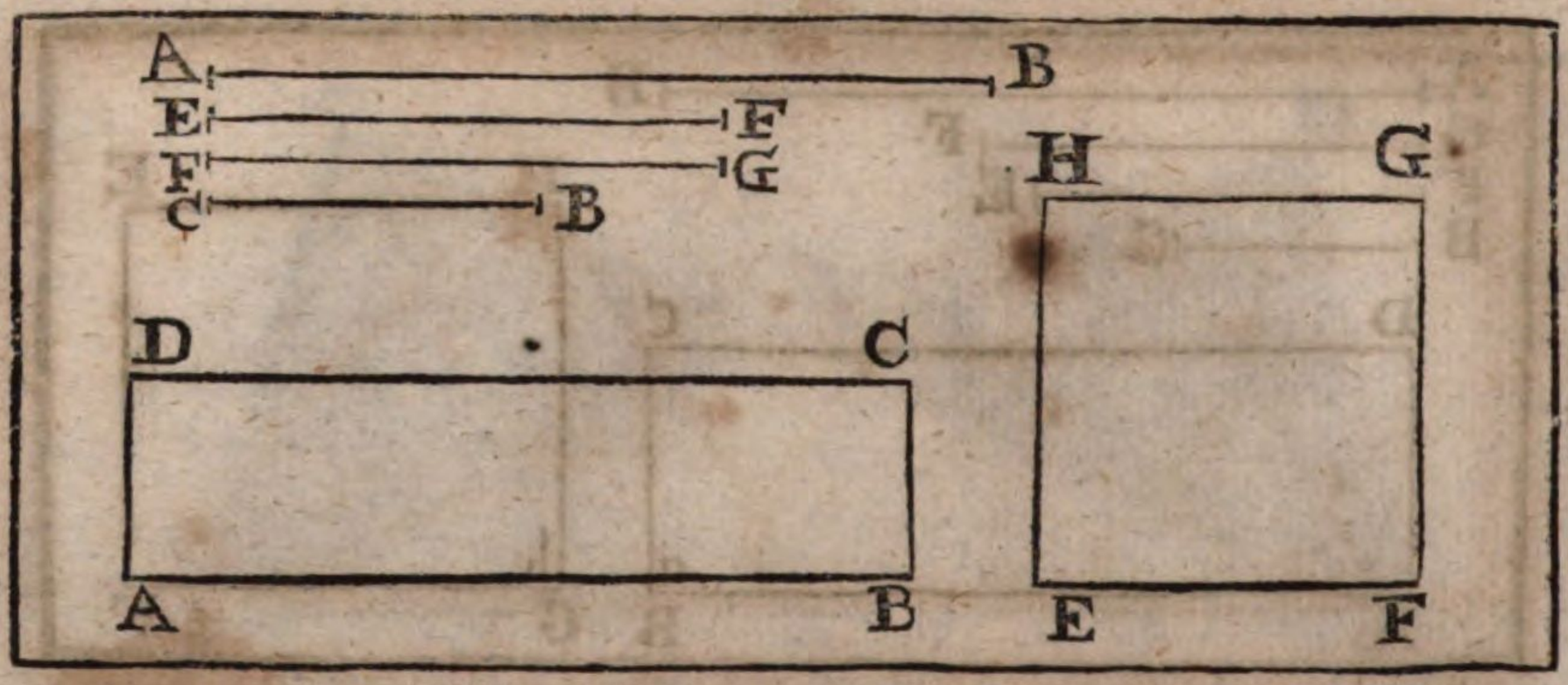
Es seynd gegeben die vier Linien AB. GF. FE. BC einander geproportionirt, nemlich AB. GF :: FE BC. Diesem nach saget man, daß, wann auß der ersten AB, und letzten BC ein winckelrechtes ▭, als wie AC gemacht werde, und auch ein anderes winckelrechtes ▭, als wie GE, auß denen zwo mittlern Linien GF, und FE, solche ▭ hernach einen gleichen Inhalt begreiffen.

Beweiß I.

Der ∠ a im ▭ AC ist ⊓, dem ∠ b im ▭ GE. d. d. Vorg.
und die Seiten verhalten sich auch gegen einander geproportionirt
das ist AB. GF :: FE. BC. d. d. Vorg.
Diß aber ist widerkehrlich geproportionirt. d. 2. def. 6.
Deßwegen wird das ▭ AC ⊓ seyn, dem ▭ GE; d. 14. 6.
Welches das erste zu beweisen ware.

II. Es seynd gegeben die zwey winckelrechte ▭ AC, und GE eines gleichen Inhalts. Diesem nach saget man, daß die vier Seiten, oder die gleiche Linien. AB. GF. FE. BC, auß welchen zwey äussersten das ▭ AC, und auß welchen zwey mittlern, das andere ▭ GE ist gemacht worden, einauder geproportionirt seyn, das ist AB. GF :: FE. BC.

Beweiß. Das ▭ AC ist ⊓ gegeben, dem ▭ GE, d. d. Vorg
und auch der ∠ a ist ⊓, dem ∠ b (nemlich beyde rechte)
Dahero werden die Seiten, welche die gleiche Winckeln d. 14. 6.
a. und b beschliessen, widerkehrt geproportionirt seyn, und stehen
AB. GF :: FE. BC. das ist, die vier Linien AB. GF. FE. BC. seint
einander geproportionirt.
Welches zu beweisen ware.



Die XVII. Vorgab. Betrachtung.

Wann drey gerade Linien geproportionirt seynd: so ist das Winckelrechte Parallelogram, welches von denen zwey äussersten Linien ist zusammen gesetzt werden, gleich dem Quadrat, welches auff der mittlern Linie ist beschrieben worden; und hinwiederumb, wann das winckelrechte Parallelogram, so von denen zwey äussersten Linien gemacht wird, gleich ist, dem Quadrat, welches auf der mitlern Linie ist beschrieben worden: so seynd die drey Linien geproportionirt.

Es seint gegeben die drey geproportionirte Linien, das ist AB. EF :: EF. CB. Wann man nun von denen zwey äussersten AB, und CB, ein winckelrechtes ▭, gleich wie AC machet, und auch ein □ auff der mittlern Linie EF, so saget man diesem nach, daß das □ EG, und das ▭ AC einen gleichen Inhalt haben.

Zubereitung. Nehme die Linie FG ⌐, der Linie EF.

Beweiß. I. Die vier Linien AB. EF. FG. CB. seint geproportionirt — d. d. Vorg. und Zub.
das ist AB. EF :: FG CD.

Dahero wird das winckelrechte ▭ AC ⌐ seyn, dem ▭ EG. — d. 16. 6.
die mittlere Linien EF, und FG seint aber einander ⌐ gemacht:

Darum wird das ▭ EG ein □ seyn.

Und folgends, das ▭ AC ⌐ seyn, dem □ EG.

Welches zum ersten zu beweisen ware.

II. Es seynd gegeben die zwey winckelrechte ▭, nemlich das ▭ AC, und das □ EG, welche gleichen Inhalt begreiffen: Diesem nach saget man, daß ihre Seiten, oder die drey Linien AB. EF. CB, auß welchen zwey äussersten das ▭ AC, uud auß der mitlern das □ EG gemacht worden ist, geproportionirt seint. Das ist, AB, EF :: EF (oder die gleiche FG), CB.

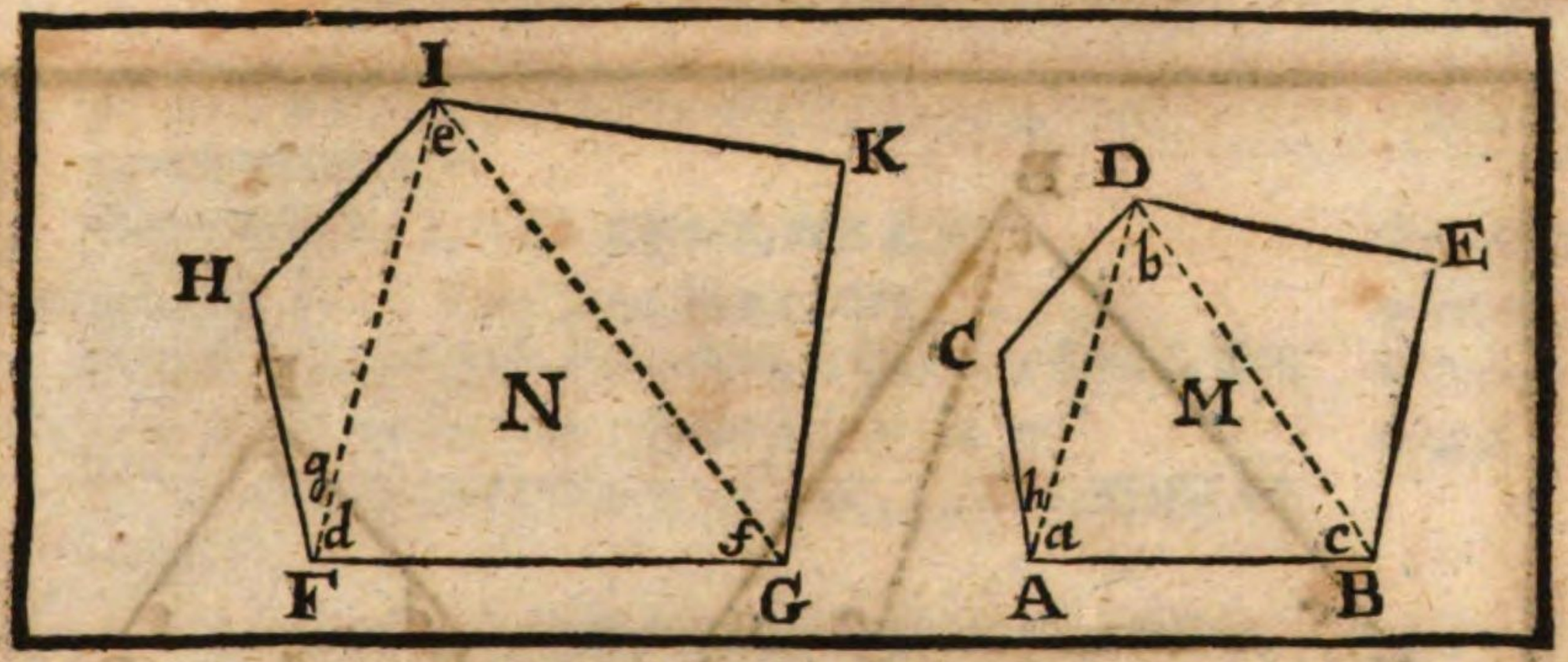
Beweiß. Weilen beyde ▭ AC, und EG rechtwincklicht seynd, — d. d. Vorg.
und das ▭ AC ⌐, dem ▭ EG. — d. d. Vorg.

So werden deßwegen ihre Seiten widerkehrlich geproportionirt seyn, — d. 14. 6.
nemlich AB. EF :: FG. CB.

Es ist aber EF ⌐ der FG (wegen Machung deß □)

Dahero wird auch seyn AB. EF :: EF. CB.

Welches zu beweisen ware.



Die XVIII. Vorgab. Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie eine geradtlinische Figur zu machen, so einer andern vorgegebenen geradtlinischen Figur gleichförmig, und gleicher Weise gestölt seye.

Es ist gegeben die gerade Linie AB, auff welcher man eine Figur, als wie M, gleichförmig, und gleichgestölter der gegebenen Figur N machen solte.

Handgriff. Auß einem ∠ nach Gefallen, in der Figur N, ziehe so viel gerade Linien, als nöthig seynd, in die übrige ∠: als wie hier aus dem ∠ I in die zwey ∠ F und G. so wird die Figur N in die drey △ FHI. FIG. GKI. abgetheilt worden seyn.

Mache auff der Linie AB den ∠ a ⌐, dem ∠ d.
und den ∠ c ⌐, dem ∠ f. d. 23. 1.

Unterdessen werden die fortgezogenen Linien AD, und BD nothwendig in einen Punct, als wie hier in D, zusammen lauffen,
und den ∠ b in dem △ ADB ⌐ machen, dem ∠ e in dem △ FIG. d. 32. 1.
Und folgends wird der △ ADB gleichförmig seyn, dem △ FIG. d. 4. 6.

Hernach mache auff eben diese Weise auff der Linie AD,
den △ ACD gleichwincklicht dem △ FHI.
und auff BD, den △ BED gleichwincklicht dem △ GKI.

So werden beyde △ ACD, und BED auch gleichförmig seyn,
denen zwey △ FHI, und GKI;
Und folgends die gantze Figur M wird hierdurch gleichförmig werden, der gegebenen Figur N.

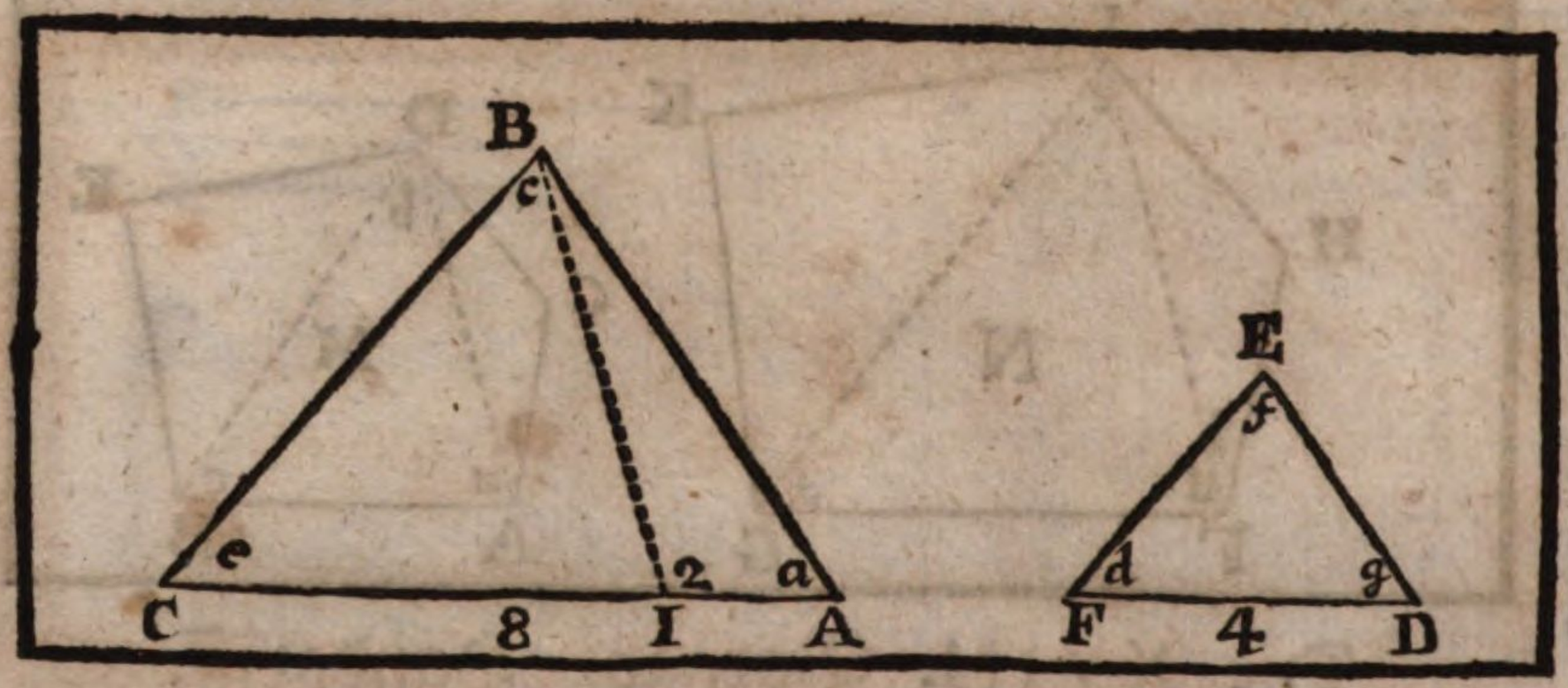
Beweiß. Alle △ der Figur M seint gleichförmig gemacht, und gleich gestölt worden, allen △ der Figur N. Zu einem Exempel, d. d. Hand.
Als wie der △ ADB, ist gleichförmig gemacht worden, dem △ FIG,
und der △ ACD gleichförmig, dem △ FHI. u. s. f.

Dahero wird sich verhalten CA. AD :: HF. FI. d. 4. 6.
und AD. AB :: FI. FG.
und auß einer Gleichheit CA. AB :: HF. FG, d. 22. 6.

Das ist, die Seiten CA und AB umb den ∠ h = a
in der Figur M, seint gleichförmig, denen gleichförmig-haltmussagenden Seiten HF, und FG umb den gleichen ∠ g = d, in der Figur N. d. 1. def. 6

Auff solche Beweiß-Art werden auch die übrige Seiten, und folgends die gantze Figur M gleichförmig und gleichgestölter der Figur N, bewiesen.

Welches zu machen ware.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichförmige Triangeln stehen gegen einander in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß sagenden Seiten.

Es seint gegeben die zwey gleichförmige △ ABC, und DEF. in welchen nemlich ist BA. AC :: ED. DF, und AC. CB :: DF. FE. Letztlich CB. BA :: FE. ED. und der ∠ a ⌐, dem ∠ g. der ∠ c ⌐, dem ∠ f. Letztlich der ∠ d ⌐, dem ∠ e.

Diesem nach saget man, daß sich der △ ABC, zu dem △ DEF in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagender Seiten, zu einem Exempel deren Seiten AC, und DF, verhalte.

Was aber eine zweymahlige Verhaltnuß genandt wird, und seye, ist in der 10. def. deß 5. Buchs schon außgelegt worden.

Wann dahero die Grössen AC, und DF stäts proportionirlich in drey Absätze fortgeführt werden: so wird demnach bewiesen, daß der △ ABC, zu dem △ DEF sich verhalte, gleich wie der erste Absatz zu dem dritten. Seyen zu einer Erleuterung die zwey gleichförmig-haltnuß-sagende Seite, AC von 8. Schuhen, und DF von vier Schuhen lang gegeben. Wann man nun dieselbe in dreyen Absätzen stäts proportionirlich fortführet, so wird es stehen 8. 4. 2.

Nunmehro wird in dieser Vorgab bewiesen, daß sich der △ ABC zu dem △ DEF verhalte, gleich wie 8 zu 2 (oder kürtzer) 4 zu 1.

Zubereitung.

Suche zu denen zwey Linien AC, und DF die dritte proportional-Linie AI, daß es seye AC. DF :: DF. AI. d. 11. 6.

Hange I. B. zusammen.

Beweiß.

Es ist gegeben BA. AC :: ED. DF. d. d. Vorg.

So wird auch durch die Verwexlung seyn BA. ED :: AC, DF. d. 16. 5.

Es ist aber gemacht worden AC. DF :: DF. AI. d. d. Zub.

Dahero wird auch seyn BA. ED :: DF. AI. d. 11. 5.

Das ist, die △ ABI, und DEF haben ihre Seiten widerkehrt-geproportionirter. d. 2. def. 6.

Weilen auch der ∠ a ⊓ gegen ist, dem ∠ g. d. d. Vorg.

So folget, daß der △ ABI ⊓ seye, dem △ DEF. d. 15. 6.

und dahero ein Ding ist, der △ ABC. △ DEF :: △ ABC. △ ABI. d. 7. 5.

Es ist aber der △ ABC. △ ABI :: Basis AC. Basis AI. d. 1. 6.

Deßwegen auch seyn werde der △ ABC. △ DEF :: Basis AC. Basis AI.

Unterdessen stehet AC zu AI in zweymahliger Verhaltnuß derselben, so zwischen der ersten AC, und der anderten DF ist. (dann die drey Linien AC. DF, und AI, seint stäts geproportionirt worden.) d. 10. def. 5. d. d. Zub.

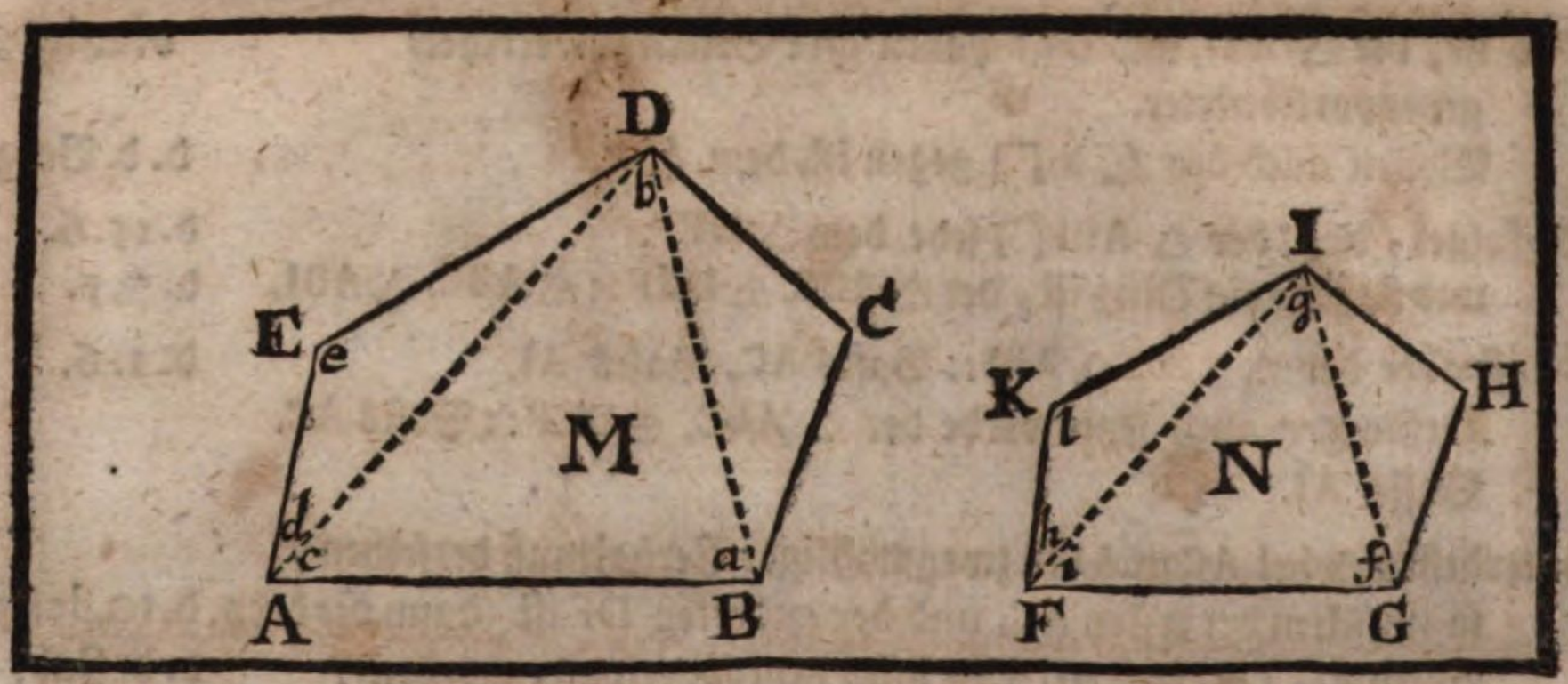
So folget, daß auch der △ ABC zu dem △ DEF in zweymahliger Verhaltnuß, der gleichförmig-haltnuß sagenden Seiten AC. und DF stehe.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

Wann drey gerade Linien stets geproportionirt gegeben werden, als wie AC. DF :: AI; So seye, gleich wie die erste Linie AC sich zu der dritten AI verhalte: also wird sich verhalten ein △ auff der ersten AC, zu dem △, welcher gleichförmig, und gleicher Weise auff der anderten Linie DF ist gemacht worden.

Das ist AC. AI :: △ ABC. △ DEF.



Die XX. Vorgab. Betrachtung.

Gleichförmige Viel-Ecke werden in Triangeln von gleicher Anzahl abgetheilt, welche unter sich gleichförmig, und mit ihren gantzen Figuren geproportionirt seint; so stehen auch gleichförmige Viel-Eck gegen einander in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.

Es seint gegeben die gleichförmige Viel-Ecke M, und N. So sagt man:

1. Daß das Viel-Eck M in so viel △, als das Viel-Eck N hat, kan abgetheilt werden.
2. Daß ein jeder △ deß Viel-Ecks M gleichförmig seye, einem jeden △ in dem Viel-Eck N. zu einem Exempel, daß der △ DEA gleichförmig seye, dem △ IKF, und der △ ADB gleichförmig dem △ FIG, und der △ BCD dem △ GHI.
3. Daß diese △ zu ihren gantzen Figuren geproportionirt seyn, nemlich, daß, wie sich ein △ zu seinen gleichförmigen verhalte, also seye ein Viel-Eck zu dem andern.
4. Daß ein Viel-Eck zu dem andern gleichförmigen, in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten, zu einem Exempel der Seiten AB zu der Seiten FG, stehe.

Beweiß.

Ziehe vorhero auß den en gleichen ∠ D und I in die übrigen ∠, so viel gerade Linien, als da kanst, als wie DA. DB, und IF. IG.

I. Weilen nun die Anzahl deren ∠ in dem Viel-Eck M. ⊓ ist, der Anzahl deren ∠ in dem Viel-Eck N. d. d. Vorg.
So ist klar, daß auch die Anzahl deren △ in beyden Viel-Ecken einander ⊓ seint.

II. In dem △ DEA ist der ∠ e ⊓, dem ∠ l. in dem △ IKF. d. 1. def. 6.
Und die Seiten DE ist zu der Seiten EA, als wie IK. zu KF.

Dahero wird der △ DEA gleichförmig und gleichwincklicht seyn, dem △ IKF. d. 6. 6.

Auff solche Weise ist auch der △ BCD gleichförmig und wincklicht dem △ GHI.

In denen △ ADB; und FIG aber, weilen der ∠ d + c ⊓ ist dem ∠ h + i. d. 1. def. 6.
Wann man nun beyderseits die gleiche ∠ d und h darvon ziehet,
So wird der ∠ c ⊓ verbleiben, dem ∠ i.

Auff solche Weise wird auch der ∠ a ⌐ seyn, dem ∠ f.

Woraus̃ man schliesset, daß auch letztlich die zwey △ ADB, und FIG gleichwincklicht, und folgends auch gleichförmig einander seint. d. 32. Cor. 1. d. 4. 6.

III. Weilen der △ DEA gleichförmig ist, dem △ IKF. d. d. Vorg.
so wird der △ DEA zu dem △ IKF in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seite, nemlich EA zu KF. stehen. d. 19. 6.

Unterdessen ist EA. AB:: KF. FG. d. d. Vorg.
und durch die Verwexlung EA. KF. :: AB. FG. d. 16. 5.

Deßwegen ist die zweymahlige Verhaltnuß EA zu KF, und AB zu GF einerley,
und ist folgends der △ DEA, zu dem △ IKF auch in zweymahliger Verhaltnuß der Seiten AB, zu der Seiten FG.

Auß den vorgehenden ist auch der △ ADB gleichförmig dem △ FIG.
Darumb auch der △ ADB zu dem △ FIG in zweymahliger Verhaltnuß derenselben Seiten AB zu FG seyn werde. d. 19. 6.

Und schließlich wird seyn der △ DEA. △ IKF:: △ ADB. △ FIG.

Auff solche Weise ist erstlich der △ BCD zu dem △ GHI, gleich wie der △ ADB, zu dem △ FIG; oder der △ DEA zu dem △ IKF, auch in zweymahliger Verhaltnuß derer Seiten AB zu FG.

Haben also alle vorgehende △ zu ihren nachgehenden △ einerley Verhaltnuß.
Und deßwegen wird seyn, daß, gleich wie ein △ deß Viel-Ecks M sich zu seinen gleichförmigen △ in dem Viel-Eck N. verhaltet:
also verhalten sich alle △ sammentlich deß einen Viel-Ecks zu allen △ sammentlich des andern Viel-Ecks, das ist, als wie das gantze Viel-Eck M zu dem gantzen Viel-Eck N. d. 12. 5.

IV. Nachdeme bewiesen worden ist, daß sich das eine Viel-Eck M. zu dem andern Viel-Eck N verhalte, gleich wie ein △ deß einen Viel-Ecks, zu dem gleichförmigen △ deß andern.

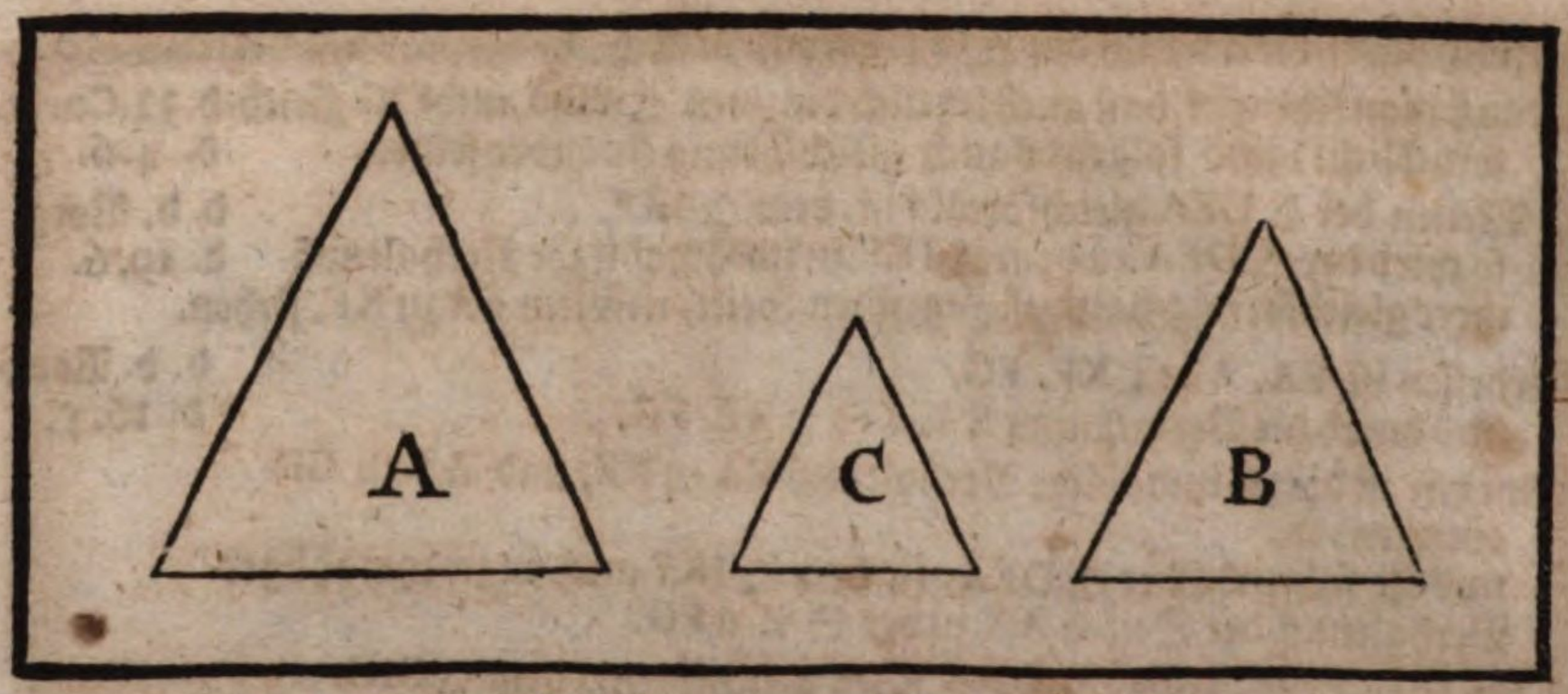
Entzwischen aber ein jeder △ zu seinem gleichförmigen △ in zweymahliger Verhaltnuß der Seiten AB zu der Seiten FG seye, ist bewiesen worden.

So wird endlich geschlossen, daß auch das Viel-Eck M zu dem Viel-Eck N in zweymahliger Verhaltnuß der Seiten AB zu der Seiten FG ist.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

Wann drey gerade Linien stets geproportionirt seint, so wird seyn, gleich wie sich die erste Linie zu der dritten verhalte, also verhalte sich die Figur, welche auff der ersten Linie ist beschrieben worden, zu der Figur, welche gleichförmig und gestalter auff der andern Linie ist gemacht worden.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

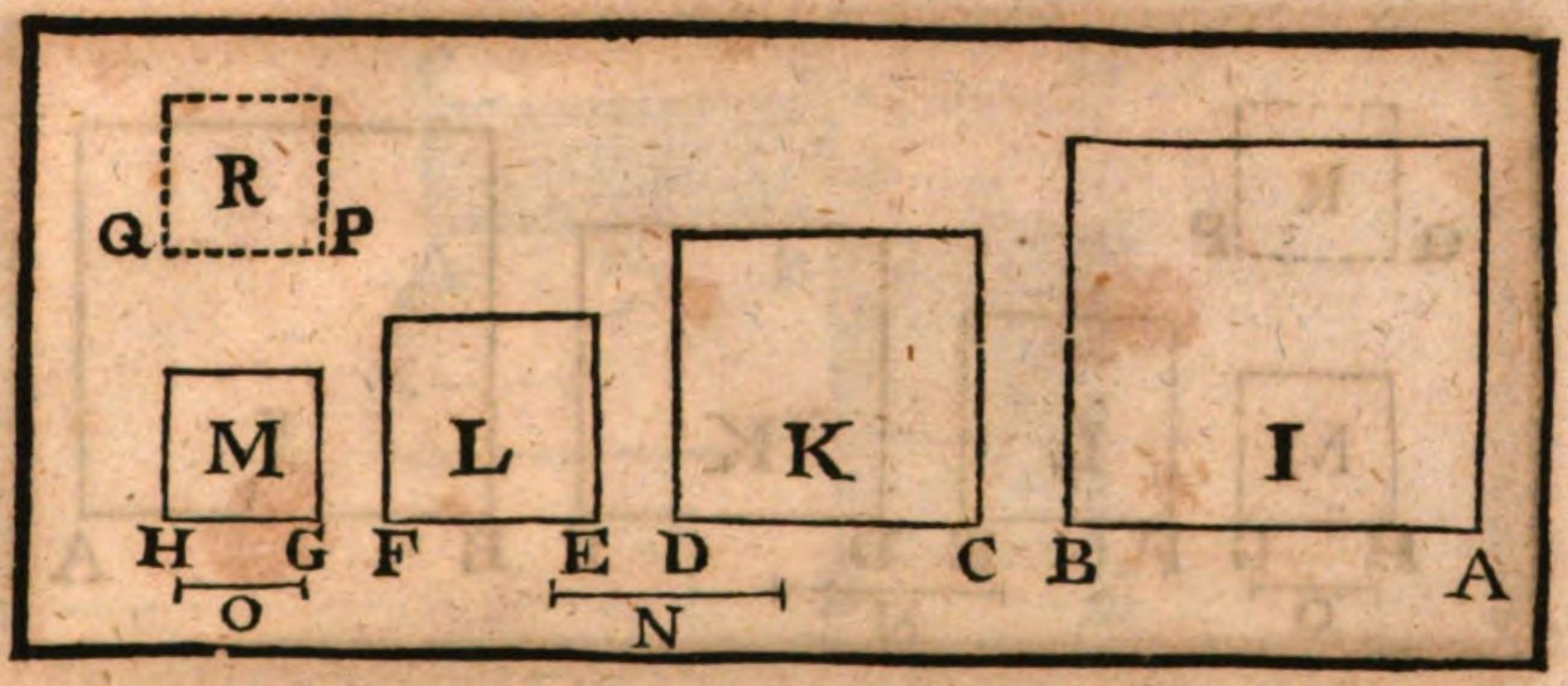
Die geradt-linische Figuren, welche einer andern geradt-linischen Figur gleichförmig seint, die seint auch unter einander gleichförmig.

Es seint gegeben die Figuren A, und B beyde gleichförmig der Figur C.
Diesem nach saget man, daß die Figur A und B auch einander gleichförmig seint.

Beweiß.

Weilen die Figur A gleichförmig ist, der Figur C. d. d. Vorg.
So werden die ∠ der Figur A ☐ seyn, denen ∠ der Figur C. d. 1. def. 6.
Imgleichen, weilen die Figur B gleichförmig ist der Figur C.
So werden die Winckel der Figur B ☐ seyn, denen ∠ der Figur C.
Und folgends die ∠ der Figur A ☐, denen ∠ der Figur B. d. 1. ax. 1.
Ferner indeme die Figur A gleichförmig ist der Figur C.
So werden die Seiten umb denen ∠ der Figur B geproportionirt seyn, denen Seiten umb denen gleichen ∠. der Figur C. d. 1. def. 6.
Auff solche Weise, weilen die Figur B gleichförmig ist, der Figur C.
So werden die Seiten umb denen ∠ der Figur B geproportionirt seyn, denen Seiten umb denen gleichen ∠ der Figur C.
Und folgends die Seiten umb denen ∠ der Figur A geproportionirt, denen Seiten, umb denen Winckeln der Figur B.
Dahero ist die Figur A gleichförmig der Figur B. d. 1. def. 6.
und folgends alle drey Figuren A. B. C. einander gleichförmig. d. 1. ax. 1.

Welches zu beweisen ware.



Die XXII. Vorgab. Betrachtung.

Wann vier Linien geproportionirt seynd, und auff solchen gleichförmige, und gleichgestellte Figuren gemacht werden: So werden auch solche geproportionirt seyn: und wann auff vier Linien gleichförmige geradtlinische Figuren gemacht seint, so werden solche vier Linien geproportionirt seyn.

Es seint gegeben die vier geproportionirte Linien, nemlich AB. CD:: EF. GH. Diesem nach saget man, daß, wann vier gleichförmige, und gleichgestellte Figuren, gleich wie I. K. L. M. darauff gemacht werden, auch solche geproportionirt seyn. I. K :: L. M.

Zubereitung.

Mache AB. CD:: CD. N, und EF. GH:: GH. O.
Daß also seye AB. CD:: EF. GH, und CD. N:: GH. O. } d. 11. 6.
So wird aus dergleichen seyn AB. N:: EF. O. hernach d. 22. 5.

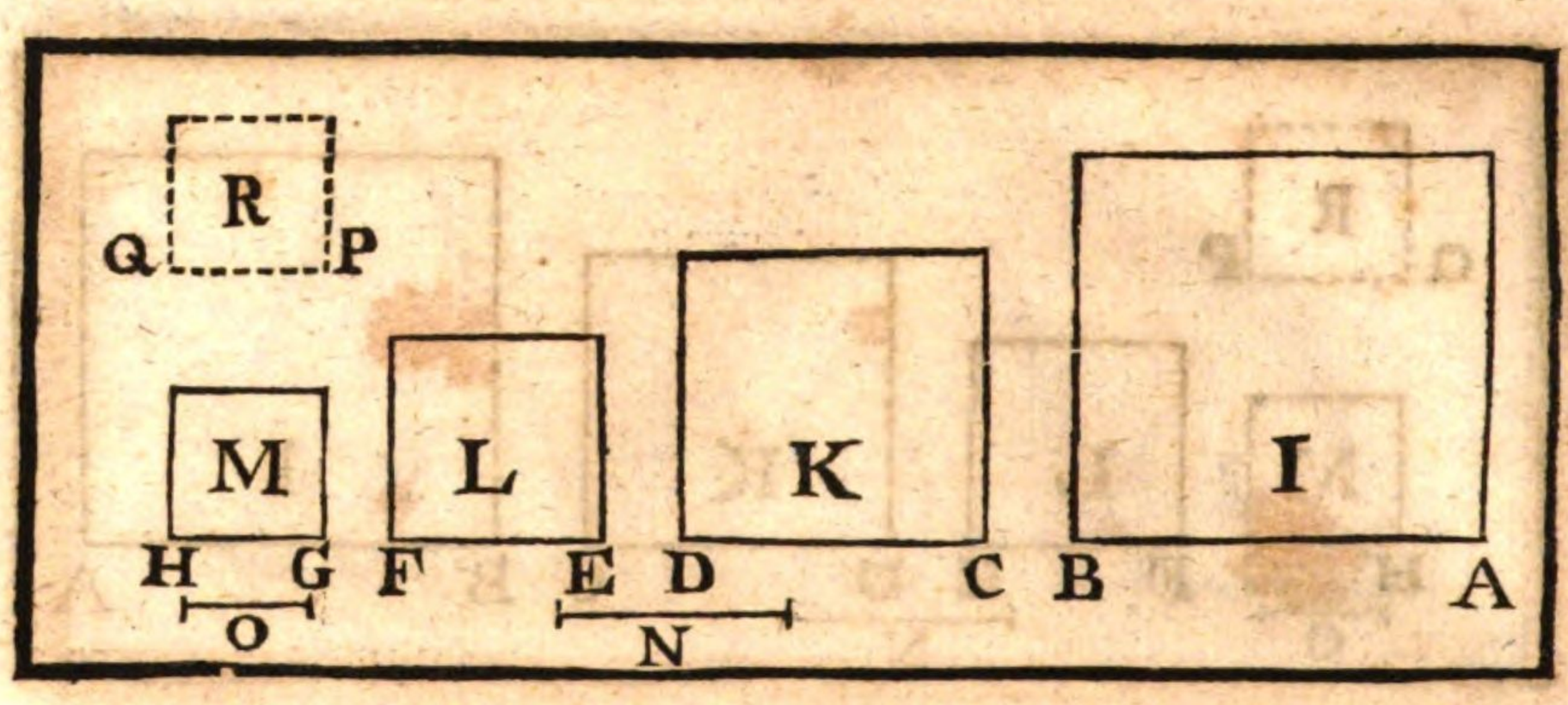
Beweiß.

Weilen gemacht ist AB. CD:: CD. N.
So ist, als wie die erste AB, zu der dritten N:: die Figur I zu der Figur K. d. 20. Cor. 6.
Weilen abermahlen gemacht ist EF. GH:: GH. O.
So ist auch, als wie die erste EF. zu der dritten O :: die Figur L zu der M.

Unterdessen ist AB. N:: EF. O. { d. d. Vorg. und Zub.
Dahero seyn werde die Figur I. K :: L. M. d. 11. 5.
Welches das erste zu beweisen ware.

II.

Wann entgegen auff denen gegebenen geraden Linien AB. CD. EF. und GH, die vier darauff gleichförmig- und gleichgestellte Figuren I. K. L. M. einander geproportionirt seint: so saget man, daß also auch solche vier Linien geproportionirt seynd, nemlich AB. CD:: EF. GH.



Zubereitung.

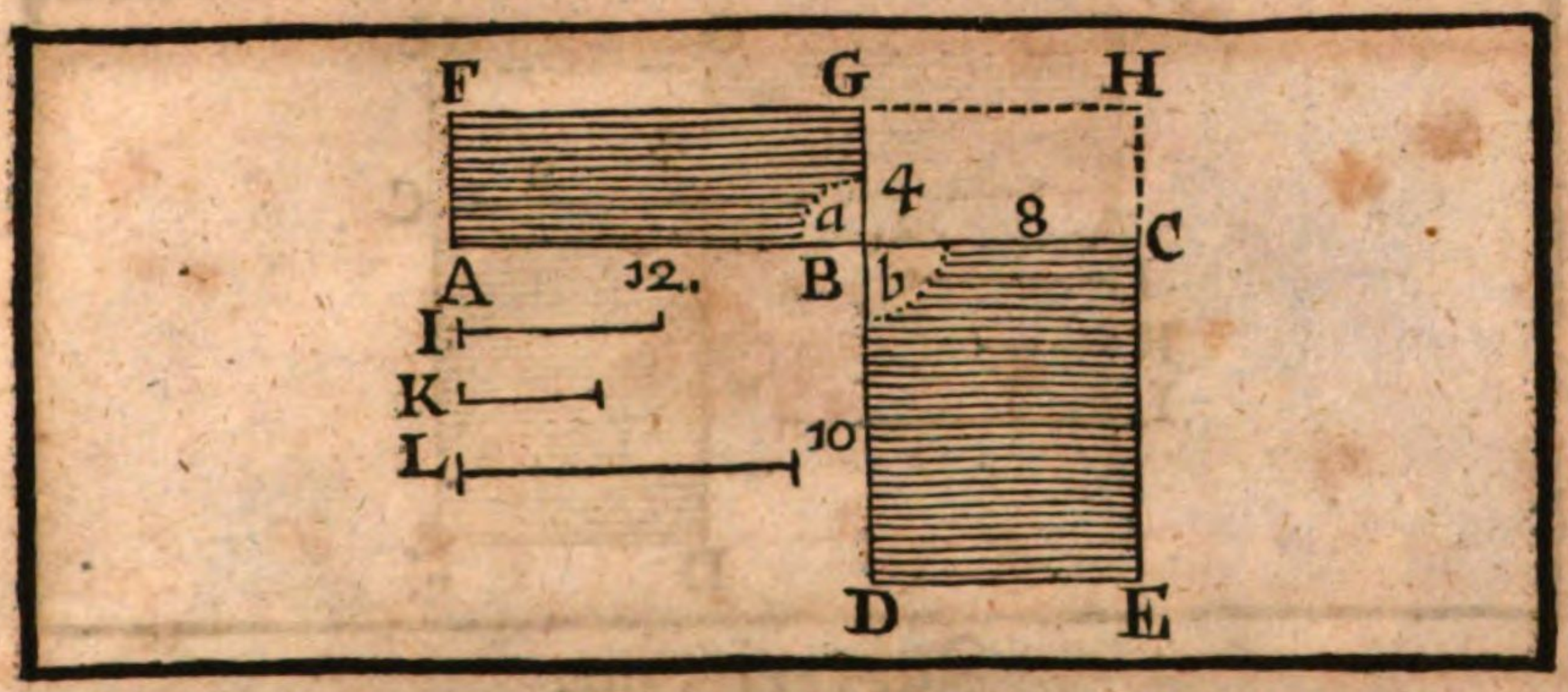
Mache AB. CD :: EF. PQ. d. 12. 6.
Schreibe auff PQ die Figur R gleichförmig, und gleichgestelter der Figur L, welche auch deßwegen der Figur M gleichförmig und gestellter seyn werde. Alsdann d. 21. 6.

Beweiß.

Weilen die vier Linien AB. CD. EF. PQ. geproportionirt seynd:
So wird durch das vorgehende seyn I. K :: L. R.
Es verhalte sich aber I. K :: L. M. d. d. Vorg.
Dahero wird seyn L. R :: L. M. d. 11. 5.
und folgends wird R. □ seyn der M. d. 9. 5.
Wegen der Gleichförmigkeit aber und Gleichstellung deren Figuren R und M werde auch nothwendig die Linie PQ □ seyn müssen, der Linie GH.
und deßwegen seyn FF. PQ :: EF. GH. d. 7. 5.
Unterdessen ist AB. CD :: EF. PQ. d. d. Zub.
Dahero wird auch seyn AB. CD :: EF. GH. d. 11. 5.
Welches zu beweisen ware.

Anmerkung.

Man mag auff denen ersten zwo geproportionirten Linien AB, und CD gantz eine andere Gattung von Figuren, als auff denen zwey letztern geproportionirten Linien EF und GH, stellen; allein ist diß hierinnen zu beobachten, daß die zwey erste Figuren einander gleichförmig und gleichgestellter seynd, gleich wie auch die zwey letztere Figuren einander gleichförmig, und gleichgestellter seyn müssen. Zu einem Exempel, es können auff AB, und CD zwey △, auff denen EF, und GH zwey □ gemacht werden, und so fort: Der Beweiß hernach ist gleich dem Vorgehenden in dieser Vorgab.



Die XXIII. Vorgab. Betrachtung.

Gleichwincklichte Parallelogrammen halten sich gegen einander in zusammengesetzter Verhaltnuß ihrer Seiten.

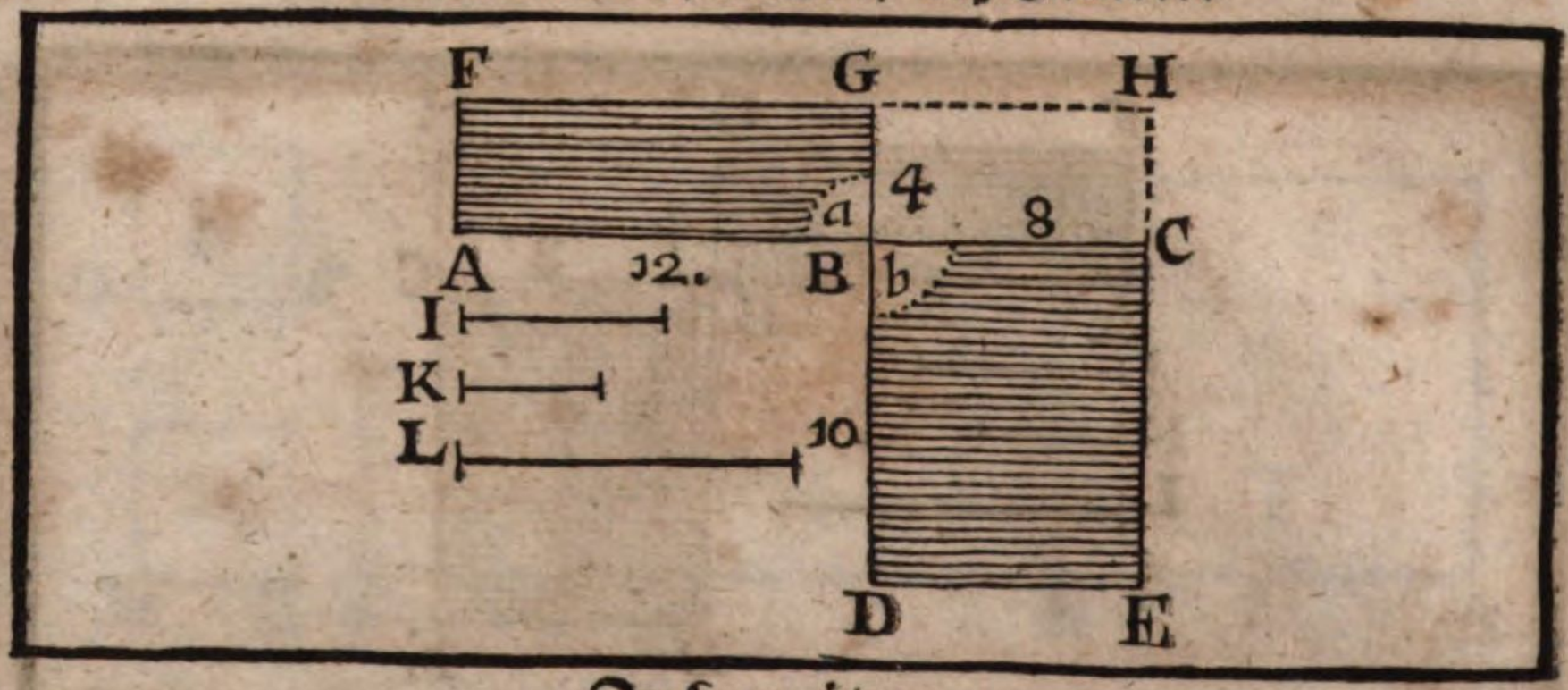
Es seint gegeben die zwey gleichwincklichte ▭ AG, und BE. Diesem nach saget man, daß das ▭ AG, zu dem ▭ BE in zusammengesetzter Verhaltnuß stehe, ihrer Seiten AB zu BC, und BG zu BD, oder AB zu BD, und GB zu BC, welche umb die gleichen ∠ a, und b seint; Mercke hiebey, daß die zwey vorgehende in dem einen, und die zwey nachgehende in dem andern ▭ sich einfinden müssen. Also wird seyn

$$\frac{AB}{BC}\ \frac{GB}{BD} :: \square AG. \square BE.$$
$$\frac{AB}{BD}\ \frac{GB}{BC}$$

Was unterdessen eine zusammengesetzte Verhaltnuß genannt wird, und seye, ist schon in der 5. Wort-Erklärung dieses Buchs ausgelegt worden. Seye demnach zu besserer Verständnuß gegeben, daß erstlich die zwey ▭ rechtwincklicht, und hernach die Seiten AB von 12, und BG von 4; die Seiten BC aber von 8, und BD von 10 Schuhe lang seyen: so ist klar, daß die Grösse der Verhaltnuß, oder der Nenner der Seiten AB 12 zu der Seiten BC 8 ($1\frac{1}{2}$); und BG 4, zu BD 10 ($\frac{2}{5}$) seye.

Wann dann diese zwey Nenner, oder Grössen deren Verhaltnusse $1\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$, einer durch den andern ordentlich vermehret wird, so krieget man letztlich eine neue Grösse, oder Nenner der Verhaltnuß $\frac{3}{5}$, das ist, unten ein- und zwey drittheil übertheilend, welche die zusammengesetzte Verhaltnuß der Seiten ist, und wird demnach seyn, als wie 3 zu 5 :: ▭ AG ▭ BE, nemlich das ▭ AG ist in unten ein- und zwey-drittheil-übertheilender Verhaltnuß gegen dem ▭ BE. Wird Kürtze halber also gedeutet:

$$\frac{AB.}{BC}\ \frac{GB}{BD} :: \square AG. \square BE. \text{ oder so ein Ding } \frac{AB.}{BD}\ \frac{GB}{BC} :: \square AG. \square BE.$$



Zubereitung.

Stosse beyde ▭ AG, und BE solcher gestalt zusammen, daß ABC eine gerade Linie seye, und die gleiche ∠ a, und b gegen einander über zu stehen kommen.

Verlängere FG, und EC, biß sie in einem Punct, als wie in H, zusammen lauffen, und das ▭ BH gestalten.

Hernach, weilen die Seiten AB, zu BC, und GB zu BD nicht stets nacheinander gesetzte Grössen seint: so mache, wie es in der Auslegung über die 5. Wort-Erklärung dieses Buchs ist gelehret worden, daß nemlich andere Grössen an statt deren AB zu BC, und GB zu BD stets nach einander gehendt, welche dieselbe Verhaltnuß haben, gesucht werden. Das ist,

Man nehme nach Gefallen die gerade Linie I. und mache AB zu BC :: I. zu einer andern, nemlich zu K. d. 12. 6.

Abermahlen mache GB. BD :: K. L. nunmehro

Beweiß.

Als wie sich verhaltet AB zu BC :: ▭ AG. ▭ BH. d. 1. 6.
Es ist aber gemacht worden AB. BC :: I. K. d. d. Zub.
Dahero wie sich auch verhaltet I. K :: ▭ AG. ▭ BH.

Wiederumb, als wie ist GB. BD :: ▭ BH. ▭ BE. d. 1. 6.
Es ist auch gemacht worden GB. BD :: K. L. d. d. Zub.
Folget, daß auch seye K. L :: ▭ BH ▭ BE.

Weilen dann ist I. K :: ▭ AG. ▭ BH.
und K. L :: ▭ BH. ▭ BE.

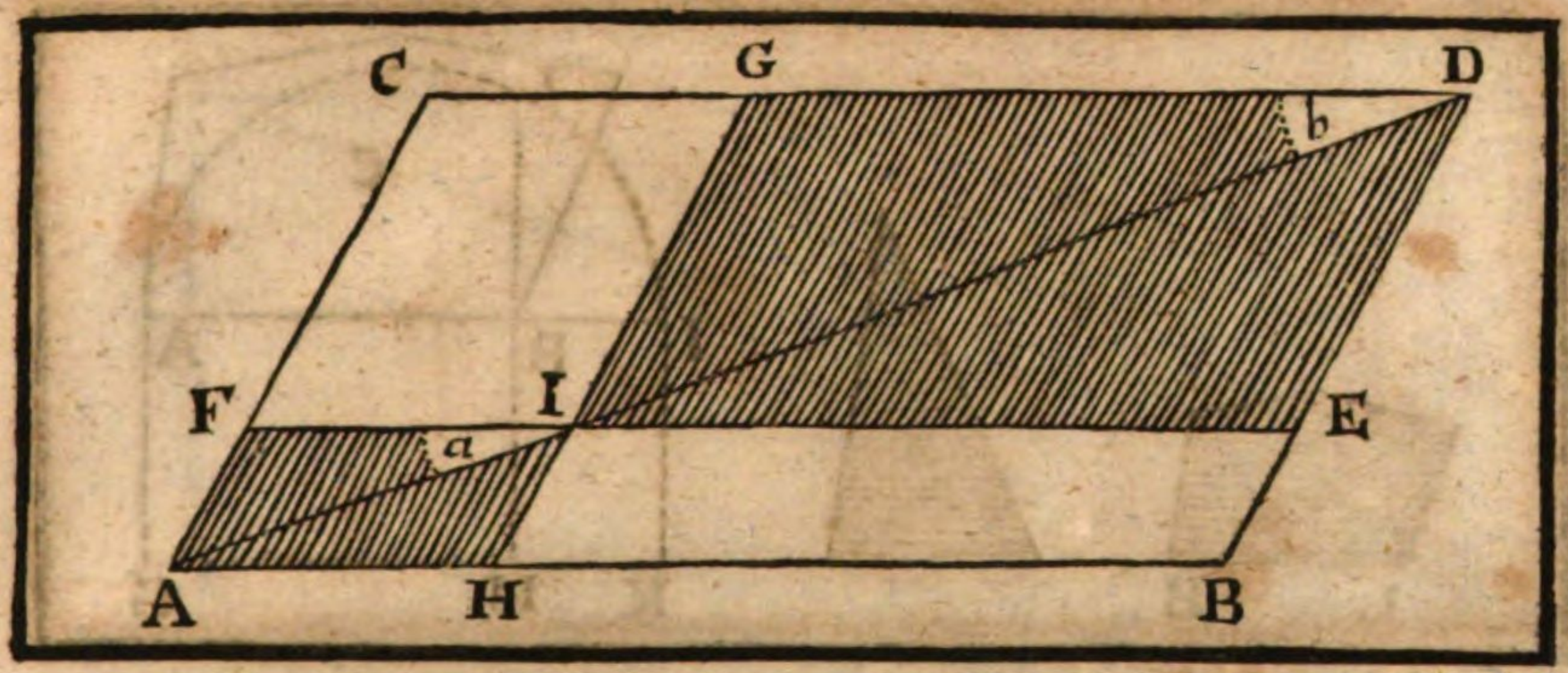
So ist durch die Gleichheit I. L :: ▭ AG. ▭ BE. d. 22. 5.

Unterdessen ist I zu L auß denen Grössen deren Verhaltnussen I zu K, und K zu L, (welche gleichförmig seint denen Verhaltnüssen AB, zu BC, und GB zu BD) zusammen gesetzt. d. d. Zub. u. 5. def. 6.

Folget leztlich, daß auch die Grösse, oder Nenner der Verhaltnuß deß ▭ AG zu dem ▭ BE zusammen gesetzt seye, auß denen Grössen oder Nenner der Verhaltnusse deren Seiten AB zu BC, und GB zu BD. Und dahero seye.

als wie $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{GB}{BD}$ :: ▭ AG. ▭ BE. u. s. f.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIV. Vorgab. Betrachtung.

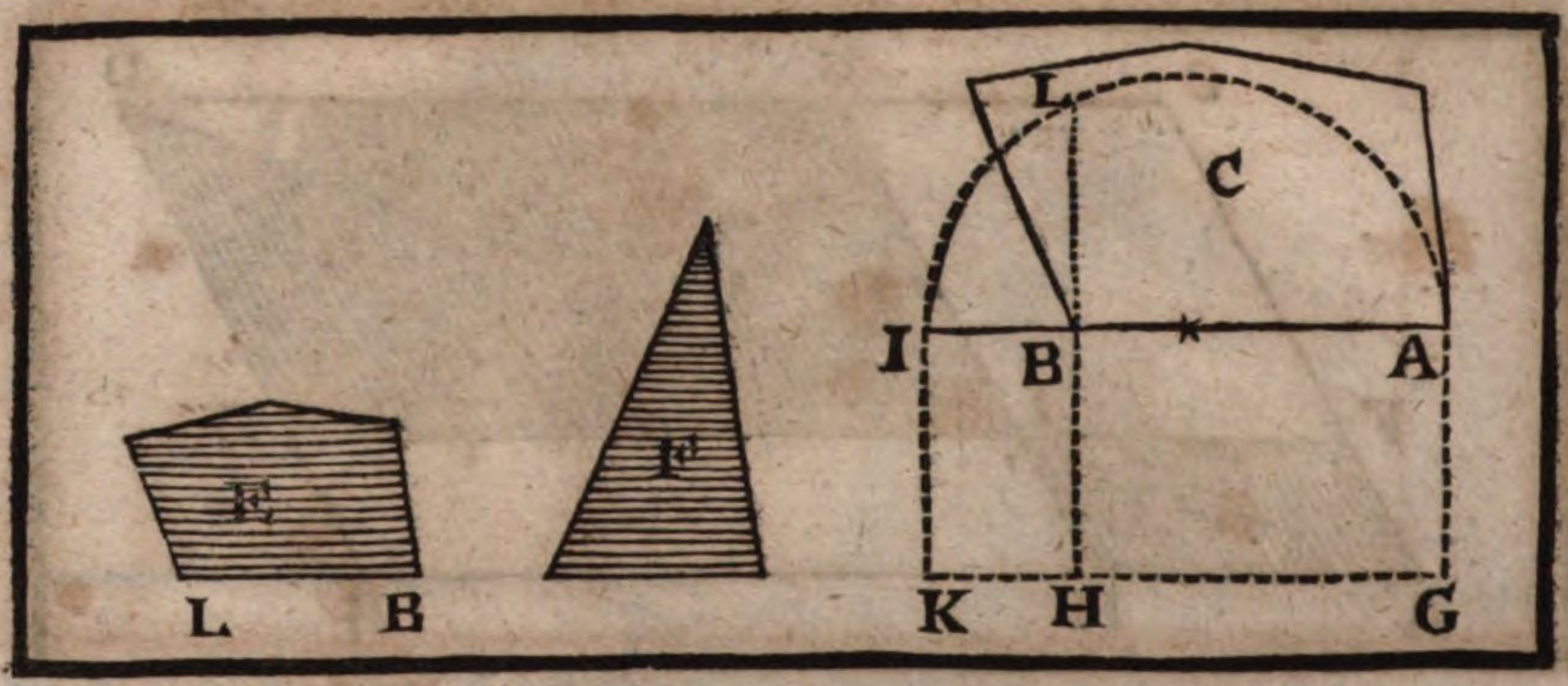
In einem jeden Parallelogram seint die Parallelogrammen, welche umb den Diameter stehen, dem gantzen und auch unter sich selbsten einander gleichförmig.

Es ist gegeben das ▭ ABCD, in welchem der Diameter AD, auß dessen Punct, als wie I, so darauff nach Gefallen genommen ist, seynd die zwey gerade Linien EIF, und GIH ═, denen Seiten AHB, und CFA gezogen, und hierdurch die zwey ▭ AI, und ID, so umb den Diameter AD stehen, gestaltet worden: Diesem nach saget man, daß diese zwey ▭ AI, und ID nicht allein dem gantzen ▭ ABCD, sondern auch unter sich selbst gleichförmig seint.

Beweiß.

Weilen in dem △ CDA, die GI ═ ist, der CA. d. d. Vorg.
so wird seyn DG GC:: DI. IA. d. 2. 6.
Und durch die Zusammensetzung DG + GC. GC:: DI + IA. IA. d. 18. 5.
Und durch die Verwexlung DG + GC DI + IA:: GC. IA. d. 16. 5.
GC ist aber ▭, der IF, wegen der gleichen ═ CF. GI. d. 23. 1.
Dahero wird mit einem Wort seyn DC. DA:: IF. IA. d. 14. ax. 1.
unterdessen ist der ∠ b ▭ dem ∠ a (der äussere, dem innern). d 29. 1.
Folget deßwegen, daß der △ CDA gleichförmig seye, dem △ FIA. { d 6. 6. und 4. 6.
Abermahlen wird es seyn in dem △ CDA wegen der ═ GI. CA.
DG. GC:: DI. IA. d. 2. 6.
Und durch die Verkehrung CG. GD:: AI. ID. d. 4. 5.
und durch die Zusammensetzung CG + GD. GD:: AI + ID. ID. d. 18. 5,
Und durch die Verwexlung CG + GD. AI + ID:: GD. ID. d. 16. 5.
(das ist mit einem Wort DC. DA:: DG. DI.) d. 14. ax. 1.
Unterdessen ist der ∠ b beyden △ CDA, und GDI. gemein.
Dahero seynd beyde △ CDA, und GDI einander, und letzlich alle drey △ CDA. FIA. GDI. unter sich gleichförmig. { d. 6. 6. und 4. 6. d. 11. 5.
Es seint aber die △ CDA. FIA. GDI gerad die Helfften deren ▭ AD. AI. ID. d. 34. 1.
Darumb auch die ▭ AD. AI. ID. einander gleichförmig seyn werden. d. 15. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XXV. Vorgab.

Handgriff.

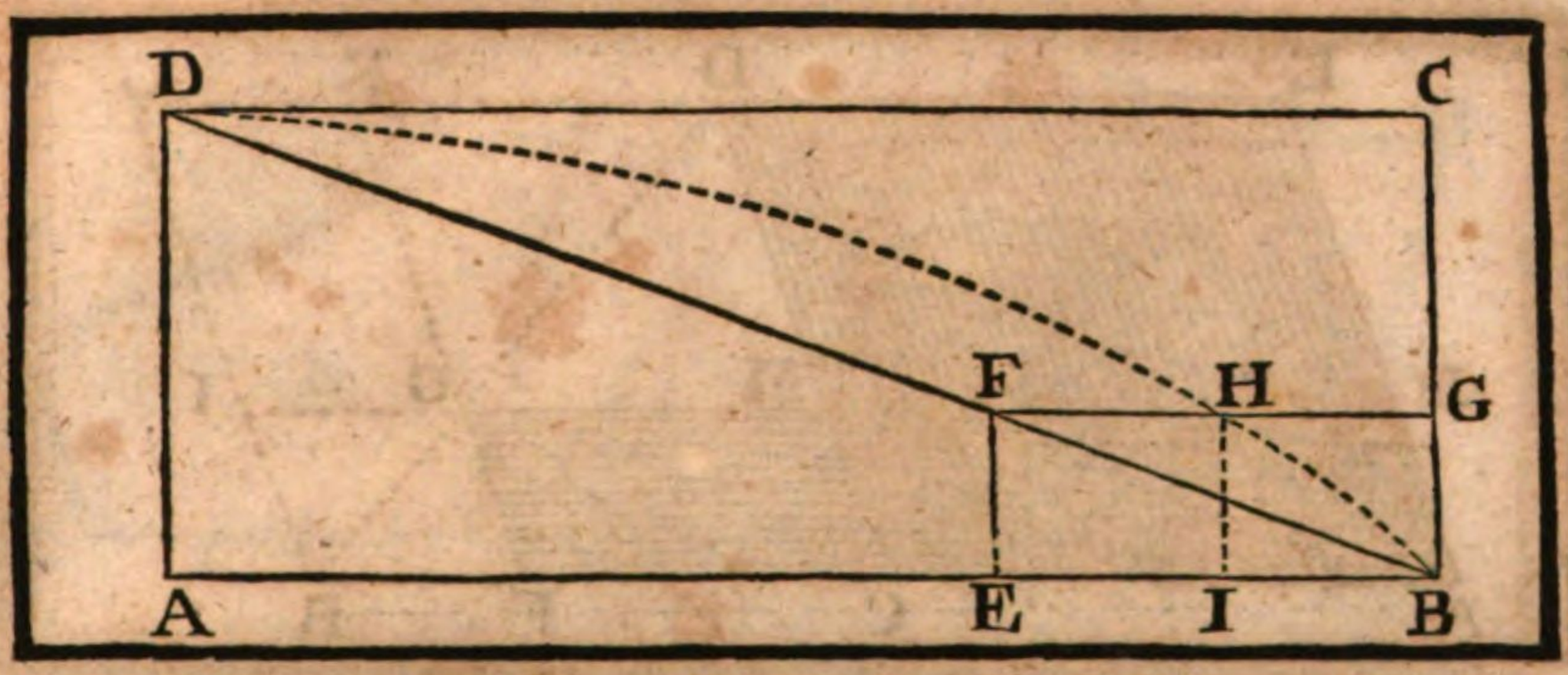
Einer vorgegebenen geradtlinischen Figur (C) eine andere gleichförmige und gleichgestellte Figur (E) zu machen, welche gleich groß seye einer andern vorgegebenen geradtlinischen Figur (F).

Handgriff.

Mache auff einer Seiten, als wie auff AB der Figur C, das ▭ AH ⌐ d. 45. I.
der vorgegebenen Figur C: und an der andern Seiten BH in der geraden d. 44. I.
Linie AB fort, mache das ▭ BK ⌐ der Figur F.
Suche zwischen AB, und BI, die mittlere Proportional-Linie BL. d. 13. 6.
Nehme BL, und mache darauff die Figur E gleichförmig, und d. 18. 6.
gleichgestellter der Figur C, welches das erste ist, so man verlanget; hernach beweiset man, daß auch E und F gleichen Inhalt haben.

Beweiß.

Die Linien AB. BL. BI. seint stets geproportionirt, d. d. Hand.
Dahero wie die erste Linie AB sich zu der dritten BI verhaltet: d. 20. Cor. 6.
Also ist die Figur C auff der ersten Linie, zu der Figur E,
welche auff der anderten BL ist gemacht worden.
Das ist, es werde seyn AB. BI:: C. E.
Es ist aber AB. BI:: ▭ AH (oder die gleichgrosse Figur C) sd. 1. 6.
Zu dem ▭ BK (oder der gleich grossen Figur F.) u. Hand.
Das ist AB. BI:: C. F.
Dahero wird auch seyn C. E:: C. F. d. 11 5.
Und folgends wird die Figur E ⌐ seyn, der Figur F. d. 9. 5.
Welches zu machen ware.



Die XXVI. Vorgab. Betrachtung.

Wann von einem Parallelogram, ein anders gleichförmiges, und gleichgestelltes abgezogen wird, welches einen gemeinen Winckel mit dem ersten hat, so wird ein solches abgezogenes Parallelogram völlig umb den Diameter stehen.

Es ist gegeben, daß man von dem ▭ ABCD das ▭ EG (so ihme gleichförmig, und gleichgestellter ware, und den ∠ EBG mit einander gemein hatten, abgezogen habe: Diesem nach saget man, daß das ▭ EG umb den Diameter deß gantzen ▭ AC stehe, das ist, wann man eine gerade Linie auß D in B ziehe, auch durch den Punct F gehe.

Beweiß.

Wann es nicht geglaubt, sondern vorgebracht wird, daß eine solche Linie durch einen andern, als den Punct F, gehe (so seye, wann es möglich ist daß sie durch den Punct H gehe, gleich wie DHB.

Ziehe darauff die Linie HI ═, der Linie CB: : so wird hierdurch dieses ▭ IG umb den Diameter deß ▭ AC stehen müssen.

Und wegen deß gemeinen Winckels IBG,

das ▭ IG gleichförmig seyn, dem ▭ AC. d. 24. 6.

Das ist, es solte sich verhalten BG. GH :: BC. CD. d. 1. def. 6.

Es verhaltet sich aber BG. GF : : BC. CD.

(dann das ▭ EG ist gleichförmig gemacht worden dem ▭ AC) d. d. Vorg.

Darumb wird sich verhalten müssen BG. GH : : BG. GF. d. 11. 5.

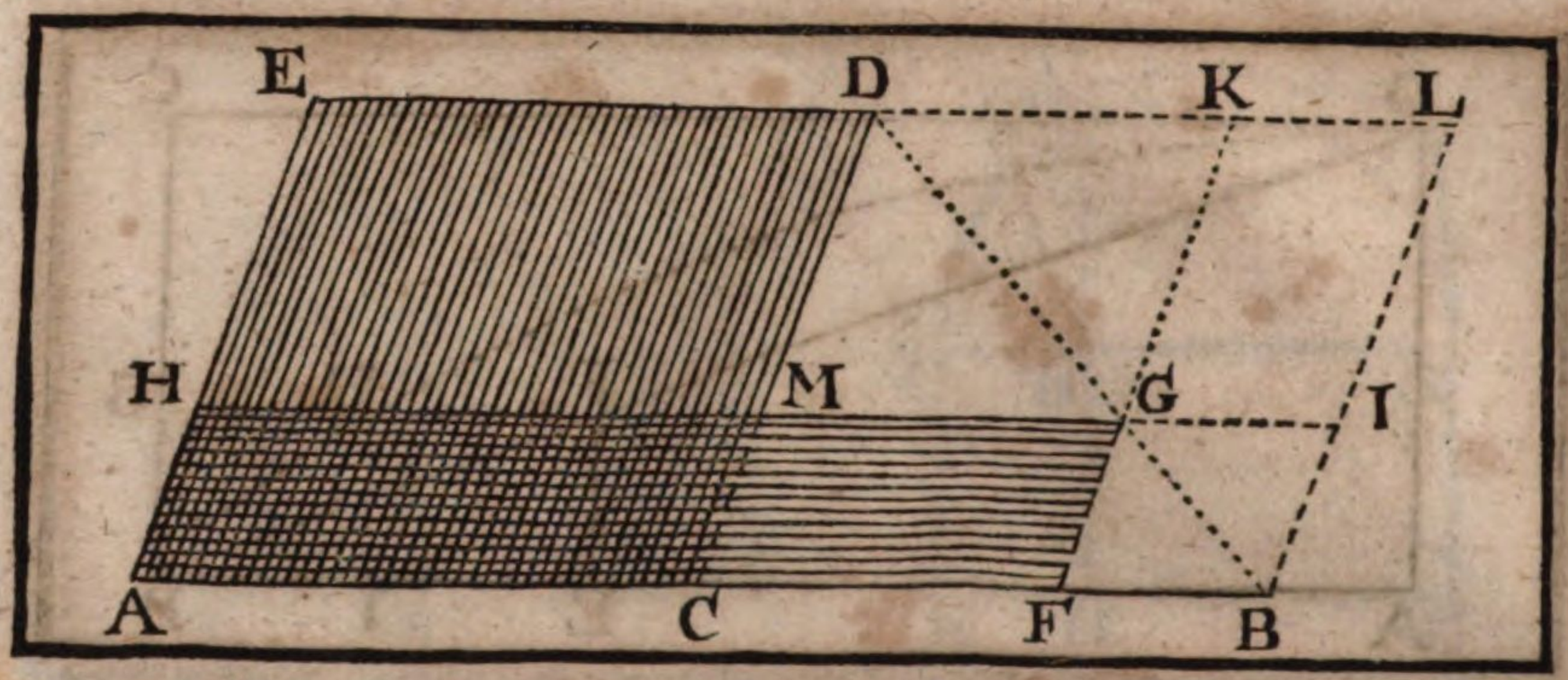
und deßwegen muß GH ⊏ seyn, der GF. d. 9. 5.

Ein Theil seinem gantzen, so ungereimt ist.

Woraus man schliesset, daß eine gerade Linie, so aus dem Punct D in B gezogen wird, bloß durch den Punct F. und nicht anderwertig durchgehe.

Und folgends, daß das ▭ EG völlig umb den Diameter DFB deß ▭ AC stehen müsse.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Unter allen Parallelogrammen, welche auff einer geraden Linie gestellt werden, und ihre Abgänge gleichförmig und gleich gestölter haben dem Abgang, so auff der geraden Linie ist beschrieben worden, ist das gröste, welches auff der andern Helffte der geraden Linie, gleichförmig ihrem Abgang ist gestölt worden.

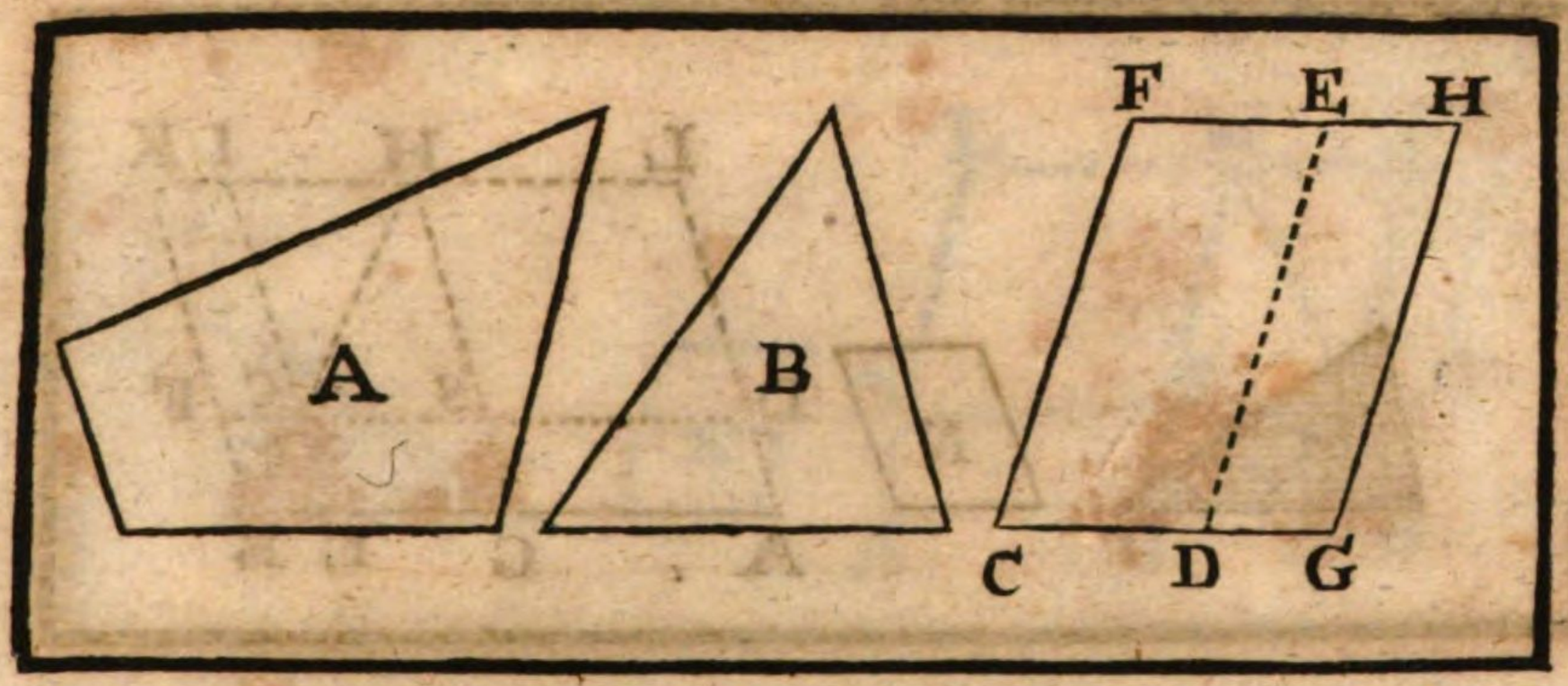
Es ist gegeben das abgehende □ AD, welches auff der Helffte der Linie AB ist gestölt worden, nemlich auff AC, dessen Abgang aber (nach der 6. def. 6.) seyn werde das □ CL, welches auff der andern Helffte der Linie AB, nemlich auff CB, ist beschrieben worden. Es ist auch gegeben das nach Gefallen gemachte □ AG, welches auff dem ungleichen Theil AF der Linie AB ist gestölt worden, und seinen Abgang FI gleichförmig, und gleichgestölter dem Abgang CL. hat. Diesem nach saget man, daß das □ AD ⌐ seye, als das □ AG. u. s. f.

Zubereitung.

Ziehe den Diameter DB, welcher auch nothwendig
durch das □ FI gehen werde (dann beyde □ CL, und FI einander gleichförmig, und gleich gestölter gegeben werden) d. 26. 6.
Hernach verlängere FG biß in K.

Beweiß.

In dem □ CL ist das □ CG ⌐, dem □ GL. d. 43. 1.
Wann man das gemeine □ FI beyderseits hinzu setzet:
So wird das □ CI ⌐ seyn, dem □ FL.



Das ▭ CI aber, ist ⌐, dem ▭ AM. d. 36. 1.

Dahero ist auch das ▭ AM ⌐, dem ▭ FL.

Setze abermahlen hinzu das gemeine ▭ CG.

So ist das ▭ AG ⌐, dem Winckelhaben CGL.

Unterdessen ist klar, daß das gantze ▭ CL ⌐ seye, als

der Winckelhacken CGL, oder das gleiche ▭ AG.

Folget, daß auch das ▭ AD (welches ⌐ ist, dem ▭ CL). d. 36. 1.

⌐ seye, als das ▭ AG.

Welches zu beweisen ware.

Hülffe. (Lemma.)

Den Unterscheidt zwischen zwey geradtlinischen Figuren zu erfahren, umb welchen eine die andere übertreffe, oder grösser seye.

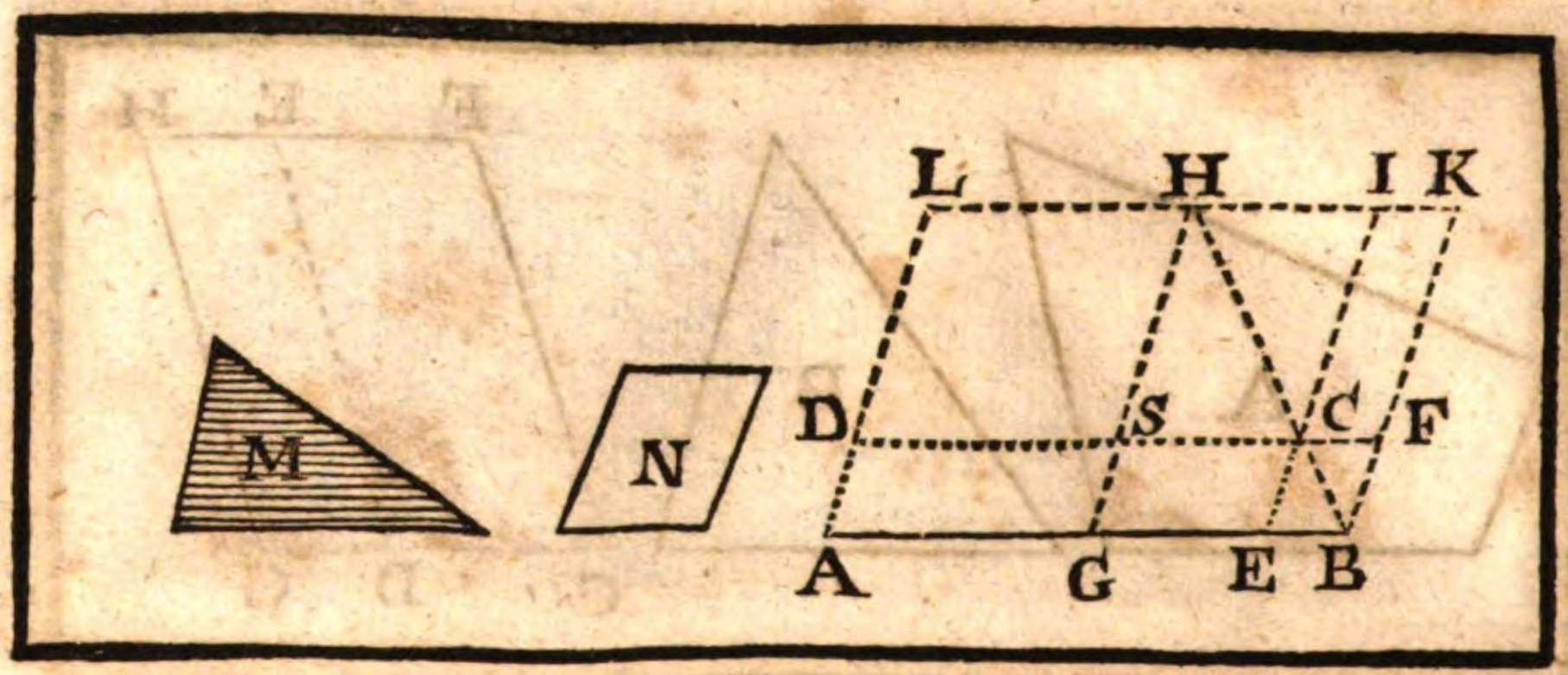
Es seynd gegeben die Figuren A und B, unter welchen A die grössere, und B die kleinere ist. Diesem nach verlanget man, umb wie viel die grössere A, die kleinere B übertreffe.

Mache das ▭ CH ⌐, der Figur A. d. 45. 1.

Hernach auff der Seiten FC, und in gleichen Winckeln

mache das ▭ CE ⌐, der Figur B. d. 43. 1.

So ist klar, daß das ▭ DH der Unterscheid seye, umb welchen die Figur A ⌐ ist, als die Figur B.



Die XXVIII. Vorgab.

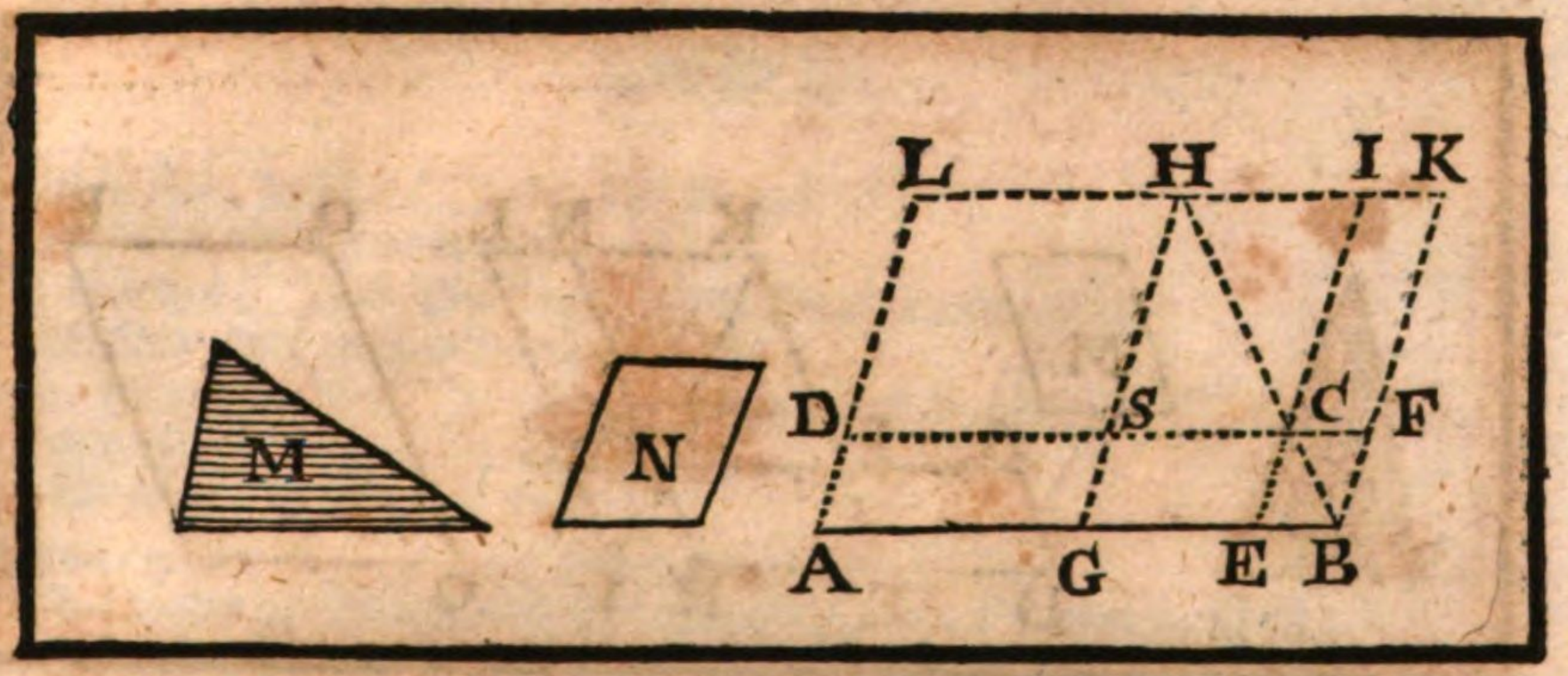
Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie ein abgehendes Parallelogram zu stöhlen, welches gleich groß seye einer andern vorgegebenen geradtlinischen Figur, und ihren Abgang gleichförmig einem andern gegebenen Parallelogram habe; jedoch ist zu beobachten, daß die gegebene geradtlinische Figur nicht grösser seye, als das Parallelogram, welches auff der Helffte der vorgegebenen Linie gleichförmig seinem Abgang ist gestölt worden.

Es seynd gegeben die gerade Linie AB, die geradtlinische Figur M, und das ▭ N. Doch die Figur M muß nicht ⌜ seyn, als das ▭ AH, welches auff der Helffte AG der gegebenen Linie AB, gleichförmig seinem Abgang GK, oder dem ▭ N ist gestölt worden. Diesem nach verlanget man ein abgehendes ▭, als wie AC, auff der Linie AB gestölter zu haben, welches gleich groß seye der Figur M, und den Abgang EF, gleichförmig habe dem ▭ N.

Handgriff.

Auff der Helffte GB der gegebenen Linie AB, mache
das ▭ GK gleichförmig, dem gegebenen ▭ N. d. 18. 6.
Hernach erfülle auff der Linie AB, das ▭ AK, wodurch
daß ▭ AH, das abgehende, auff der Linie AB werde gestölt, d. 6. def. 6.
und sein Abgang GK seyen, welcher gleichförmig gemacht worden
ist dem ▭ N.
Wann nun diß ▭ AH ⌜ wäre, der gegebenen Figur M.
so solte es schon gemacht seyn, was man verlangt hätte.
Es wird aber die Figur M ⌝ als das ▭ AH, gesetzt.
(dann grösser kan es nicht seyn, wider diese, und 27 Vorgab. 6.)
Dahero suche durch die Hülffe der vorgehenden 27 den Unterscheid,
umb welchen das ▭ AH, oder das gleiche GK ⌜ ist, als die
Figur M. d. 36. 1.

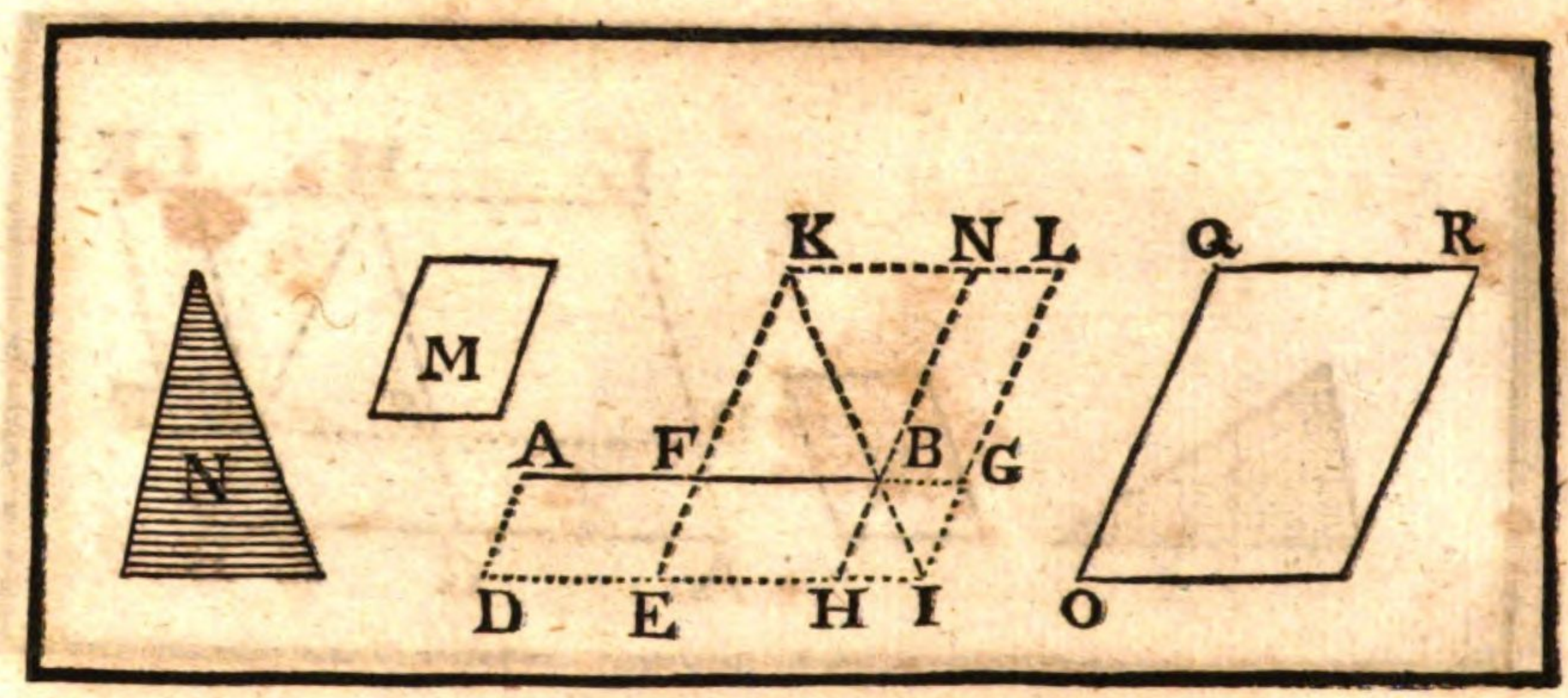


Mache hernach mit dem gefundenen Unterscheid in dem ▭ GK
das ▭ SI, so gleichförmig seye, dem ▭ GK, oder dem ▭ N. d. 18. 6.
Verlängere alsdann die Seiten IC in E, und SC zu beyden Seiten in D und F.
So wird darauß entstehen das ▭ AC, welches auff der gegebenen
Linie AB gleich groß der Figur M ist gestellt worden, und ihren Abgang EF
gleichförmich hat dem gegebenen ▭ N. Dieses aber zu beweisen,
Ziehe vorgehends den Diameter HB, welcher nothwendig wegen der
Gleichförmigkeit, und Gleichstellung durch die ▭ SI und EF d. 21. 6.
gehen werde. d. 26. 6.

Beweiß.

Nunmehro ist klar, daß die ▭ EF. SI, und GK einander gleichförmig seint. d. 24. 6.
Es ist aber das ▭ GK gleichförmig gemacht worden dem ▭ N.
Dahero werden auch die ▭ EF, nemlich der Abgang des ▭ AC,
und das ▭ SI, nemlich der Unterscheid, gleichförmig seyn, dem
▭ N.
Unterdessen ist augenscheinlich wahr, daß (weilen in dem ▭ GK
das ▭ SI der Unterscheid zwischen dem ▭ GK, d. d. Hand.
und der Figur M ist) der Winckelhacken GCK ⌐ seye, der Figur M.
Nun aber ist das ▭ GC ⌐, dem ▭ CK. d. 34. 1.
und wann man das gemeine ▭ EF hinzu setzet,
So wird auch das ▭ GF ⌐ seyn, dem ▭ EK.
Dem ▭ GF aber ist ⌐ das ▭ AS. d. 36. 1.
Darumb ist auch das ▭ AS ⌐, dem ▭ EK. und Hand.
Setze man beyderseits hinzu das gemeine ▭ GC.
So wird letztlich das ▭ AC ⌐ seyn, dem Winckelhacken GCK.
oder, durch das vorgehende, der gleich grosseu Figur M.

Welches zu machen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie ein übertreffendes Parallelogram zu machen, welches gleich groß seye einer andern vorgegebenen geradtlinischen Figur, und den Uberschuß gleichförmig und gleichgestellter habe einem andern vorgegebenen Parallelogram.

Es seynd gegeben die gerade Linie AB, die Figur N, und das ▭ M. Diesem nach solte man ein übertreffendes ▭ gleich wie AI, auff der gegebenen Linie AB stellen, welches gleich groß seye, der Figur N, und ihren Uberschuß BI gleichförmig, und gleichgestellter habe dem ▭ M.

Handgriff.

Zertheile geradt entzwey die gegebene Linie AB. d. 10. 1.

Auff der Helffte FB mache das ▭ FN gleichförmig dem ▭ M. d. 18. 6.

Hernach mache in einem besondern Ort das ▭ OR, daß
es erstlich der Figur N, und dem ▭ FN sammentlich gleich groß, } d. 45. 1.
gleichförmig aber, und gleichgestellter dem ▭ M, oder FN seye. } und 25. 6.

Verlängere die Seiten KN, und KF.

nehme KL ⌐, der QR, und KE ⌐, der QO.

Nach diesem ziehe durch E die Linie DEI ═, der Linie AB, d. 31. 1.

Und auß L die Linie LGI ═, der Linie KFE.

Verlängere AB biß in G, und NB biß in H.

Letztlich ziehe auß A die Linie AD ═, der Linie FE.

Nunmehro beweiset man, daß der Uberschuß BI gleichförmig und gleichgestellter seye dem ▭ M. hernach, daß das ▭ AI (welches ein übertreffendes ist), auff der Linie AB gestellt, und gleich groß seye der Figur N.

Ziehe vorgehends den Diameter KI, welcher nothwendig wegen der Gleichförmigkeit, und Gleichstellung deren ▭ just durch beyde ▭ BI, und FN gehen werde. d. 26. 6.

Beweiß.

Erstlich ist klar, daß die ▭ OR. FN. BI, und EL einander gleichförmig seint. d. d. Hand.

Es ist aber das ▭ OR, oder das ▭ FN gleichförmig gemacht worden, dem vorgegebenen ▭ M.

Dahero auch die andere ▭, als wie der Uberschuß BI, und das ▭ EL. d. 21. 6. gleichförmig seyn werde dem ▭ M.
So erstlich zu beweisen ware.

Alsdann, weilen KL, und KE ⊓ seint, denen QR, und QO. d. d. Hand.
Und wegen der Gleichförmigkeit auch der ∠ EKL ⊓, dem ∠ OQR.

so folget, daß das ▭ EL ⊓ seye, dem ▭ OR. { d. 34. I. und 36. I.

Das ▭ OR aber, ist vorhero ⊓ gemacht worden, der Figur N, und dem ▭ FN sammentlich. d. d. Hand.

Dahero ist auch das ▭ EL ⊓, der Figur N + ▭ FN.

Wann man nun auß dem ▭ EL das ▭ FN darvon ziehet, so wird verbleiben der Winckelhacken EBK ⊓, der Figur N.

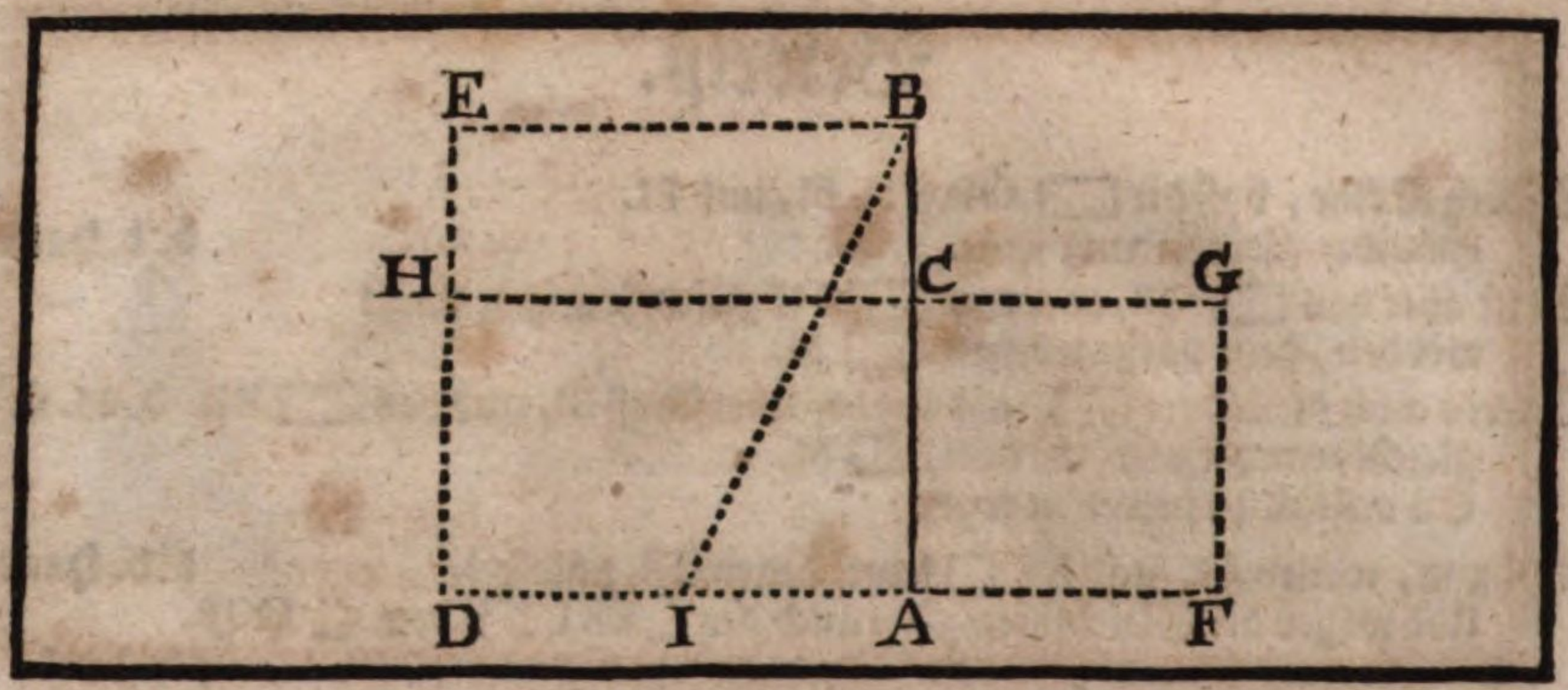
Unterdessen ist das ▭ DF ⊓, dem ▭ EB, d. 34. I.
und das ▭ EB ist ⊓, dem ▭ BL. d. 43. I.

Dahero ist auch das ▭ DF ⊓, dem ▭ BL.
Wann man beyderseits, das gemeine ▭ FI hinzu setzet,

So wird das ▭ AI ⊓ seyn, dem Winckelhacken EBL.
Es ist aber schon bewiesen worden, daß der Winckelhacken EBL ⊓ seye, der Figur N.

Darumb wird auch das ▭ AI ⊓ seyn, der Figur N.

Welches letztlich zu beweisen und zu machen ware.



Die XXX. Vorgab.

Handgriff.

Eine vorgegebene gerade Linie, nach der mittlern und äussersten Proportion abzutheilen.

Es ist gegeben die gerade Linie AB, welche also abzutheilen ist, daß sich die gantze Linie AB, zu dem grössern Stück AC verhalte: gleich wie das dasselbe Stück AC, zu dem kleinern CB. Nemlich daß es seye AB. AC:: AC. CB.

Handgriff.

Zertheile die gerade Linie AB auff solche Weise, daß das ▭ so gemacht ist von der gantzen AB, und dem kleinern Stück CB, ⌐ seye dem □, welches gemacht ist von dem grössern Stück AC. d. II. 2.

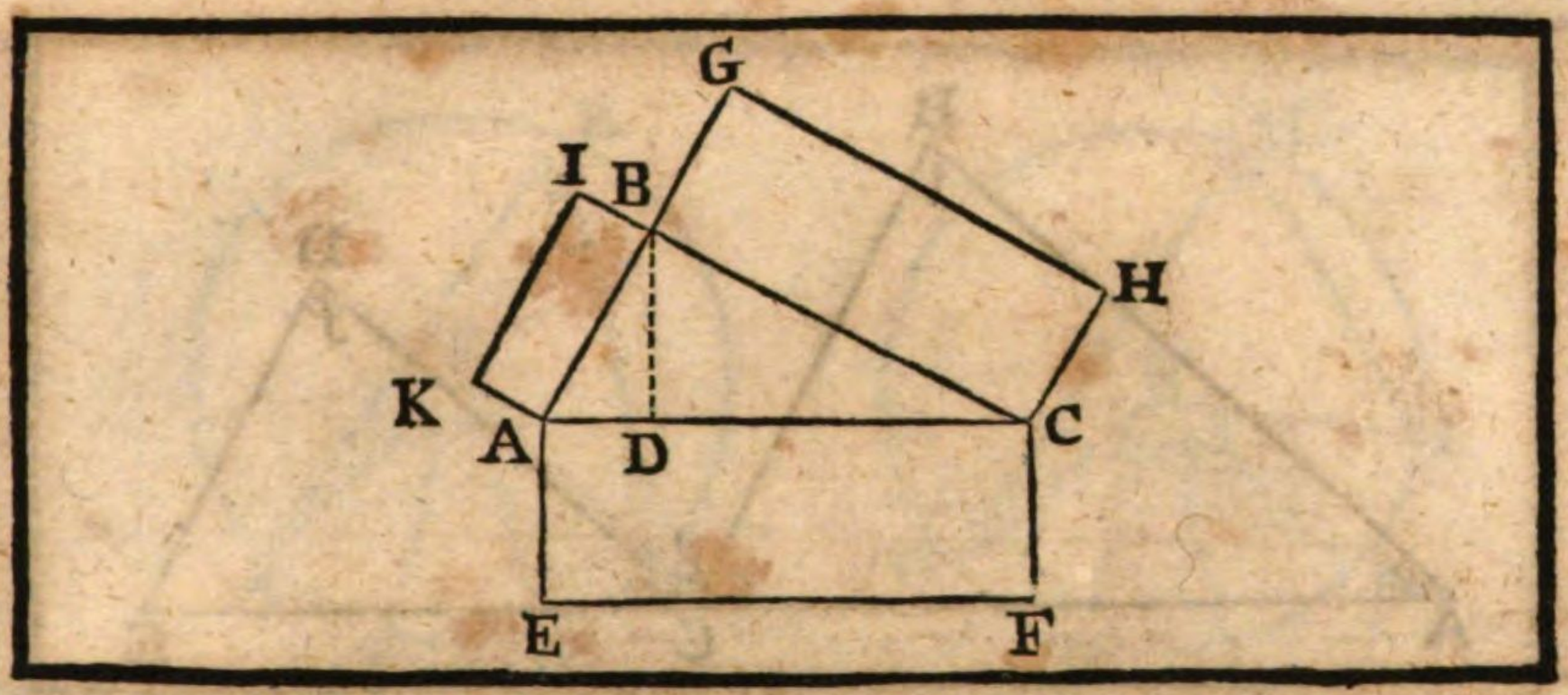
Diesem nach saget man, daß die vorgegebene gerade Linie AB in dem Punct C nach der mittlern und äussersten Proportion abgetheilt worden seye.

Beweiß.

Dieweilen das ▭ CE ⌐ gemacht worden ist, dem □ CF: so wird seyn, EB (oder die gleiche AB) AC:: AC. CB. d. 17. 6.

Dahero ist die Linie AB nach der mittlern, und äussersten Proportion in Puncten C abgetheilt worden. d, 2. def. 6.

Welches zu machen ware.



Die XXXI. Borgab.

Betrachtung.

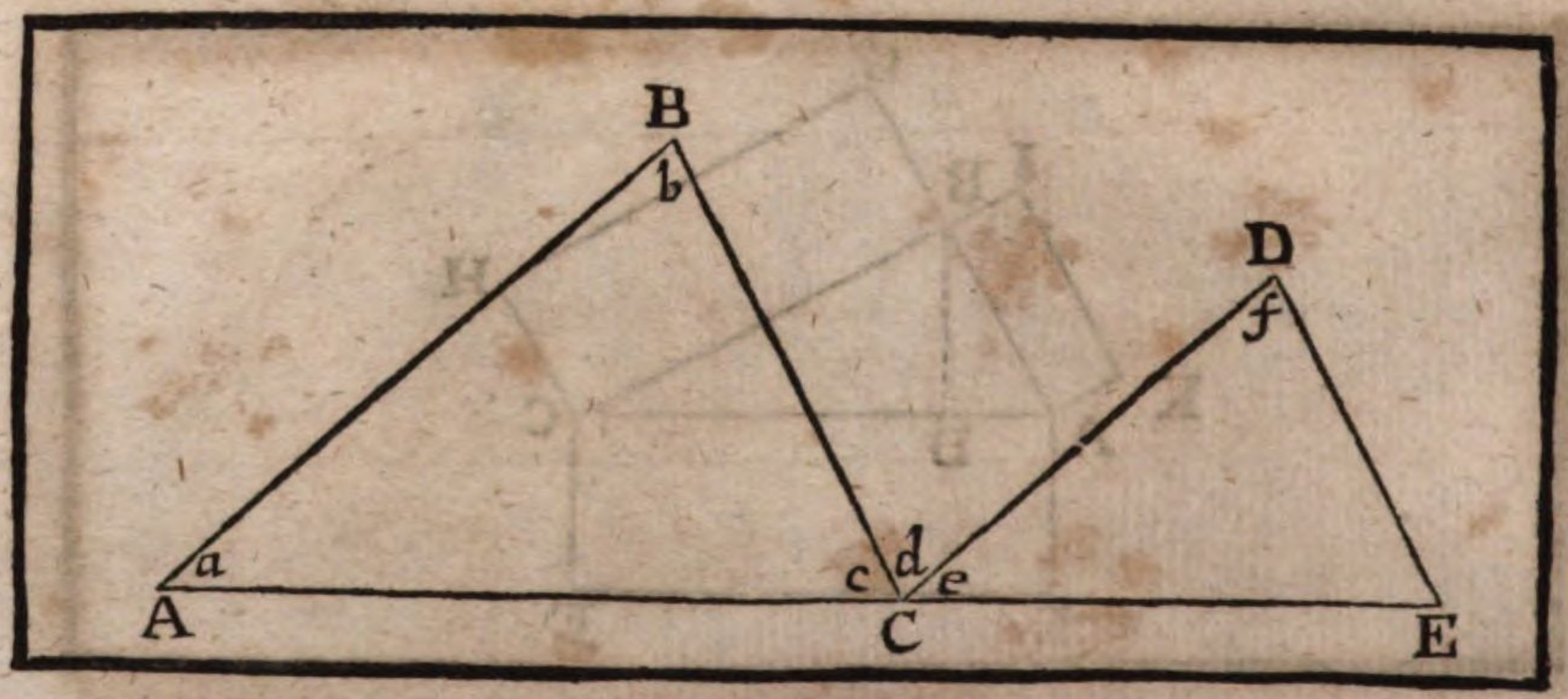
Wann auff denen drey Seiten eines rechtwincklichten Triangels drey gleichförmige und gleichgestellte Figuren beschrieben seint: So wird dieselbe (welche auff der Seiten, die den rechten Winckel unterspannet, beschrieben worden), gleich seyn denen andern zwey Figuren sammentlich, welche auff denen andern zwey Seiten seint gemacht worden.

Es ist gegeben der △ ABC rechtwincklicht in ∠ B, auff dessen Seiten AB. BC CA seint gleichförmig und gleichgestellter, zu einem Exempel die ▭ AI. BH. AF. gemacht. Diesem nach saget man, daß das ▭ AF, so auff der Seiten AC, welches den rechten ∠ B unterspannet, beschrieben worden, gleich groß seye, beeden ▭ AI, und BH sammentlich.

Lasse vorhero auß dem rechten ∠ B die ⊥ BD auff die Basis fallen. d. 12. I.

Beweiß.

Durch die ⊥ BD ist gemacht worden, daß es seye in dem △ ABC
AC. CB :: CB. CD. d. 8. 2. Cor. 6.
Dahero wie sich verhaltet AC. CD :: das ▭ AF. ▭ BH. d. 20. Cor. 6.
und durch die Umbkehrung CD. AC :: das ▭ BH. ▭ AF. d. 4. 5.
Es ist auch in dem △ ABC. AC. AB :: AB. AD. d. 8. 2. Cor. 6.
Dahero wie sich auch verhaltet AC. AD :: ▭ AF. ▭ AI. d. 20. Cor. 6.
und durch die Umbkehrung AD. AC :: ▭ AI. ▭ AF. d. 4. 5.
Mit einem Wort, es heist CD (1). AC (2) :: ▭ BH (3) ▭ AF (4).
und AD (5) AC (2) :: ▭ AI (6). ▭ AF (4).
Deßwegen seyn werde CD + AD. AC :: ▭ BH + AI ▭ AF. d. 24. 5.
Die Linien CD + AD seint aber ⊓, der gantzen AC
Folget, daß auch die ▭ BH + AI ⊓ seint, dem ▭ AF.
Welches zu beweisen ware.



Die XXXII. Vorgab.

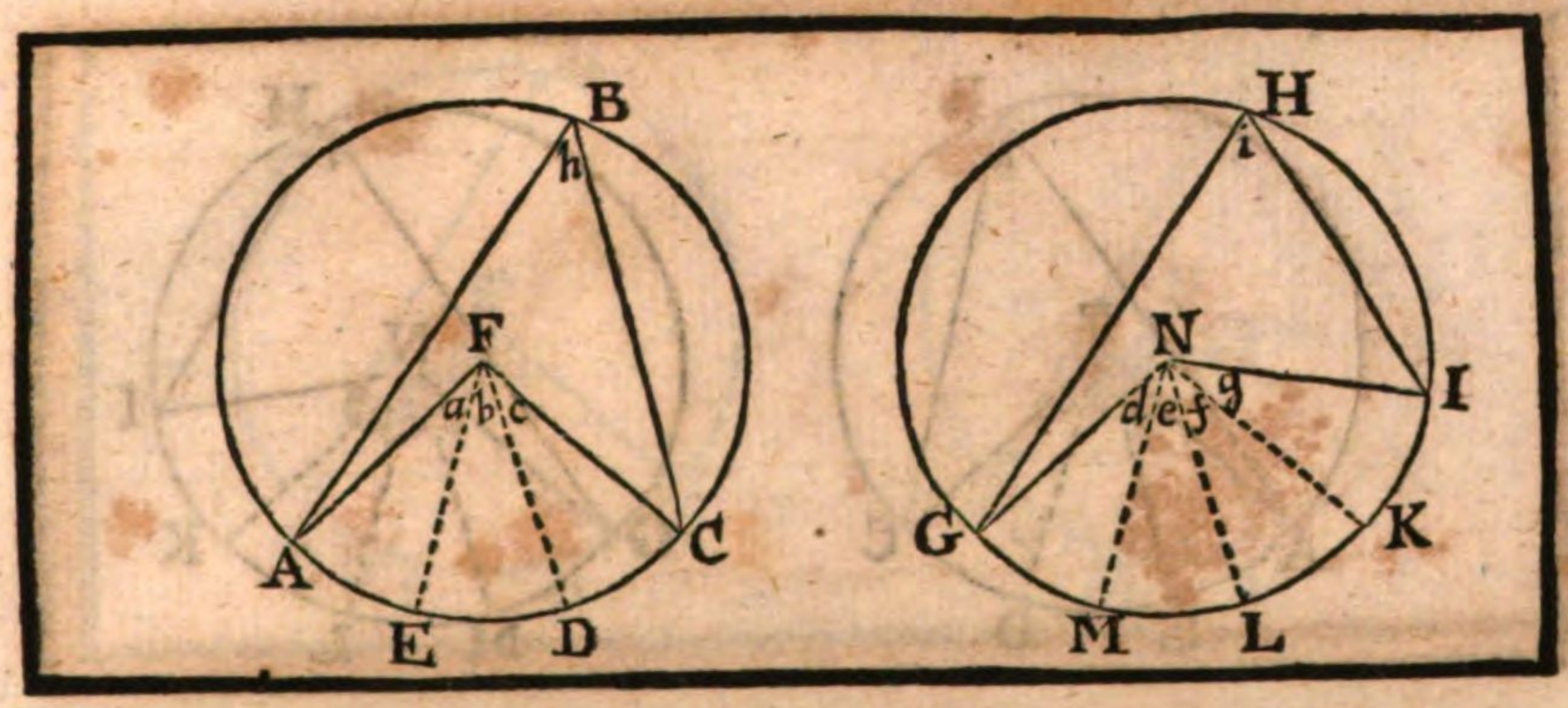
Betrachtung.

Wann in zwey Triangeln, zwo Seiten eines geproportionirt seint, zweyen Seiten des andern, und beyde Triangeln also an einander gestossen werden, daß sie einen Winckel machen, und die gleichförmig-haltnuß-sagende Seiten einander Parallel haben: so werden die übrige zwo Seiten in eine gerade Linie fort liegen.

Es ist gegeben, daß die zwey △ ABC, und CDE die zwo Seiten geproportionirt haben, nemlich AB. BC :: CD. DE. Diese beyde △ werden hernach also zusammen gestossen, daß sie einen ∠, nemlich den ∠ d machen, und die gleichförmig-haltnuß-sagende Seiten AB. CD, und BC. DE einander Parallel kommen: diesem nach saget man, daß die übrige zwo Seiten AC. CE in einer geraden Linie fort liegen.

Beweiß.

Dieweilen die Seiten AB = ist, der Seiten CD. d. d. Vorg.
und auch die Seiten BC = ist, der Seiten DE.
So wird der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ d. [d. 29. 1.
und der ∠ d ⊓, dem ∠ f,
und folgends der ∠ b auch ⊓, dem ∠ f. d. 1. ax. 1.
Unterdessen halt sich AB. BC :: CD. DE. d. d. Vorg.
Darumb ist der ∠ ABC gleichwincklicht dem △ CDE. d. 6. 6.
Und dahero ist der ∠ a ⊓, dem ∠ e.
Wann man nun beyderseits die gleiche ∠ d, und b hinzu setzet:
So ist auch der ∠ a, und b ⊓, denen ∠ d, und e.
Setzet man abermahlen beyderseits den gemeinen ∠ c hinzu,
So seint alle drey ∠ a, b, c ⊓, denen drey ∠ c, d, e.
Diese drey ∠ a + b + c seint aber ⊓, zwey rechten ∠. d. 32. 1.
Folget, daß auch die ∠ c + d + e zwey rechten ⊓ seyen, und
deßwegen wird die Linie ACE eine gerade Linie fort seyn. d. 14. 1.
Welches zu beweisen ware.



Die XXXIII. Vorgab. Betrachtung.

In gleichen Zirckeln halten sich, sowol die Winckel bey dem Mittel-Puncte, als die, so in dem Umbkreill stehen, gegen einander, als wie die Stücke deren Umbkreisse, oder Bögen, darauff sie stehen: also halten sich auch gegen einander die Außschnitze, gleich wie ihre Stücke deß Umbkreiß oder Bögen.

Es seynd gegeben die zwey gleiche Zirckeln ABC, und GHI, bey dero Mittel-Puncten F, und N seint gemacht die ∠ AFC, oder a + b + c. und GNI, oder d + e + f + g.

Diesem nach saget man,

I. Daß sich also verhalte der ∠ a + b + c, zu dem ∠ d + e + f + g, als wie der Bogen AC zu dem Bogen GI.

Zubereitung.

Suche einen gemeinmäßlichen Theil, welcher beyde Bögen AC, und GI geradt auffmesset.

Seye AE ein solcher Theil, welcher den Bogen AC geradt dreymahlen, und den Bogen GI geradt viermahlen auffmesset.

Ziehe die Puncten E. D in F, und M. L. K. in N zusammen.

Beweiß.

Dieweilen die Theile, oder kleine Bögen AE. FD. DC, und GM. ML. LK. KI einander seint ⊓ gemacht worden. d. d. Zub.

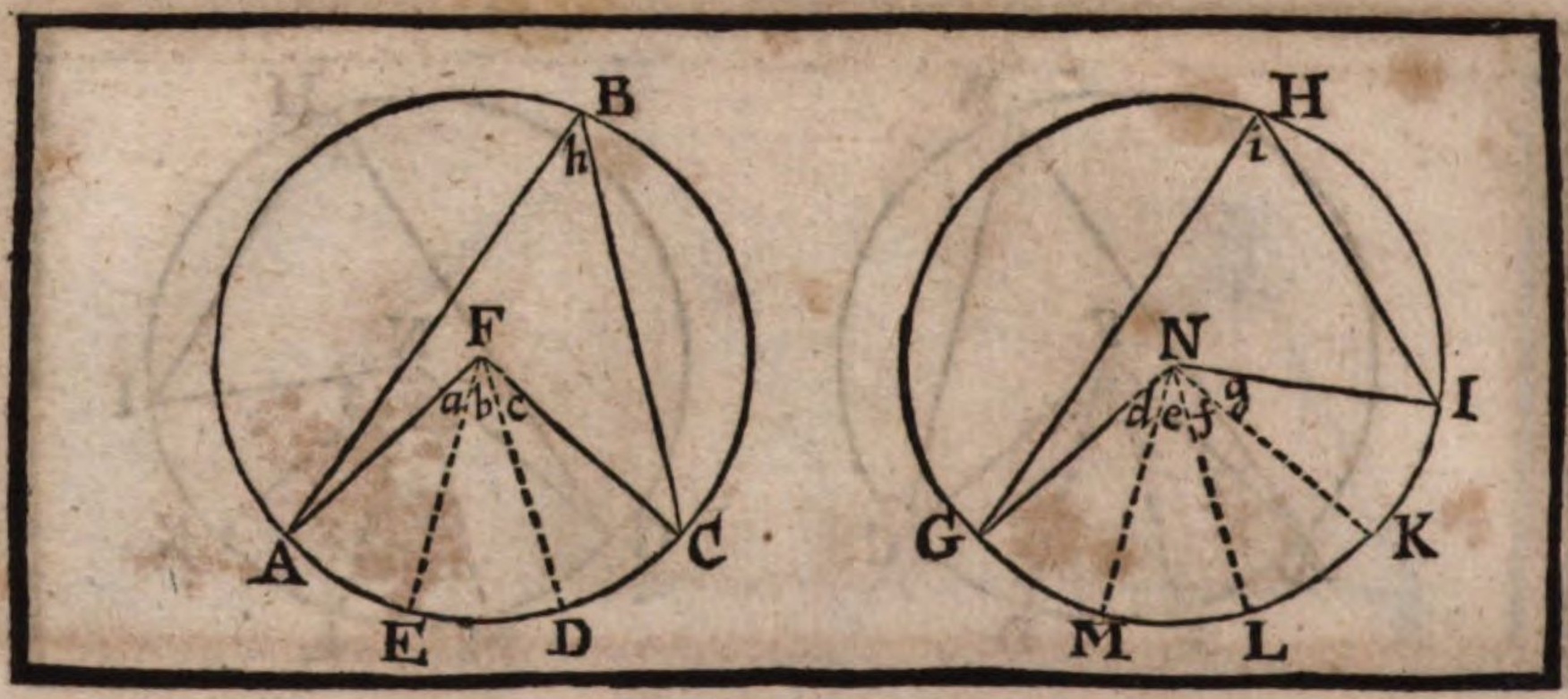
So werden auch die ∠ a. b. c, und die ∠ d e. f. g. einander ⊓ seyn. d. 27. 3.

Und die Anzahl deren kleinen ∠ ⊓ seyn, der Anzahl deren kleinen Bögen, oder Umbkreiß-Stücke.

Der Bogen AC aber, ist geradt in drey gleiche Theile, und der Bogen GI geradt in vier gleiche Theile abgetheilt worden. d. d. Zub.

Dahero wird der gantze ∠ AFC, auch geradt in die drey kleine gleiche ∠, und der ∠ GNI in vier kleine, und gleiche ∠ abgetheilt seyn.

Und wegen gleicher Anzahl in einem und andern sich verhalten.



Daß, wie offt der kleine Bogen AE in dem gantzen Bogen GI begriffen ist: so offt auch der kleine ∠ a in dem gantzen ∠ d + e + f + g begriffen seye.

Und fernerß, wie offt die zwey kleine, und gleiche Bögen AE + ED in dem gantzen Bogen GI begriffen seint: so offt auch die zwey kleine, und gleiche ∠ a + b in dem gantzen ∠ d + e + f + g begriffen seint.

Letztlich, wie offt die drey kleine und gleiche Bögen AE + ED + DC (das ist, der gantze Bogen AC) in dem gantzen Bogen GI begriffen seint:
so offt auch die drey kleine und gleiche ∠ a + b + c (das ist, der gantze ∠ AFC) in dem gantzen ∠ d + e + f + g (das ist, in dem ∠ GNI) begriffen seyn. d. 14. ax. 1.

Dahero, als wie sich verhaltet der Bogen AC zu dem Bogen GI: : ∠ AFC. ∠ GNI. d. 6. def. 5. 7.

II.

Saget man, daß die ∠ in dem Umbkreisse, gleich wie die ∠ h, und i, sich gegen einander verhalten, gleich wie ihre Bögen AC, und GI, worauff sie stehen

Die Ursach ist, weilen die ∠ h und i geradt die Helffte von denen ∠ a + b + c, und d + e + f + g seint. d. 20. 3.

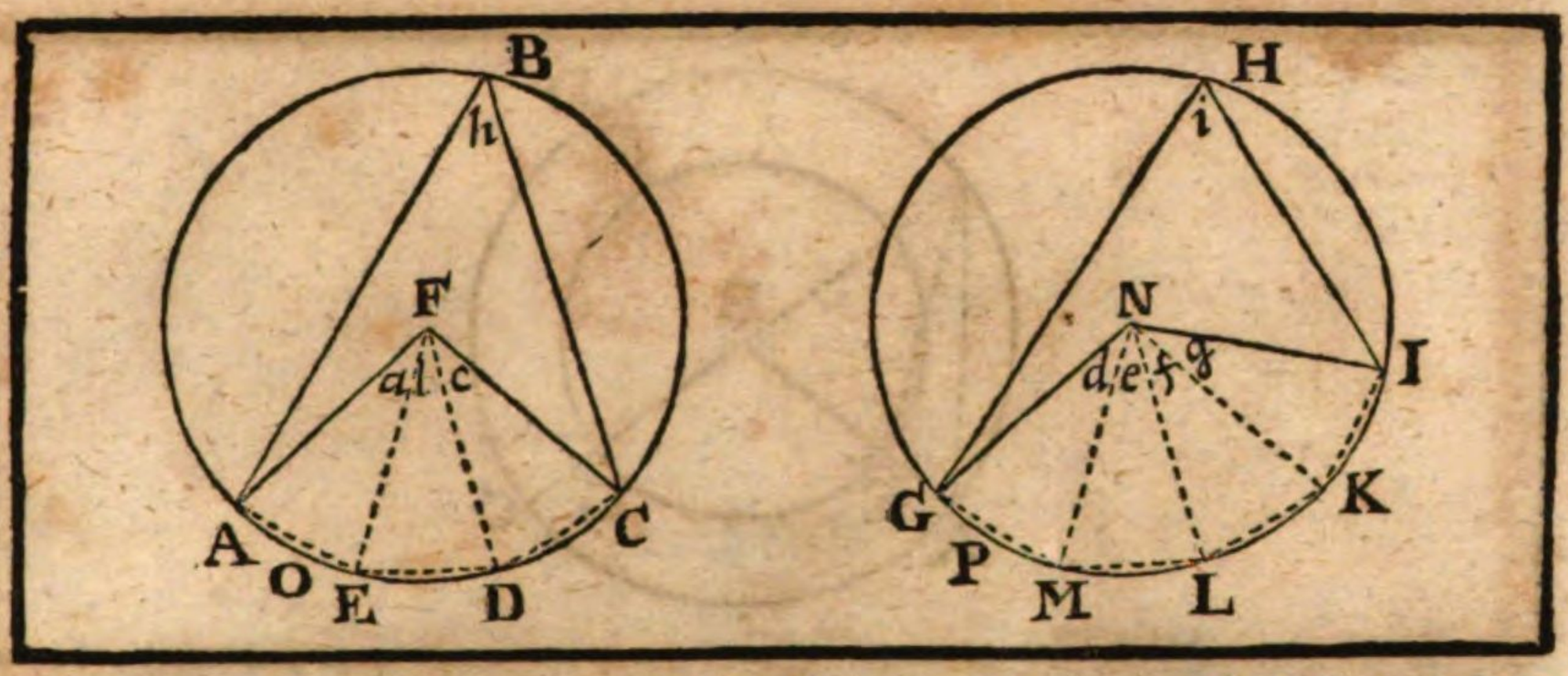
Diese aber halten sich gegen einander, gleich wie ihre Bögen AC. GI. d. d. Vorg.

Dahero auch seyn werde der ∠ h. ∠ i : : der Bogen AC, zu dem Bogen GI. d. 15. 5.

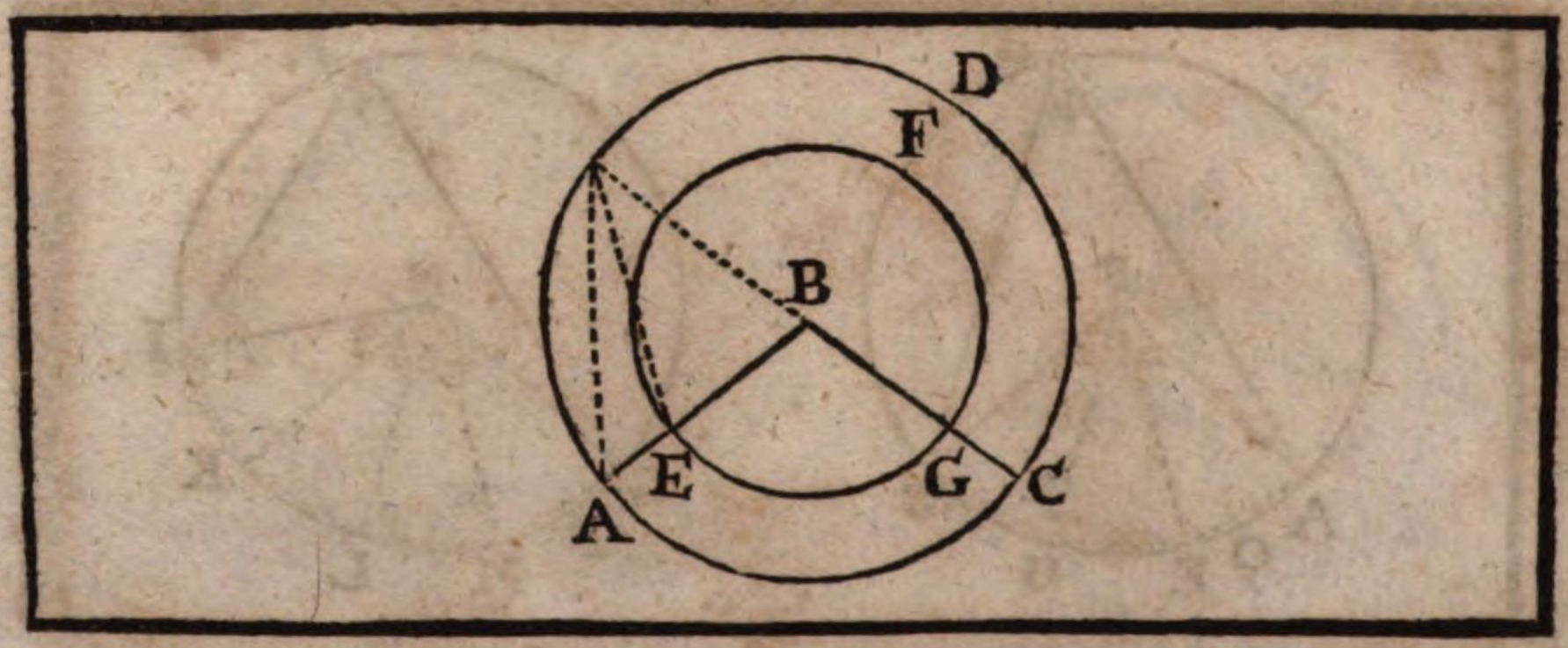
III.

Saget man, daß der Außschnitz AFCDE, zu dem Außschnitz GNIKLM sich verhalte, gleich wie der Bogen AC zu dem Bogen GI.

Ziehe vorhero die Puncten A. E. D. C, und G. M. L. K. I. mit geraden Linien zusammen.



Nun ist klar, daß wegen der gleichen Linien AF. EF, und GN. MN, und deren gleichen ∠ a, und d. d. 15. def. 1. d. d. Vorg.
Der △ AFE ⊓ seye, dem △ GNM. d. 4. 1.
So ist auch der Zirckel ABC ⊓, dem Zirckel GHI. d. d. Vorg.
Wann man nun von diesen gleichen Zirckeln die beyde gleiche △ darvon ziehet,
So wird überbleiben der kleine Zirckel-Schnitz AOE ⊓, dem kleinen Schnitz GPM.
Setze diese gleiche Schnitze beyderseits zu den gleichen △ AFE, und GNM hinzu.
So werden die kleine Außschnitze AFEO, und GNMP darauß entstehen, welche auch ⊓ einander seyn werden. d. 2. ax.
Unterdessen so viel kleine Bögen in einem und andern gantzen Bogen seint, so viel werden auch kleine und gleiche Außschnitze in einem und andern gantzen Außschnitze seyn.
Es seint aber in dem Bogen AC drey kleine und gleiche Bögen, und in dem Bogen GI vier kleine und gleiche Bögen gemacht worden: d. d. Zub.
Deßwegen auch der Außschnitz AFC. DEA geradt drey kleine und gleiche Außschnitze, und der Außschnitz GNIKLM geradt vier kleine und gleiche Außschnitz begreiffen werde.
Und wegen gleicher Anzahl in einem und andern seyn:
Wie offt der kleine Bogen AE in dem gantzen Bogen GI begriffen ist: so offt wird auch das Außschnitzl. AFE in dem gantzen Außschnitz GNIKLM begriffen seyn,
Und wie offt die zwey Bögen AE + ED in dem gantzen Bogen GI begriffen seint: so offt werden auch die



Zwey Außschnitzeln AFE + EFD in dem gantzen Außschnitz GNIKLM begriffen seyn.

Letzlich wie offt die drey kleine und gleiche Bögen AE + ED + DC (das ist der Bogen AC) in dem gantzen Bogen GI begriffen seint, so offt werden auch die drey kleine und gleiche Außschnitze AFE + EFD + DFC (das ist der Außschnitz AFCDE) in dem gantzen Außschnitz GNIKLM begriffen seyn.

Und dahero seyn, als wie der Bogen AC zu dem Bogen GI: also ist der Außschnitz AFCDE, zu dem Außschnitz GNIKLM [d. 6. def. 5 7.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

I.

Es verhaltet sich ein Außschnitz zu dem andern, gleich wie ein Winckel zu dem andern, welche von denen Außschnitzen gemacht werden.

II.

Der Winckel bey dem Mittel-Punct (als wie der ∠ B in dem Zirckel ADC) verhaltet sich gegen vier rechte Winckeln; gleich wie das Umbkreiß-Stück AC, worauff er stehet, zu dem gantzen Umbkreiß deß Zirckels (ADC):

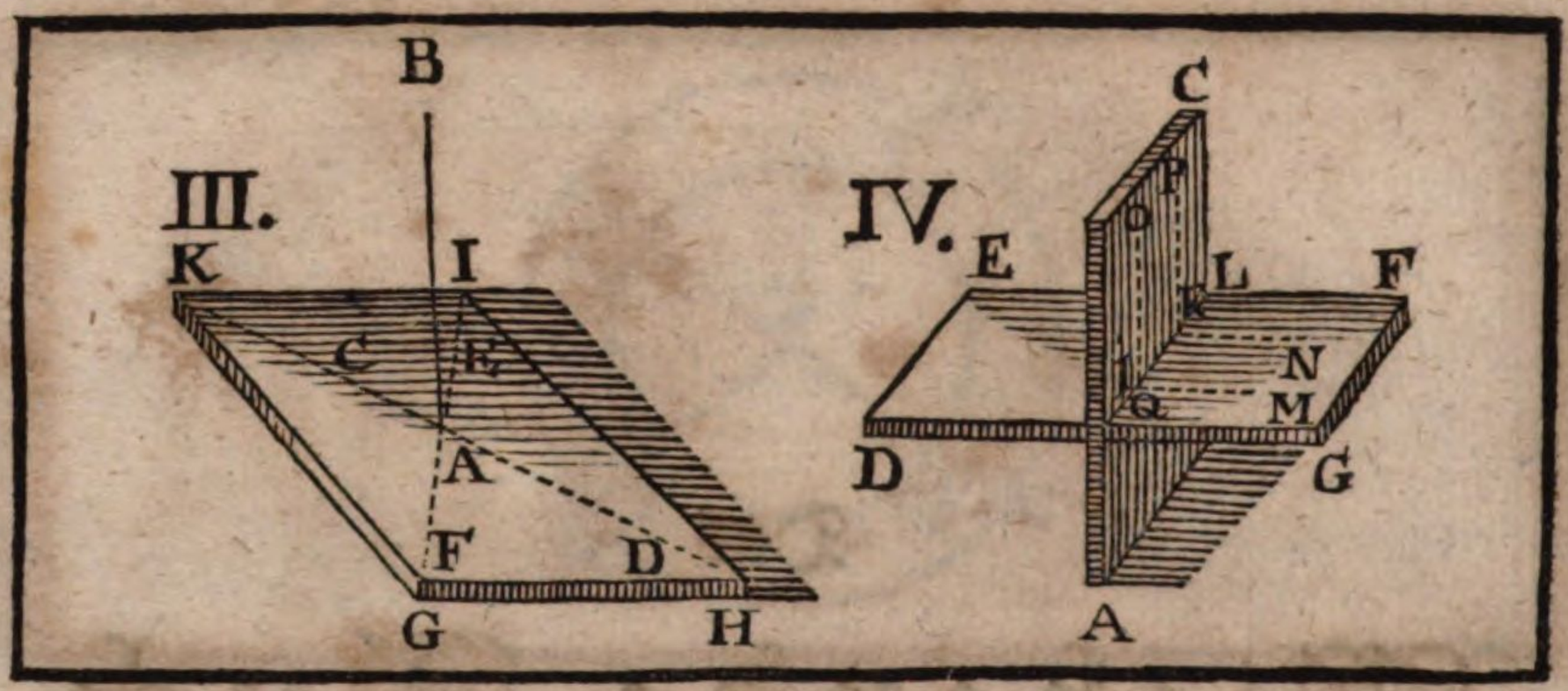
III.

Die Umbkreiß-Stücke oder Bögen (gleich wie AC. EG) in ungleichen Zirckeln (ADC EFG.) welche gleiche Winckeln unterspannen, (es seyen umb den Mittel-Punct, oder in dem Umbkreiß): seint einander gleichförmig.

IV.

Zwey halbe Diameter, als wie AB. CB schneiden in denen Zirckeln ADC. EFG, welche auß einerley Mittel-Punct B beschrieben seint, gleichförmige Bögen AC, EG ab.

Das
Siebende Buch
Deß Teutsch-redenden
Euclides.



Wort-Erklärungen.

I.

Etwas dichtes (Solidum), oder ein Cörper ist, welches eine Länge, Breite, und Dicke hat.

II.

Das eusserste eines Cörpers, ist die Fläche.

III.

Man sagt, daß eine gerade Linie (AB) auff einer Fläche (GHIK) bleyrecht stehe, wann sie auff allen geraden Linien (gleich wie auff EF. CD), welche auff derselben Fläche liegen, und sothane gerade Linie (AB) anrühren, auch bleyrecht stehet. Fig. III.

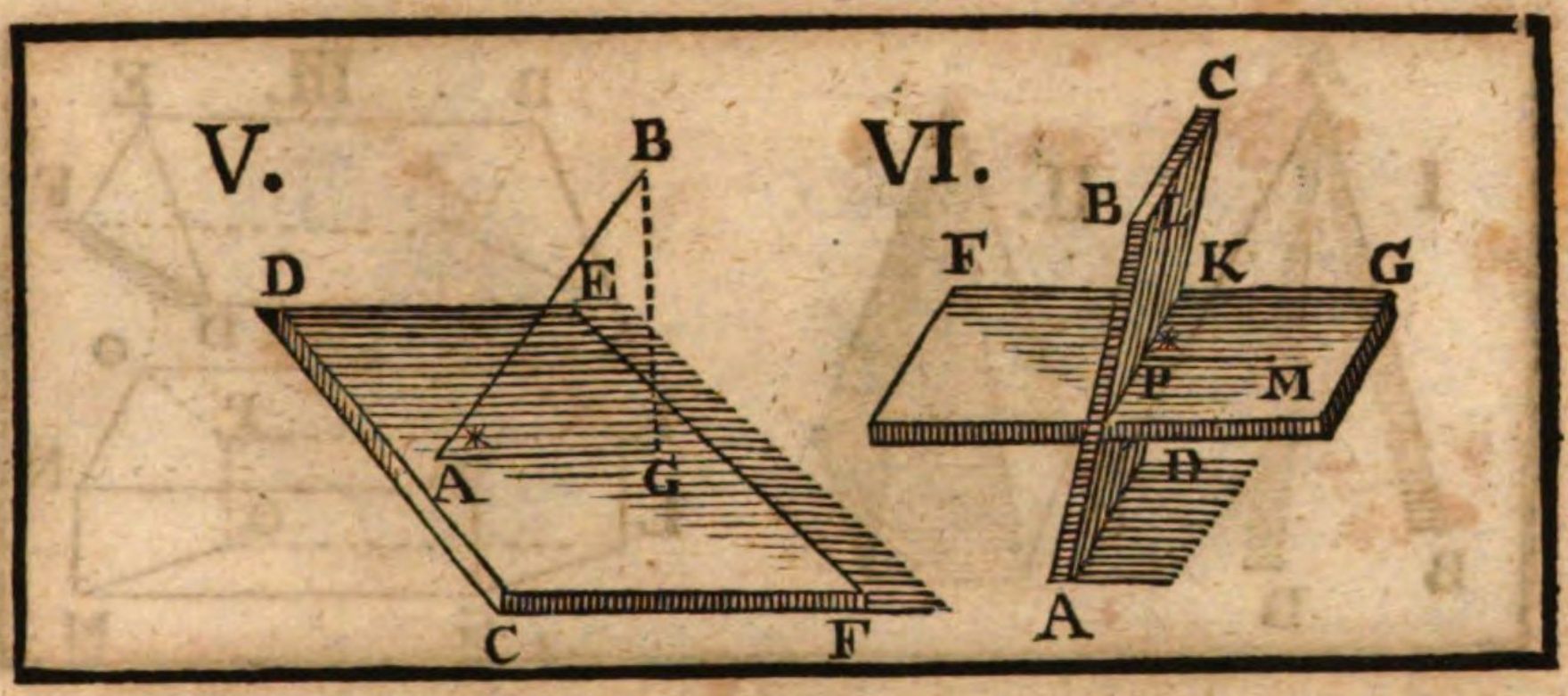
Das ist; wann AB mit denen geraden Linien EF. CD (welche sie an Punct A anrühren, und auff der Fläche GHIK liegen) die ∠ FAB. DAB. EAB. CAD unter einander gleich machet.

IV.

Eine Fläche (AC) stehet auff einer andern Fläche (DEFG) bleyrecht, wann die gerade Linien (OQ PK.) welche auß dem gemeinen Durchschnitt (LKQI) gezogen worden, sowohl auff einer Fläche (AC) als auff der andern (DEFG) bleyrecht stehen. Fig. IV.

Das ist, OQM. PKN müssen rechte Winckeln seyn.

Mercke, daß der gemeine Durchschnitt zweyen oder mehr Cörpern eine gerade Linie allein seye, welche, wann sich zwey oder mehr Cörper durchschneiden, solche zugleich brrühret; gleich wie allhier ist der gemeine Durchschnitt die gerade Linie IQKL, welche zugleich die Fläche AC, und die Fläche DEFG berühret.



V.

Wann von dem einen Ende (B) einer geraden Linie (AB) auff dieselbe Fläche (CDEF) worauff die gerade Linie (AB) auffstehet, eine bleyrechte Linie (BG) herunter gelassen wird (als wie in dem Punct G), und das andere Ende (A), und solcher Punct (G), mit einer geraden Linie zusammen gezogen werden: so sagt man hernach, daß der scharffe Winckel (*), welcher von der auffstehenden (AB), und zusammen gezogenen Linie (AG) gemacht wird, die Neigung (inclinatio) der geraden Linie (AB) zu der Fläche (CDEF) seye. Fig. V.

Mercke, nachdem der ∠ * groß, oder klein ist, nach diesem wird die Neigung der Linie AB zu der Fläche CDEF, groß oder klein genant.

VI.

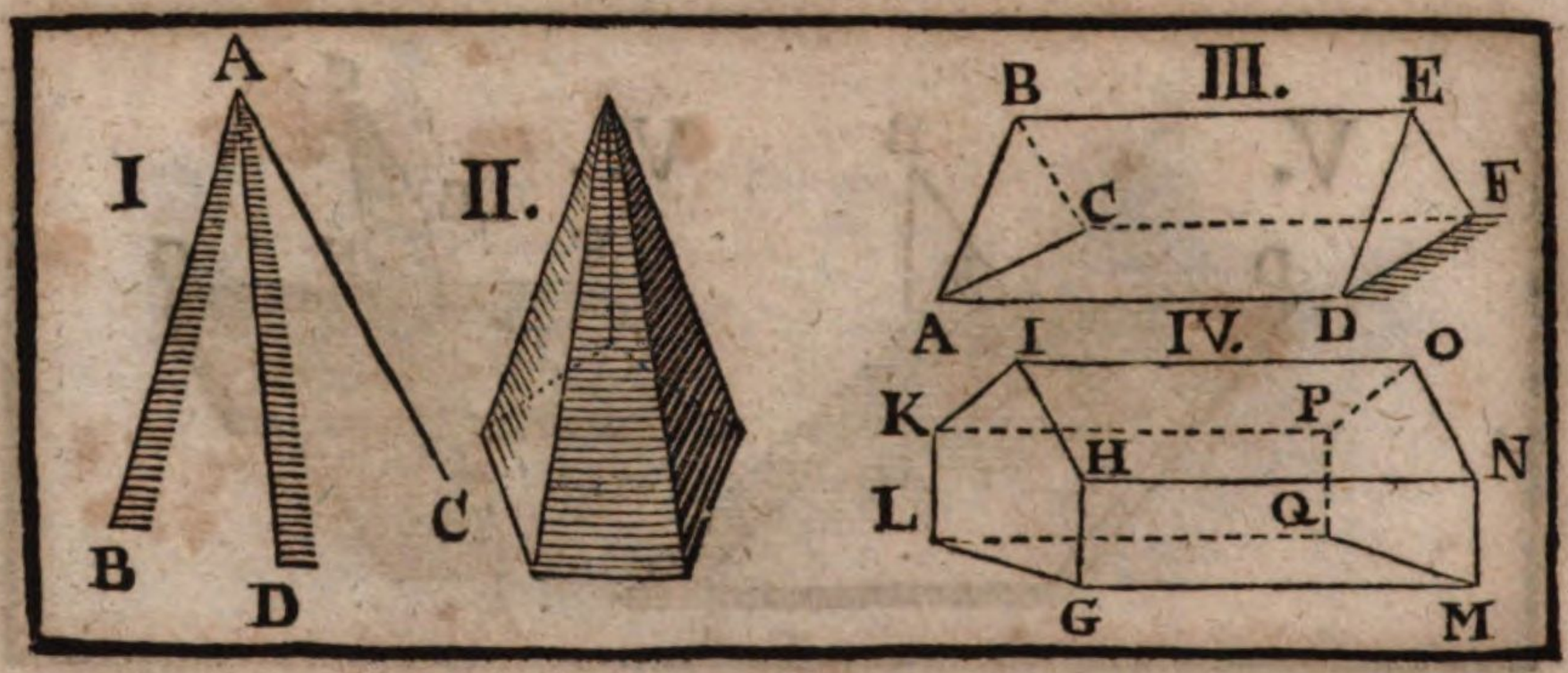
Eine Fläche (ABCD) neiget sich zu einer andern Fläche (FG) wann die zwey gerade Linien (PL. PM), welche auß dem gemeinen Durchschnitt (IPK), und bleyrecht in beyde Fläche seynd gezogen worden, einen scharffen Winckel (*) mit einander machen. Fig. VI.

VII.

Die Flächen neigen sich gleichförmig zu andern Flächen; wann sie ihre Neigungs-Winckeln (anguli inclinationum) einander gleich haben.

VIII.

Parallel, oder gleich weit abstehende Flächen seynd, welche allzeit in gleicher Weite von einander stehen, und niemahlen zusammen kommen.



IX.

Gleichförmige dichte Figuren, oder Cörper seint, welche mit gleichförmigen, und an der Anzahl gleichen Flächen beschlossen seint.

X.

Gleichgroß und gleichförmige dichte Figuren, oder Cörper seynt, welche mit gleichförmigen, und an der Anzahl und Grösse gleichen Flächen beschlossen seint.

XI.

Ein dichter Winckel (A) ist, welcher von mehr als zweyen Fläche, (auff das wenigst von dreyen, gleich wie allhier BAC. CAD. BAD), so nicht auff einerley Fläche liegen, doch aber in einem Punct (A) zusammen stossen, gemacht wird. Fig. I.

XII.

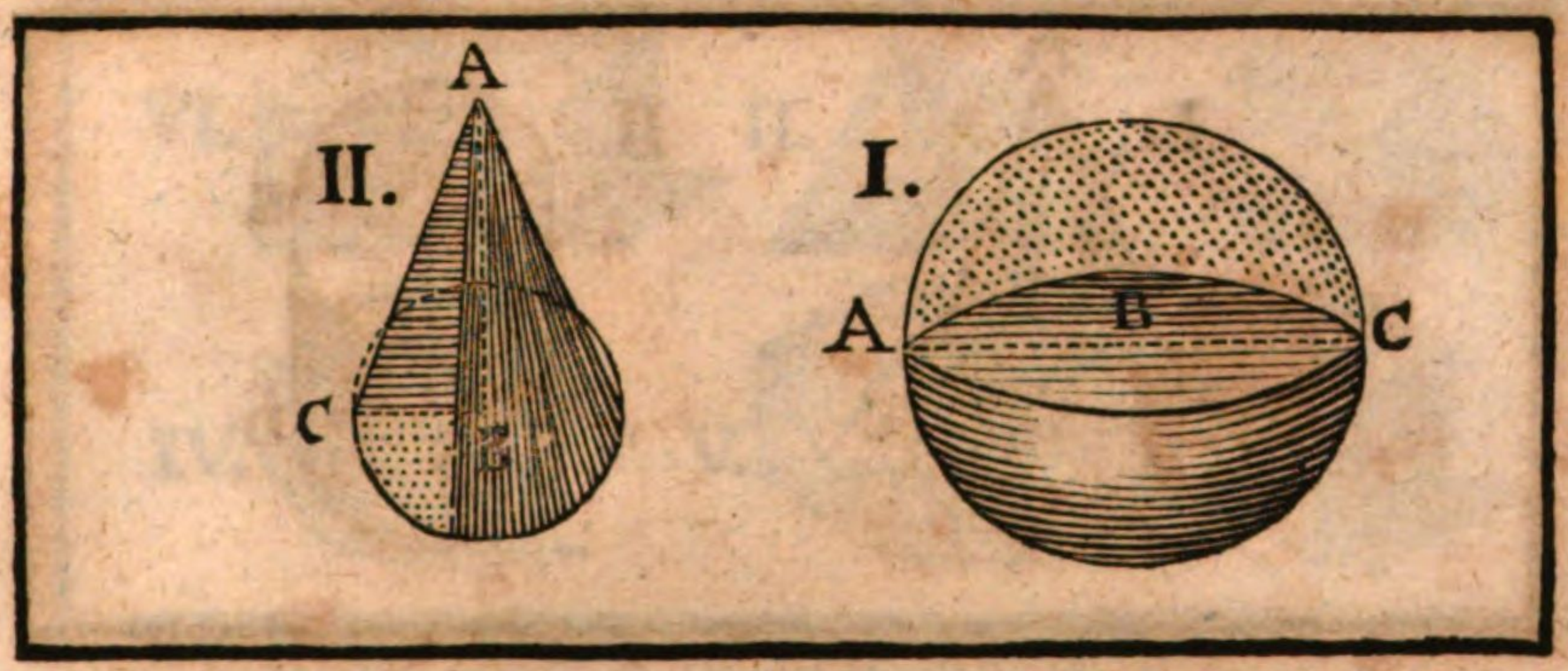
Spitz-Säule (Pyramis) ist eine dichte Figur, mit etlichen Flächen umbschlossen, welche von einer Fläche in einen Punct zusammen gezogen seint.

Mercke, wann die tine, oder untere Fläche, drey- vier- oder funff-eckicht, u. s. f. ist, so wird nachmahlen die dichte Figur, eine drey- vier- oder fünff-eckickte Spitz-Säule, u. s. f. genant, Fig. II.

XIII.

Eck-Säule (Prisma) ist eine dichte Figur mit etlichen Flächen beschlossen, deren die zwey gegen überstehende, gleich groß und gleichförmig, und Parallel einander, die übrige aber Parallelogrammen seint. Fig. III. IV.

Die Fig. III. ist eine dreyeckichte und IV. eine fünff-eckichte Eck-Säule. ABC, DEF, und GHIKL, MNOPQ. seynd die zwey gegen über stehende Flächen, so einander gleich groß, gleichförmig und Parallel seint. Die andern Flächen ABED, ACFD, CBEF, und GHNM, HION, IKPO, KLPQ, LGMQ, seint ▭.



XIV.

Eine Kuget (Sphæra) ist eine dichte Figur, welche entstehet, wenn man einen halben Zirckel umb seinen Diameter rings herumb, biß an das Ort, allwo man hat anfangen, umbdrähet. Fig. I.

XV.

Die Achse (Axis Sphæræ) ist der Diameter, oder solche gerade Linie (ABC), umb welche der halbe Zirckel ist gedrähet worden.

XVI.

Der Mittel-Punct deß halben Circkels (B) ist auch der Mittel-Punct der Kugel (Centrum Sphæræ).

XVII.

Der Diameter einer Kugel ist eine gerade Linie, welche durch den Mittel-Punct gezogen, sich beyderseits an der Kugel-Fläche endet.

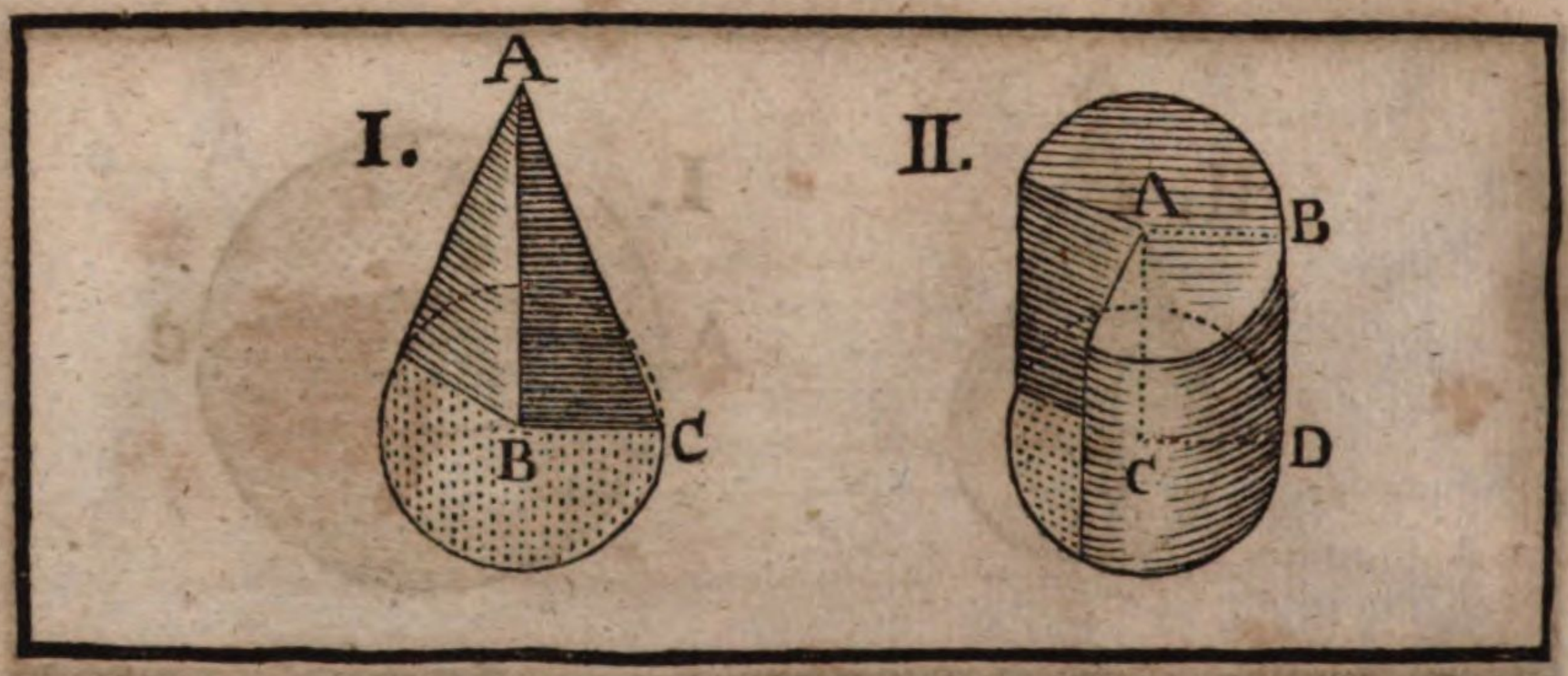
XVIII.

Ein Kögel (Conus) ist eine dichte Figur, welche erwachset, wann ein rechtwincklichter Triangel (CBA), umb eine derjenen Seiten, welche den rechten Winckel mitmachet (als wie umb BA) rings herum, biß an das Ort, allwo man angefangen hat, gedrähet wird. Fig. II,

Mercke, wann AB und BC einander gleich seint: so wird die Figur ein rechter Kögel; ist aber AB kleiner als BC, ein stumpffer; und letztlich wann AB grösser ist als BC, ein spitziger Kögel genandt.

XIX.

Die Achße deß Kögels (AB) ist diejene Linie, umb welcher der Triangel ist gedrähet worden.



XX.

Die Basis deß Kögels ist ein Zirckel, welcher von der herum gedrähten Linie ist gestaltet worden. Fig. I.

XXI.

Eine Waltze (Cylindrus) ist eine dichte Figur, welche gemacht wird, wann ein rechtwincklichtes Parallelogram (ABCD) umb seiner Seiten eine (als wie umb CA) rings herum biß an das Ort, allwo man hat angefangen, gedrähet wird. Fig. II.

XXII.

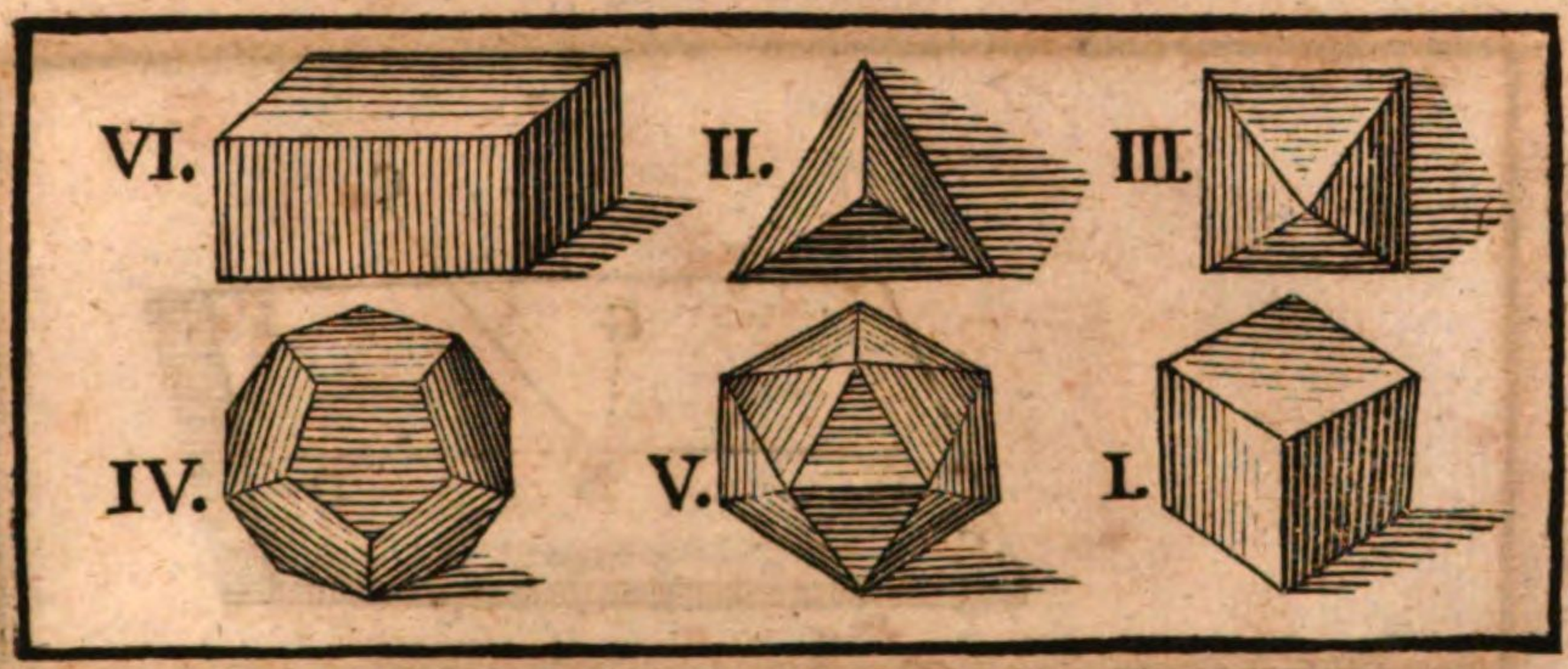
Die Achse der Waltze ist diejene Seiten (CA) umb welcher man das Parallelogram geträhet hat.

XXIII.

Die Basen der Waltzen seint Zirckeln, welche von denen zwey gegen über stehenden Seiten (AB, CD) in Herumdrähen seint gestaltet worden.

XXIV.

Gleichförmige Kögeln und Waltzen seint, welche die Achse und die Diameter ihrer Basen einander geproportionirter haben.



XXV.

Ein Würffel (Cubus) ist eine dichte Figur, welche von sechs gleichen Quadraten beschlossen ist. Fig. I.

XXVI. Tetraedrum ist eine dichte Figur, welche von vier gleichseitigen und gleichen Triangeln beschlossen ist. Fig. II.

XXVII. Octaedrum ist eine dichte Figur, welche von acht gleichseitigen und gleichen Triangeln umbschlossen ist. Fig. III.

XXVIII. Dodecaedrum ist eine dichte Figur, welche von zwölff gleichseitigen, gleichwincklichten und gleichen fünffecken umbschlossen ist. Fig. IV.

XXIX. Icosaedrum ist eine dichte Figur, welche von zwantzig gleichseitigen und gleichen Triangeln beschlossen ist. Fig. V.

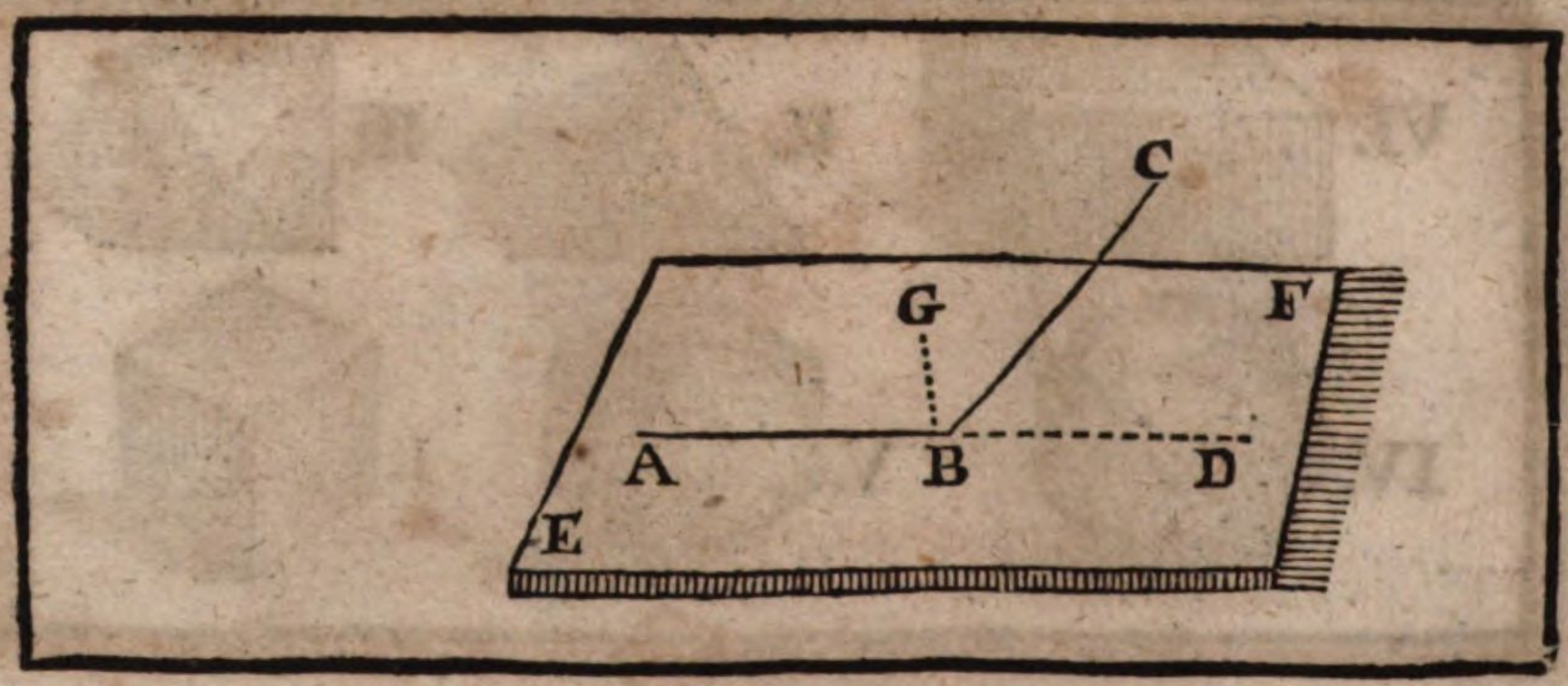
XXX. Parallelepipedum ist eine dichte Figur, welche von sechs viersei-tigen Figuren, deren gegen über stehende allzeit einander Parallel seint, beschlossen ist. Fig. VI.

Mercke; daß deren Parallelepipeden so vielerley Art gebe, als deren Parallelogrammen seynd.

XXXI. Eine dichte Figur, saget man, seye in eine dichte Figur eingeschrieben, wann alle Winckeln der Figur, welche solte eingeschrieben werden, entweder in denen Winckeln, oder in denen Seiten, oder endlich in denen Flächen der Figur, in welche die eine eingeschrieben wird, gestellt seynd.

XXXII. Eine dicke Figur, sagt man, seye umb eine dichte Figur umbschrieben, wann die Winckeln, oder die Seiten, oder letztlich die Fläche der Figur, welche umbschrieben solte werden, alle Winckeln der Figur, umb welche die eine umbschrieben wird, berühre.

Anmerckung. In folgenden Büchern wird gemeiniglich ein dichter Winckel mit vier Buchstaben angedeutet, darvon der erste den Spitz, oder den Punct deß Winckels anweiset. Zu einem Exempel, wann geschrieben ist, der ∠ ABCD. so verstehe, daß der Spitz oder Puncten deß dichten Winckels seye, allwo der Buchstaben A stehet.



Die I. Vorgab.

Betrachtung.

Eine gerade Linie kan nicht mit einem Theil auff einer Fläche, und mit dem übrigen Theil, auff einer andern Fläche liegen.

Seye gegeben, daß in der unterlegten Fläche EF ein Theil von einer geraden Linie, als wie AB, seye; so sagt man, daß auch der übrige Theil BC von der geraden Linie nothwendig auff derselben Fläche, und nicht ausserhalb derselben liegen müsse. Gesetzt, man sagte dannoch, daß BC ausserhalb der Fläche EF seye.

Beweiß.

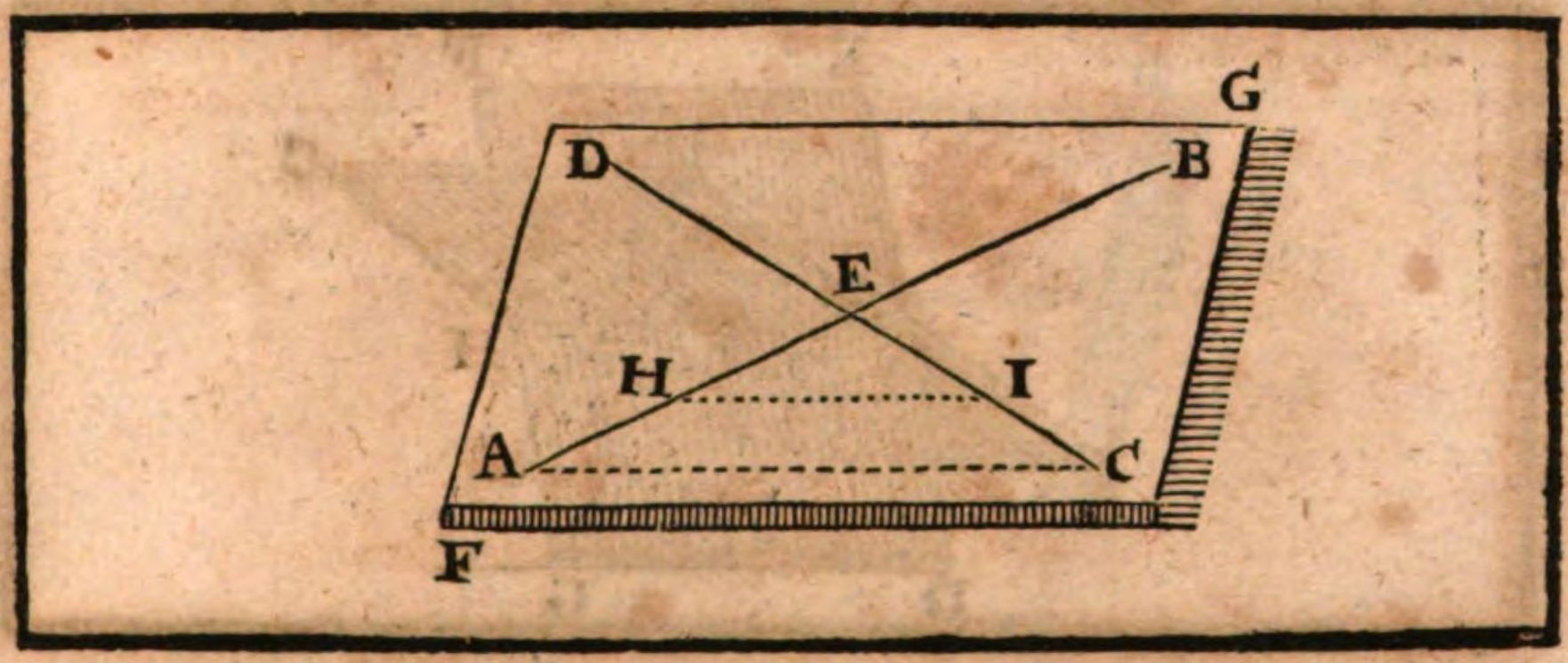
Nun ist es klar, daß auff der Fläche EF eine gerade Linie gleich wie BD kan gezogen werden, welche mit AB in einer geraden Linie fort liege.

Dann, man kan auß B die Linie BG solchergestalt ziehen, daß die zwey ∠ ABG und DBG einander gleich, und dahero zween rechte werden.

Und folgends die ABD in einer geraden Linie fort liege. d. 14. 1.
Unterdessen aber würden BC und BD auß der geraden Linie AB entspringen. Welches ungereimt ist. d. 13. ax. 1.

Dahero schliesset man, daß nothwendig beyde Theile einer geraden Linien auff einer Fläche allein, und nicht ausserhalb derselben, liegen müssen.

Welches zu beweisen ware.



Die II. Borgab.

Betracktung.

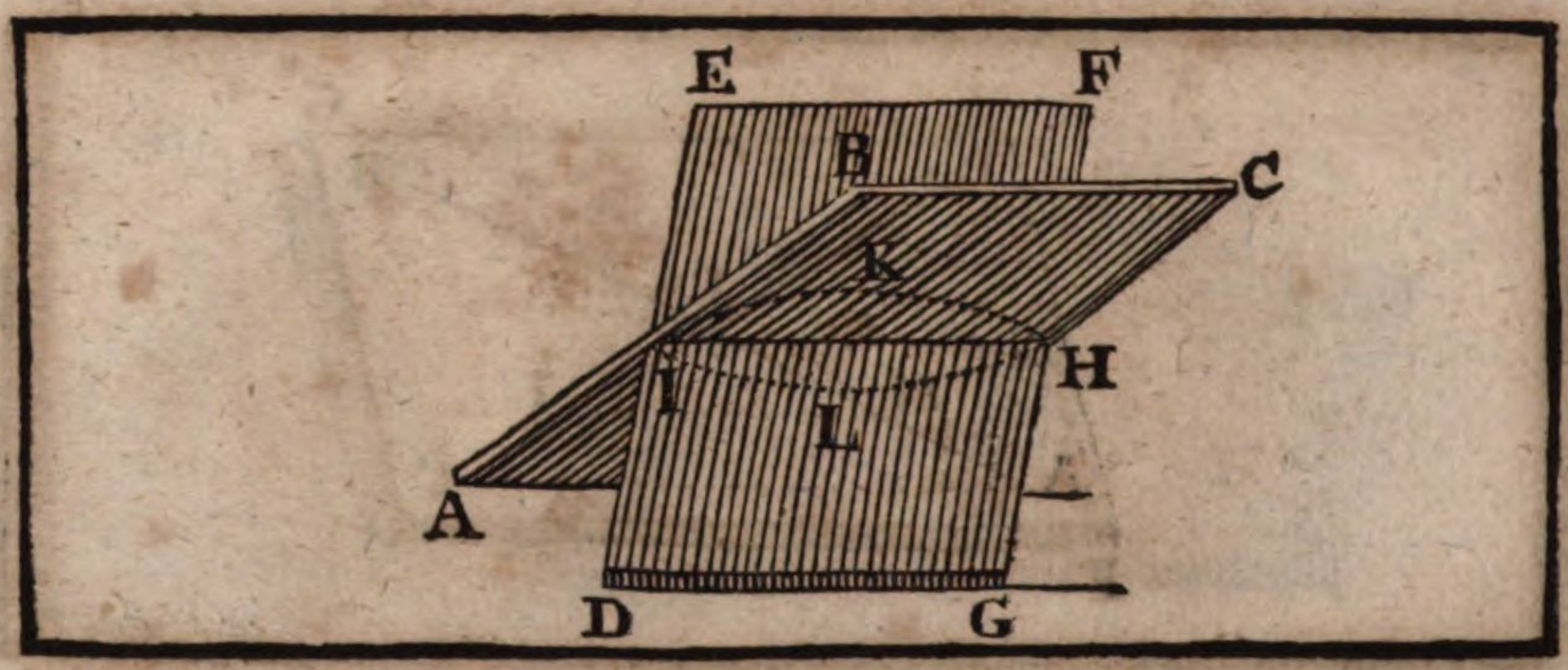
Wann zwey gerade Linien sich einander in einem Punct durchschneiden: so werden sie auff einer Fläche allein liegen. Und ein jeder Triangel lieget auch nur auff einer Fläche allein.

Es ist gegeben, daß die zwey gerade Linien AB und CD sich einander in dem Punct E durchschneiden, und das mit der geradtgezogenen Linie AC, der △ AEC seye gestaltet worden. Diesem nach sagt man, daß der gantze △ AEC, und die gerade Linien AB und CD völlig auff der einigen Fläche FG liegen.

Beweiß.

Wann es nicht geglaubt würde, so seye es, (wofern es möglich ist), daß von dem △ AEC ein Theil, gleich wie AHIC auff einer Fläche, und der andere Theil HEI auff einer andern Fläche liege:
So folgete stracks darauff, daß der Theil AH von der geraden Linie HE auff einer Fläche, und der andere Theil HE darvon, auff einer andern Fläche liegete.
Und auch der eine Theil CI von der geraden Linie CE, auff einer Fläche, und der andere Theil IE darvon, auff einer andern Fläche liegete.
Welches aber nicht seyn kan. d. I. II.
Dahero schliesset man, daß noch der gantze △ AEC nur auff einer Fläche allein, und eben durch diesen Beweiß auch die gantze gerade Linien AEB, und CED auff derselben Fläche allein liegen müssen.

Welches zu beweisen ware.



Die III. Vorgab.

Handgriff.

Wann zwey Flächen sich einander durchschneiden: so ist ihr gemeiner Durchschnitt nur eine gerade Linie allein.

Es ist gegeben, daß die Fläche ABC, und DEFG sich einander durchschneiden. Diesem nach saget man, daß ihr gemeiner Durchschnitt IH nur eine gerade Linie allein seye.

Beweiß.

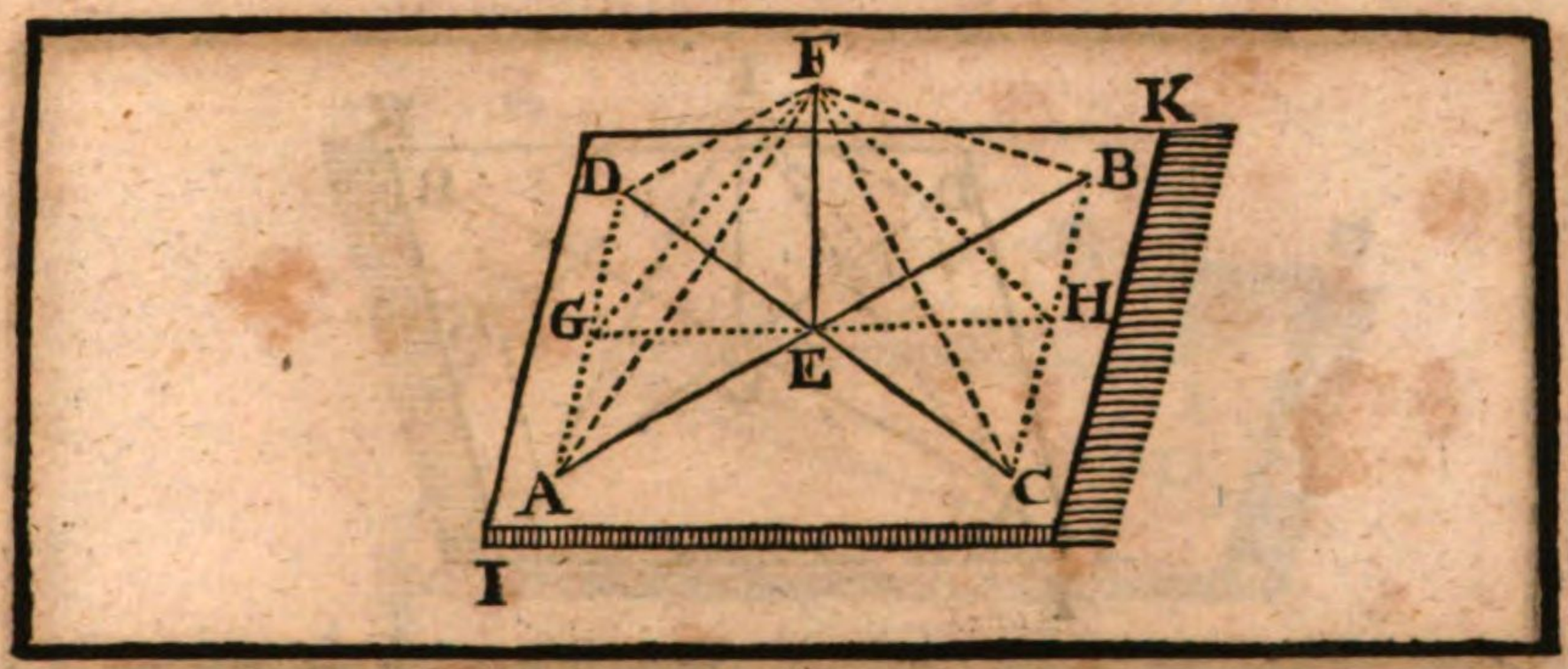
Will man diß nicht glauben, sondern einwerffen, es wäre in der Fläche ABC die gerade Durchschnitts-Linie IKH (wenn es doch möglich ist), und in der Fläche DEFG in andere gemeine gerade Durchschnitts-Linie ILH.

Darauff aber geantwortet wird, das auff solche Weise (indeme beyde gerade Linien IKH, und ILH aus einerley Ende gezogen werden) den Platz IKHL einschliesseten;

So aber nicht seyn kan: d. 12. ax. 1.

Dahero nothwendig zu sagen ist, daß der gemeine Durchschnitt HI nur eine gerade Linie allein seye.

Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab. Betrachtung.

Wann eine auß dem gemeinen Durchschnitt gezogene gerade Linie auff zwey geraden Linien (welche einander sich durchschneiden, bleyrecht stehet: so wird sie auch auff der Fläche, welche durch die zwey gerade Linien durchgezogen verstanden wird, oder darauff sie würcklich liegen, bleyrecht stehen.

Es ist gegeben, daß die gerade Linie EF bleyrecht stehe, auff denen geraden Linien AB, und CD, welche einander sich durchschneiden in E, also, daß die ∠ AEF. DEF. BEF. CEF. vier rechte ∠ seint. Diesem nach sagt man, daß dieselbe Linie EF auch auff der Fläche IK, auff welcher die gerade Linien AB und CD liegen, bleyrecht stehe.

Das ist, eine jede nach Gefallen genommene gerade Linie auff der Fläche IK, und durch den gemeinen Durchschnitts-Punct E gezogene, gleich wie die gerade Linie GEH, wird jederzeit mit EF einen rechten Winckel machen.

Zubereitung.

Mache EA. ED. EB. EC einander gleich.

Ziehe AD und CB zusammen: so wird hierdurch die nach Gefallen genommene Linie GEH in denen Puncten G und H durchgeschnitten.

Hange AF. GF. DF. BF. HF. CF zusammen. Diesem nach,

Beweiß.

In denen △ FEA. FEB. FEC. FED ist die Seiten EF allen gemein.

Und die Seiten EA. ED. EB. EC seynd einander ⊓ gemacht worden. d. d. Zub.

und die ∠ AEF. DEF. BEF. CEF seynd auch einander gleich. d. d. Vorg.

Folget, daß auch die Basen AF. DF. BF. CF einander gleich seint. d. 4. 1.

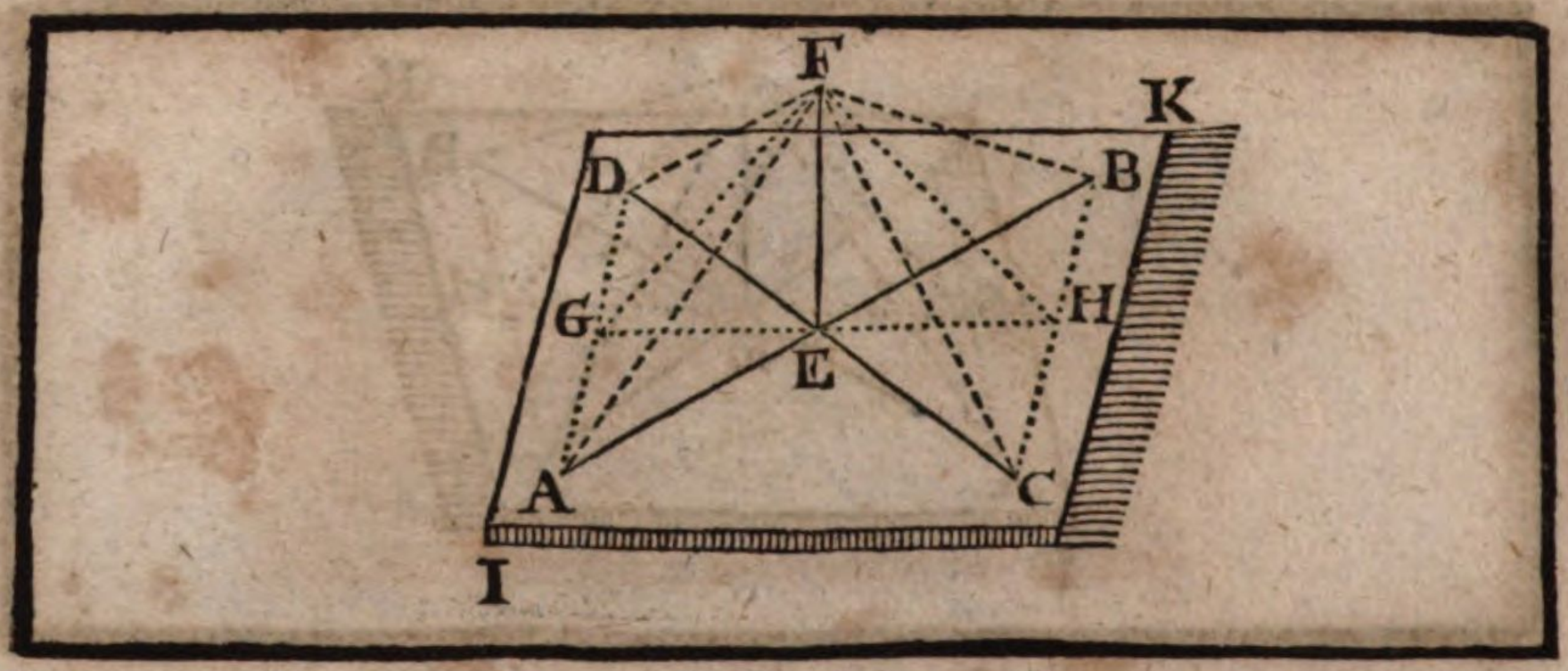
Ferners, in denen zwey △ AED, und CEB, seint

Die zwo Seiten EA. ED ⊓, denen zwo Seiten EC. EB. d. d. Zub.

und der ∠ AED ⊓, dem gegenüberstehenden ∠ CEB. d. 15. 1.

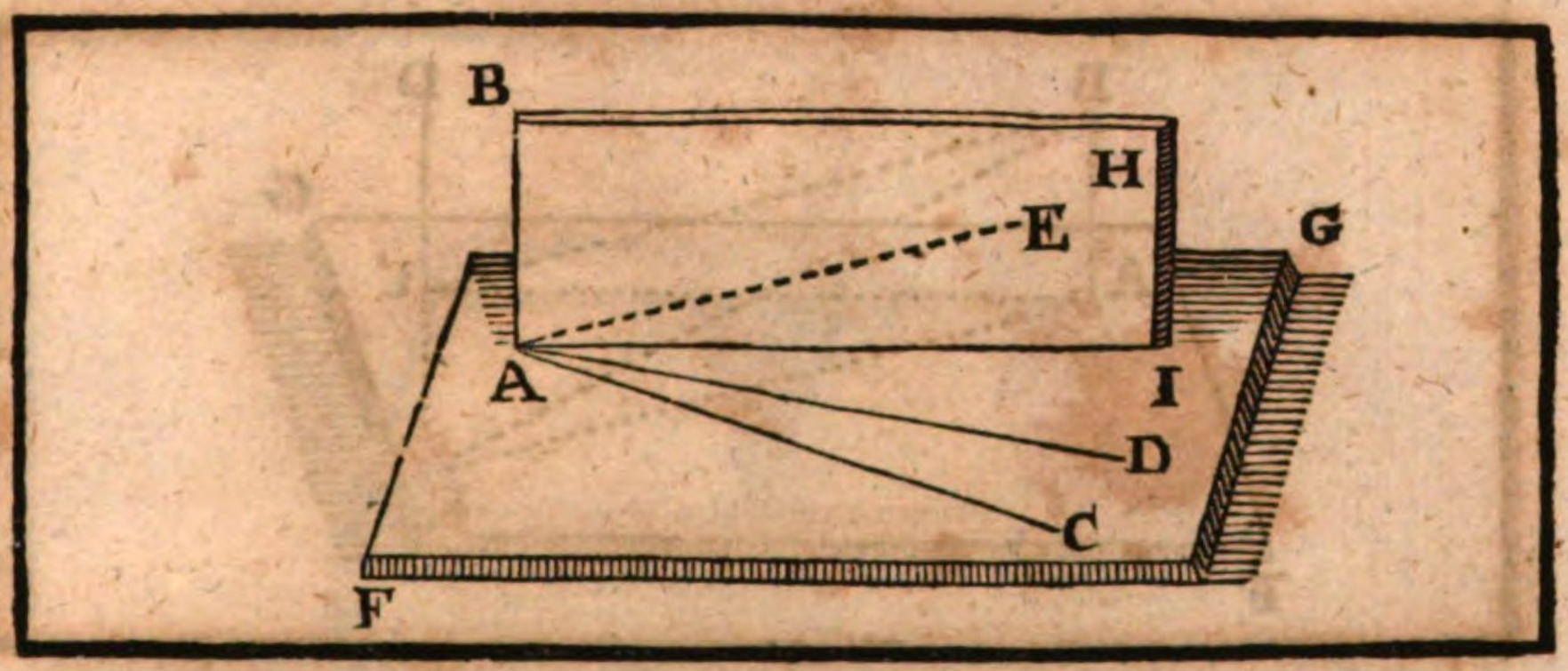
Dahero auch AD ⊓ seyn werde, der CB. d. 4. 1.

Und also der ∠ EDA ⊓, dem ∠ ECB. u. s. f.



Nunmehro in denen zwey △ DGE, und CHE
ist der ∠ DEG ⊓, dem ∠ CEH, d. 15. 1.
Der ∠ GDE, ist auch beweisen worden ⊓, dem ∠ ECH. d. d. Vorg.
und die Seiten ED ist auch ⊓, der Seiten EC. d. d. Zub.
Folget, daß die Seiten DG. GE ⊓ seint, denen Seiten CH. HE. d. 26. 1.
Mehrmahlen in denen zwey △ AFD, und CFB
seynd die zwo Seiten AF. DF ⊓, denen zwo Seiten CF. BF. d. d. Vorg.
und die Basis AD, ist schon ⊓ bewiesen worden, der Basis CB.
Deßwegen die drey ∠ eines △ ⊓ seint, denen drey ∠ deß andern △, d. 8. 1.
Als wie der ∠ FDA ist ⊓, dem ∠ FCB. u. s. f.
Weilen aber in denen zwey △ FDG und FCH ist bewiesen worden,
daß die zwo Seiten FD, DG ⊓ seind, denen zwo Seiten FC. CH,
und der ∠ FDG ⊓ seye, dem ∠ FCH.
So wird auch die Basis GF ⊓ seyn, der Basis FH. d. 4. 1.
Letztlich in denen zwey △ FEG, und FEH ist
die Seiten EF beyden △ gemein.
Und die zwo Seiten EG, GF ⊓, denen zwo Seiten HE, FH. d. d. Vorg.
Dahero auch der ∠ FEG ⊓ ist, dem ∠ FEH. d. 8. 1.
Und deßwegen beyde ∠ zwey rechte seyn werden, und d. 10. def. 1.
die Linie EF auff der, nach Gefallen durch E gezogener, geraden
Linie GEH bleyrecht stehen u. s. f.
Diese GEH aber lieget auff der Fläche IK, worauff die andern d. d. Zub.
zwey Linien AB. CD liegen.
Folget letztlich, daß auch EF auff derselben Fläche IK bleyrecht stehe. d. 3. def. 11.

Welches zu beweisen ware.



Die V. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine gerade Linie auff drey geraden Linien (welche in einem Punct sich einander berühren) bleyrecht stehet: so werden solche drey Linien auff einer Fläche allein liegen.

Es ist gegeben, daß die gerade Linie AB auff denen drey geraden Linien AC. AD. AI, welche einander sich im Punct A berühren, bleyrecht stehen. Diesem nach saget man, daß diese drey Linien AC. AD. AI. auff einer Fläche allein, nemlich auff der Fläche FG, liegen.

Beweiß.

Will man es nicht zulassen: so seye dann, daß eine auß ihnen, nemlich AI, nicht auff der Fläche FG, sondern von derselben erhöhter, als wie AE seye.

Unterdessen seye aber durch EA und AF die Fläche AH gezogen, welche die Fläche FG unterhalb der erhöhten AE durchschneiden, und den gemeinen Durchschnitt AI, welcher zugleich die gerade Linie AI ist, machen werde. d. 3. 11.

Nun ist klar, weilen AB bleyrecht auff AC und AD stehet, d. d. Vorg.
daß dieselbe AB auch bleyrecht auff der Fläche FG stehen werde; d. 4. 11.
und folgends auch bleyrecht auff dem Durchschnitt AI. d. d. selb.

Dahero ist der ∠ BAI ein rechter ∠. d. d. Vorg.

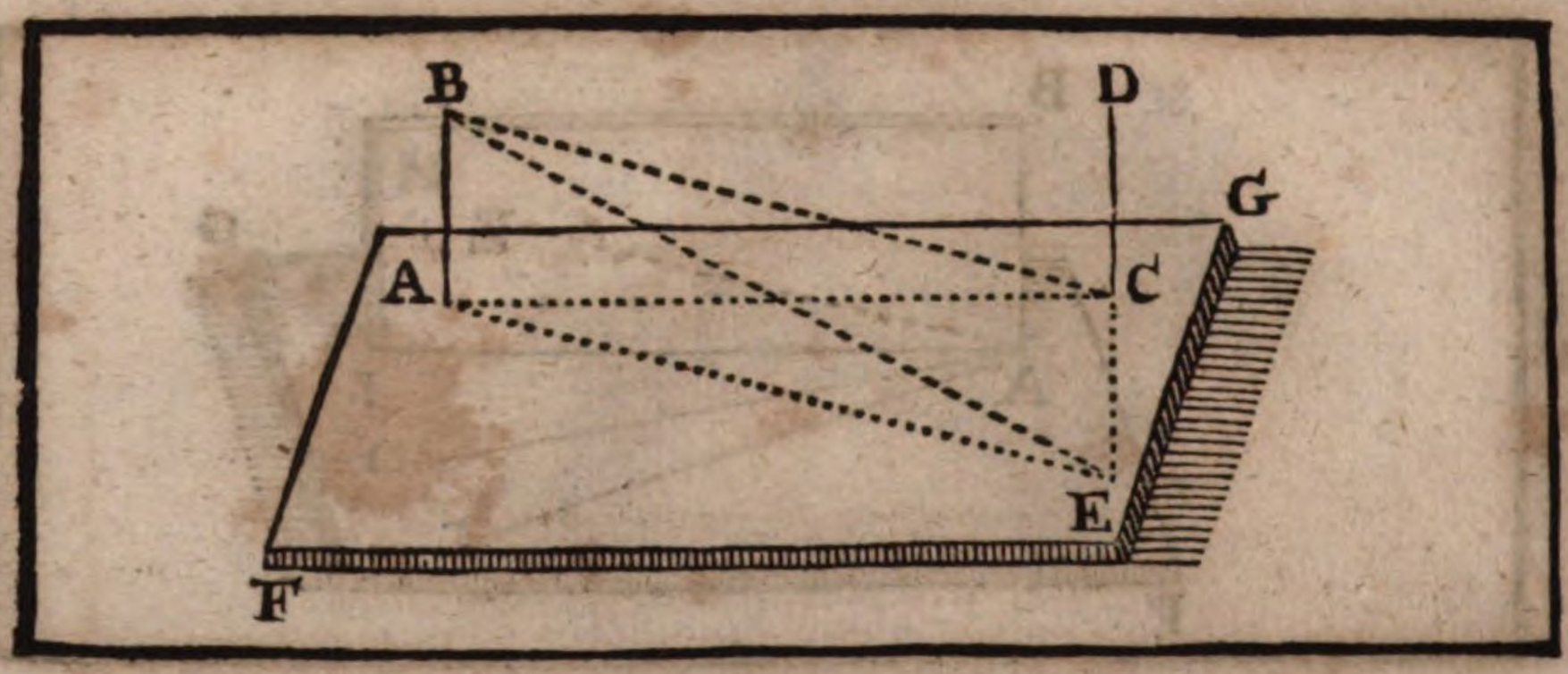
Es muß auch der ∠ BAE ein rechter ∠ seyn:

Folget, daß also der Winckel BAE □ seye, dem ∠ BAI.
(dann beyde auff der Fläche AH wären)

So aber nicht seyn kan; daß nemlich ein Theil □ seye, seinem Gantzen.

Darum schliesset man, daß die drey Linien AC. AD. AI. nur auff der Fläche FG allein liegen.

Welches zu beweisen ware.



Die VI. Vorgab.

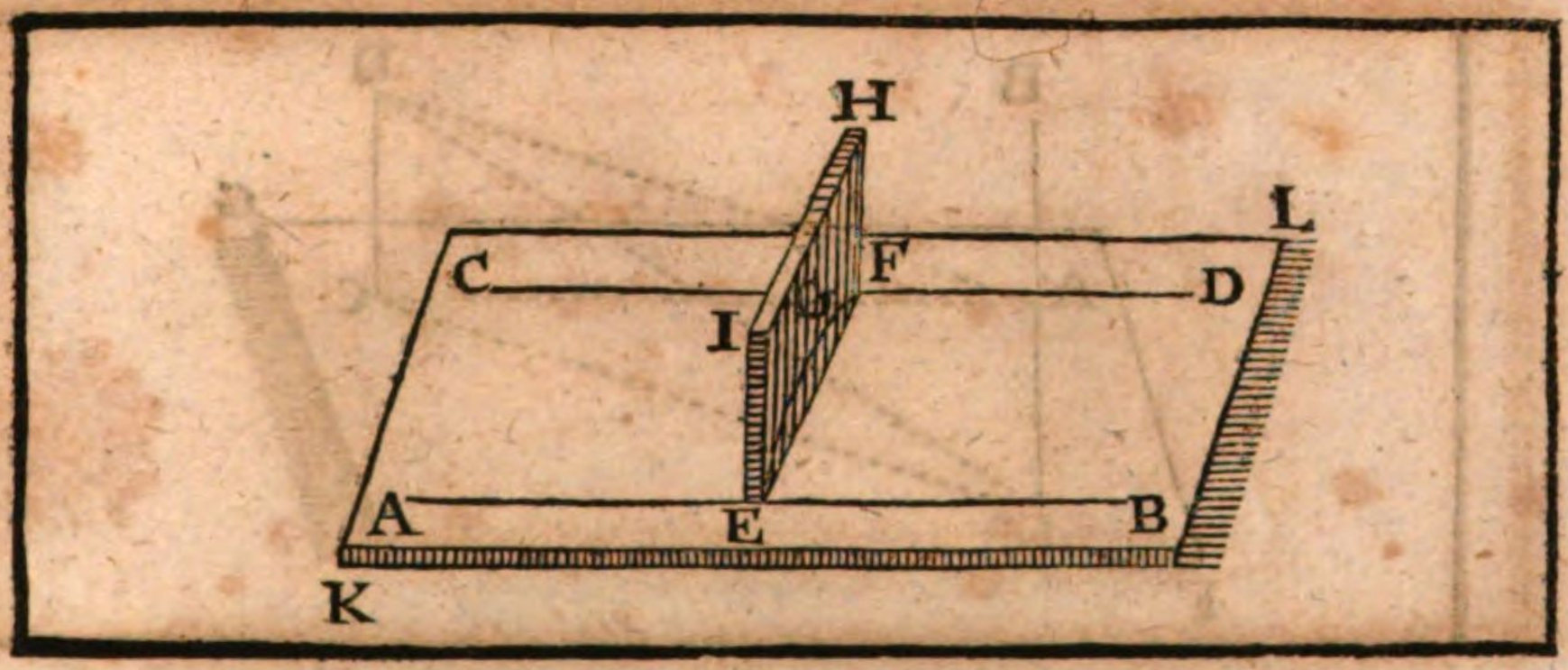
Betrachtung.

Wann zwey gerade Linien auff einerley Fläche bleyrecht stehen: so seynd sothane Linien einander Parallel.

Es seynd gegeben die zwey gerade Linien AB. CD, welche bleyrecht stehen auff der Fläche FG. Diesem nach saget man, daß sie einander Parallel seynd. Ziehe vorhero A. C. zusammen, so ist klar, daß die ∠ BAC. DCA zween rechte seynd; hernach in der Fläche FG auff AC erhöhe die bleyrechte EC. Mache EC ⊓, der AB. Letzelich ziehe zusammen AE. BE. BC.

Beweiß.

In denen zwey △ CAB, und ACE ist die Seite AC beyden △ gemein.
und die Seiten AB ⊓, der Seiten CE. d.d.Zub.
und der ∠ BAC ⊓ dem ∠ ACE (dann beyde rechte seynd).
Dahero auch die Basis BC ⊓ ist, der Basis AE. d. 4. I.
Abermahlen in denen zween △ BEA. CBE ist die Basis BE beyden △ gemein,
und die zwo Seiten AB. AE seynd ⊓ bewiesen denen zwo Seiten CE. BC.
Folget, daß auch der ∠ BAE ⊓ seye, dem BCE. d. 8. I.
der ∠ BAE ist aber ein rechter: dahero auch der ∠ BCE ein rechter ist.
Es ist auch der ∠ DCE ein rechter: d. 3. def. II.
Deßwegen wird die Linie EC auff denen drey Linien CD. CB. CA ⊥ stehen.
und folgends die drey Linien CD. CB. CA. werden auff einer Fläche liegen. d. 5. II.
Das ist: CD ist in der Fläche, welche durch die Linien CD. CB. CA gezogen, verstanden wird.
So ist auch AB in derselben Fläche, in welcher CB. CA seynd: d. 2. II.
Dahero seynd CD und AB in einer Fläche.
Dieweilen nun die inwendige ∠ BAC. DCA zween rechte ∠ seynd. d. d. Vorg.
So wird letztlich AB = seyn, der CD. d. 28. I.
Welches zu beweisen ware.



Die VII. Borgab.

Betrachtung.

Wann zween Puncten in zweyen Parallel-Linien genommen, und mit einer geraden Linie zusammen gezogen werden: so wird sothane Linie in derselben Fläche, worauff die Parallel seynd, liegen.

Es ist gegeben, daß in denen zwey Parallel-Linien AB, CD, zween Puncten, gleich wie E und F, nach Gefallen seynd genommen, und mit einer geraden Linie zusammen gezogen worden. Diesem nach sagt man, daß die gerade Linie EF eben auff derselben Fläche KL, worauff die Parallel-Linien seynd, liege.

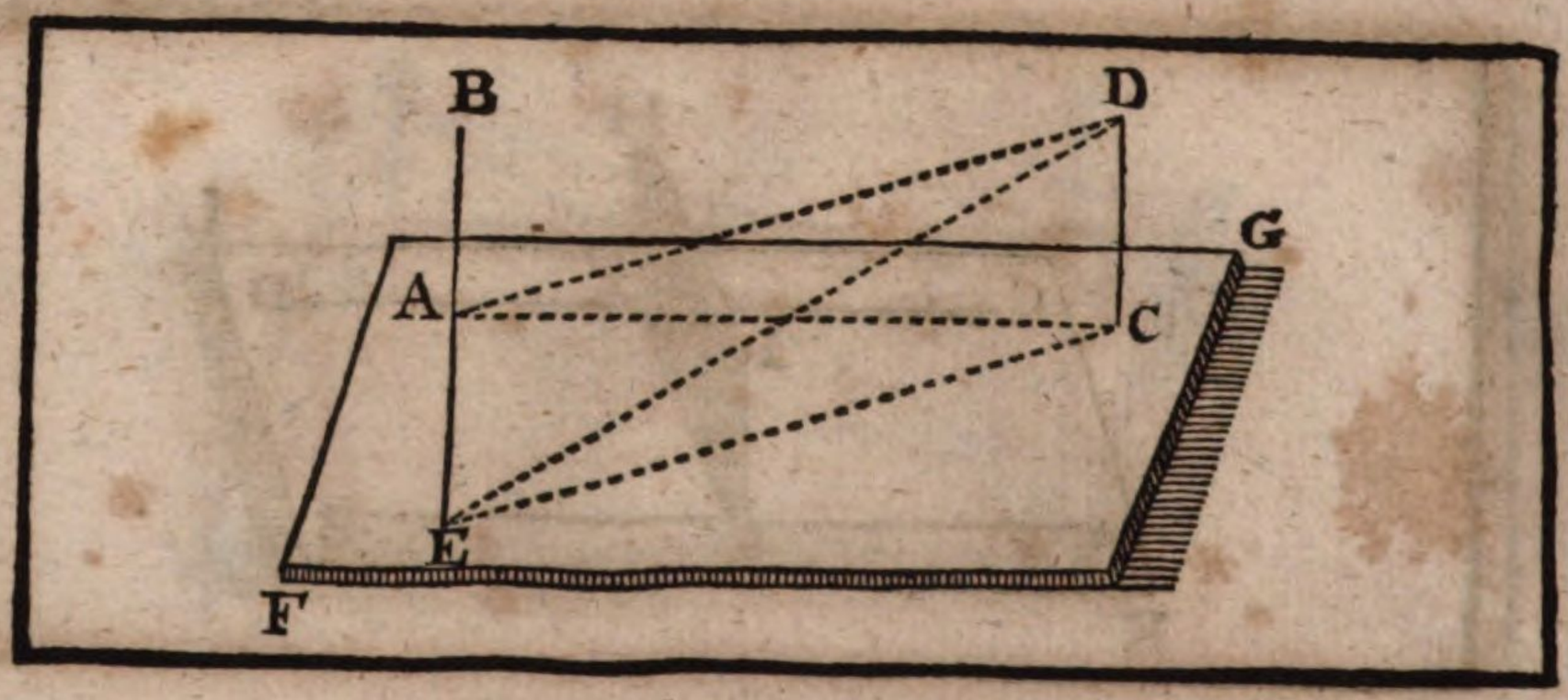
Beweiß.

Solte man es nicht gestehen, sondern einwenden, daß die gerade Linie EF nicht auff der Fläche KL, sondern gleich wie EGF, ausserhalb derselben, in einer andern Fläche 1H, (welche verstanden wird durch die zween Puncten E und F durchgezogen zu seyn) liege.

Worauff aber folgete, daß hierdurch zwey gerade Linien EGF und EF, welche aus einerley Endes-Puncten E und F gezogen seint, den Platz EGF einschliesseten, welches ungereimt ist. d. 12. ax. l.

Dahero schliesset man, daß die gerade EF nothwendig auff derselben Fläche KL, worauff die Parallel-Linien AB, CD seynd, liege.

Welches zu beweisen ware.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Parallel-Linien seint, von welcher eine auff einer Fläche bleyrecht stehet, so wird auch die andere auff derselben Fläche bleyrecht stehen.

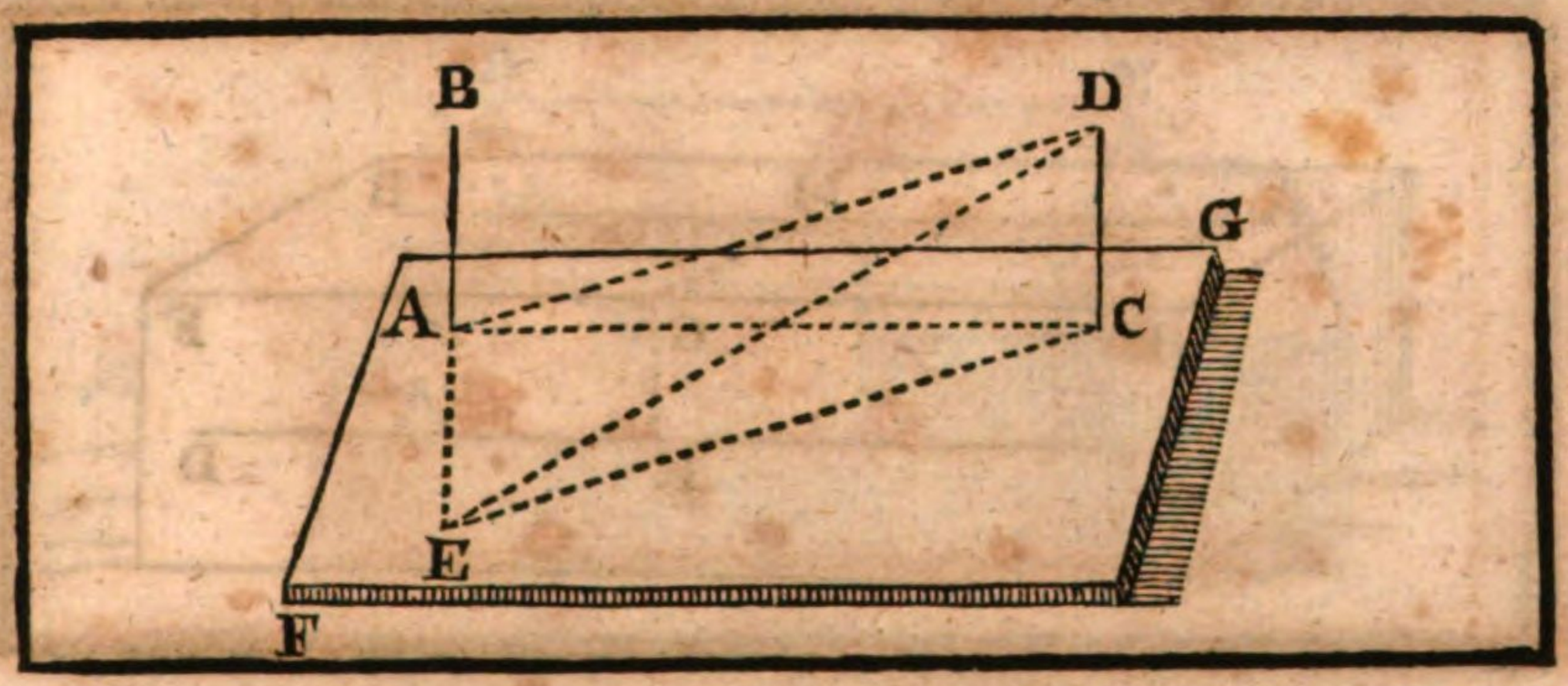
Es ist gegeben, daß die zwey Linien AB und CD einander Parallel seint, und daß die eine CD auff der Fläche FG ⊥ stehe. Diesem nach sagt man, daß auch die andere AB auff derselben Fläche FG bleyrecht stehe.

Zubereitung.

Ziehe AC und AD zusammen.
Auff AC und aus A, mache die ⊥ AE ⌐, der Linie CD.
Hange EC, und ED zusammen.

Beweiß.

Erstlich ist klar (weilen die gezogene gerade Linie AC auff der Fläche FG lieget, worauff auch CD ⊥ stehet), daß der ∠ DCA ein rechter seye. d. 3. def. 11.
Es seynd unterdessen die zween ∠ DCA, und BAC ⌐, zwey rechten ∠. d. 29. 1.
Folget, daß auch der ∠ BAC ein rechter ∠ seye.
Nunmehro seynd in denen zween △ DCA, und EAC
die Seiten CD ⌐, der Seiten AE, und die Seiten AC ist beyden △ gemein, d. d. Zub.
und der ∠ DCA ⌐, dem ∠ BAE (dann sie beyde rechte seynd).
Dahero ist auch die Basis AD ⌐, der Basis EC. d. 4. 1.
Abermahlen in denen zween △ DCE und EAD ist die Seiten
ED beyden △ gemein, und die Seiten CD ist ⌐, der Seiten AE; d. d. Zub.
so ist auch bewiesen worden, daß AD ⌐ seye, der EC.



Folget, daß der △ DCE ⌐ seye, dem △ EAD.
und also der ∠ DCE ⌐, dem ∠ EAD. d. 8. I.

Der ∠ DCE ist aber ein rechter ∠. d. 3. def. I.
Dahero auch der ∠ EAD ein rechter ∠ seyn werde.

Weilen nun die gerade Linie EA auff beyden geraden Linien
AC und AD ⊥ stehet:

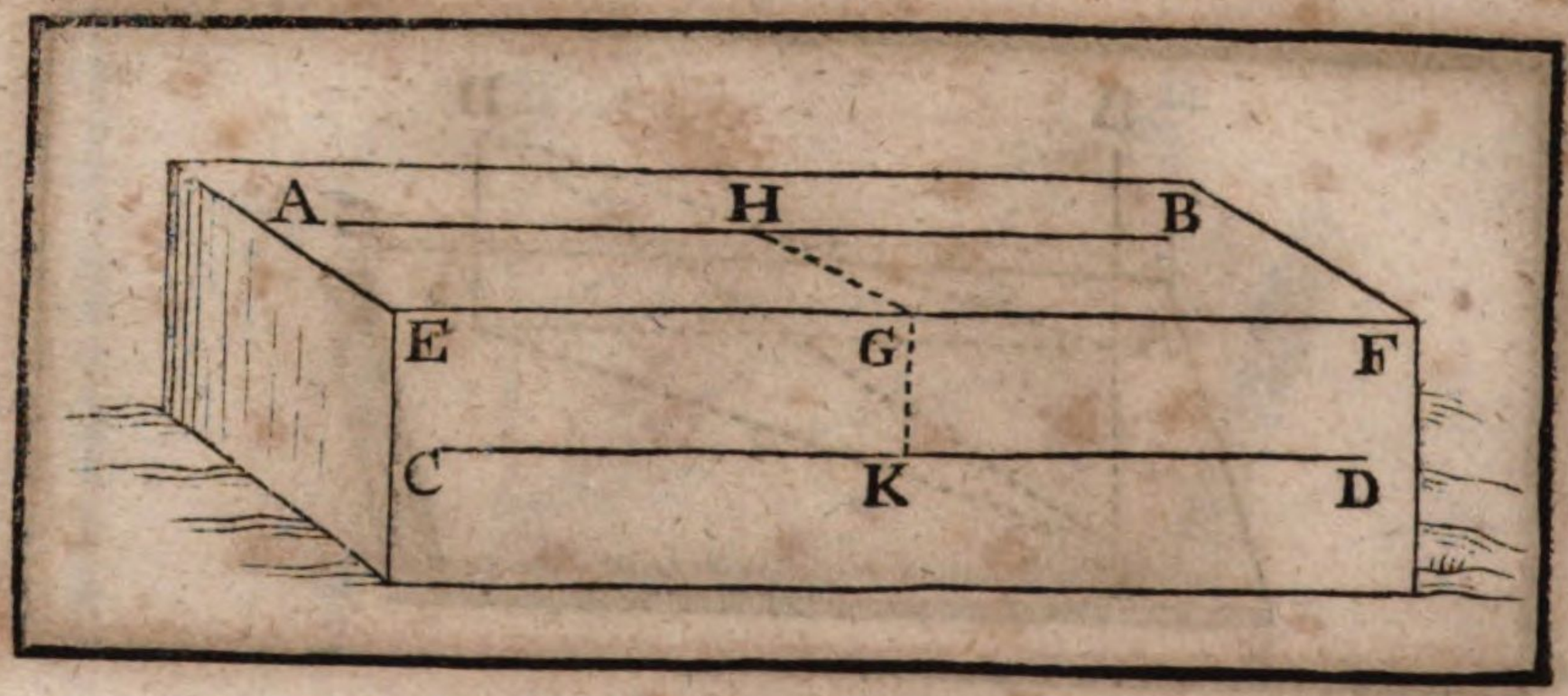
So stehet sie auch ⊥ auff der Fläche (welche durchgezogen zu seyn
durch die Linien AC und AD verstanden wird). d. 4. II.

In selbiger Fläche aber stehet auch die gerade Linie BA.
(dann AC, und AD seynd in derselben Fläche, worauff die Parallel- d. 7. II.
Linien AB und CD liegen).

Dahero stehet die gerade Linie EA auch ⊥ auff AB.

Auß diesen schliesset man, daß also AB, indeme sie so wol auff EA,
als auff AC, ⊥ stehet, (auch) auff der Fläche, welche durch EA und
AC durchgezogen verstanden wird (das ist, auff der Fläche
FG) ⊥ stehe. d. 4. II.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Vorgab.

Betrachtung.

Gerade Linien, welche einer andern geraden Linie Parallel seynd (obwolen sie nicht auff einerley Fläche liegen,) seynd auch unter einander Parallel.

Es seynd gegeben AB, und CD ═, der geraden Linie EF; wie wohl nun AB und CD in verschiedenen Flächen liegen, so saget man, daß dennoch AB ═ seye, der CD. und dahero alle drey Linien AB, EF, CD einander ═.

Zubereitung.

Auff der Fläche ABFE ziehe auß AB nach Gefallen an die Linie EF die ⊥ HG. d. 11. I.

Wiederumb auff der Fläche EFDC ziehe aus CD in Punct G die ⊥ GK. d. 12. I.

Beweiß.

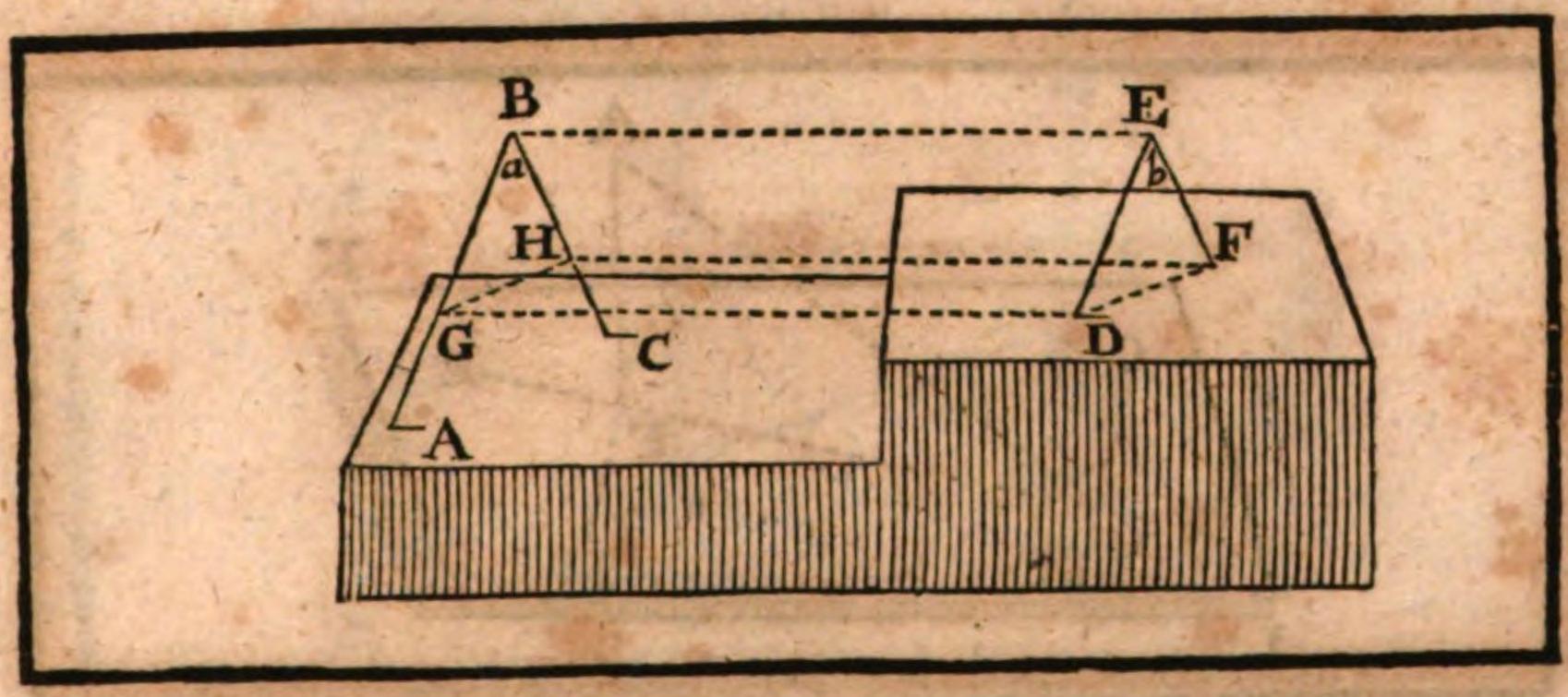
Weilen EF ⊥ ist beyden GH und GK. d. d. Zub.
so wird sie auch ⊥ stehen auff der Fläche, welche durchgezogen verstanden wird durch HGK. d. 4. II.

Unterdessen ist gegeben, daß AB ═ seye, der EF, und
EF ist bewiesen worden, daß sie ⊥ seye auff der Fläche, welche durch HGK gezogen verstanden wird.

Folget, daß auch AB auff eben derselben Fläche ⊥ stehe. d. 8. II.
auff solche Weise stehet auch CD auff derselben Fläche ⊥.

Dahero schliesset man, weilen die gerade Linien AB, CD auff einer Fläche, nemlich auff der Fläche, welche durch HGK gezogen, verstanden wird, ⊥ stehen, daß AB ═ seye der CD. d. 6. II.

Welches zu beweisen ware.



Die X. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey gerade Linien, welche sich einander anrühren, Parallel seint, andern zwey geraden Linien, welche sich auch einander anrühren; wiewolen sie nicht auff einer Fläche allein liegen oder stehen: so werden sie dannoch gleiche Winckeln machen.

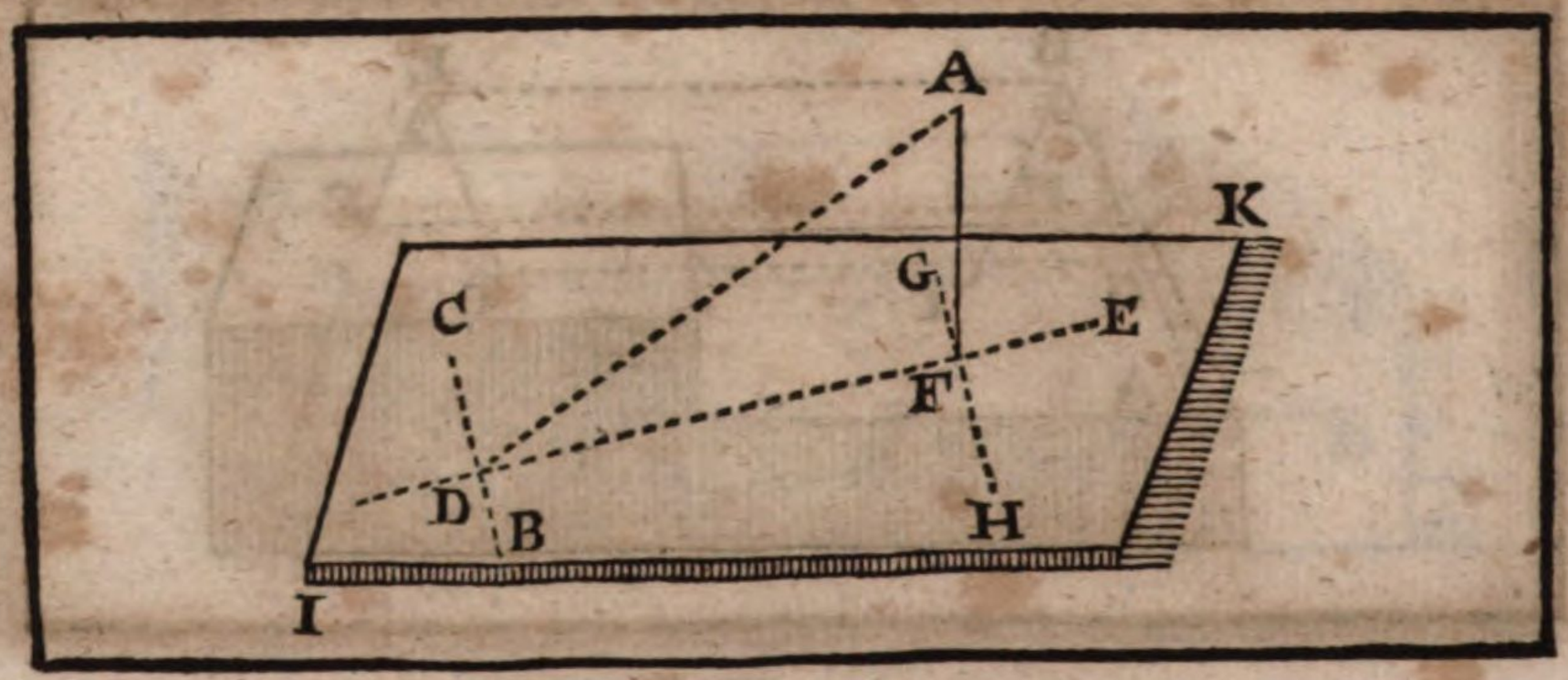
Es seynd gegeben die gerade Linien AB, CB, welche sich anrühren in B, und Parallel seint, denen zwo geraden Linien DE, FE, welche sich anrühren in E, es seint auch AB, CB in einer verschiedenen Fläche, als DE, FE. Diesem nach saget man, daß nichts destoweniger der ∠ a ⊓ seye, dem ∠ b.

Zubereitung.

Mache BG ⊓, ED, und BH ⊓, der EF.
Hange zusammen GD, BE, HF, und GH, DF.

Beweiß.

Die Linie GB ist ⊓, und ═, der Linie DE. — d. d. Zub. u d. Vorg.
Dahero ist die Linie GD auch ⊓, und ═, der Linie BE. — d. 33. 1.
Eben auff solche Weise ist die Linie HF ⊓, und ═, der Linie BE.
und folgends die Linie GD ⊓, und ═, der Linie HF. — d. 9. 11. und ax. 1.
Auch deßwegen ist die Linie GH ⊓, und ═, der Linie DF. — d. 33. 1.
Weilen nun in denen zween △ GBH, und DEF, die zwo Seiten GB und HB ⊓ seynd, denen zwo Seiten DE, und FE. und die Basis GH ist ⊓ bewiesen worden, der Basis DF. — d. d. Zub.
So folget letztlich, daß der ∠ a ⊓ seye, dem ∠ b. — d. 8. 1.
Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

Auß einem Puncten in der Höhe (gleich wie auß A) eine bleyrechte Linie (nemlich AF) in die untergelegte Fläche (IK) herunter zu lassen.

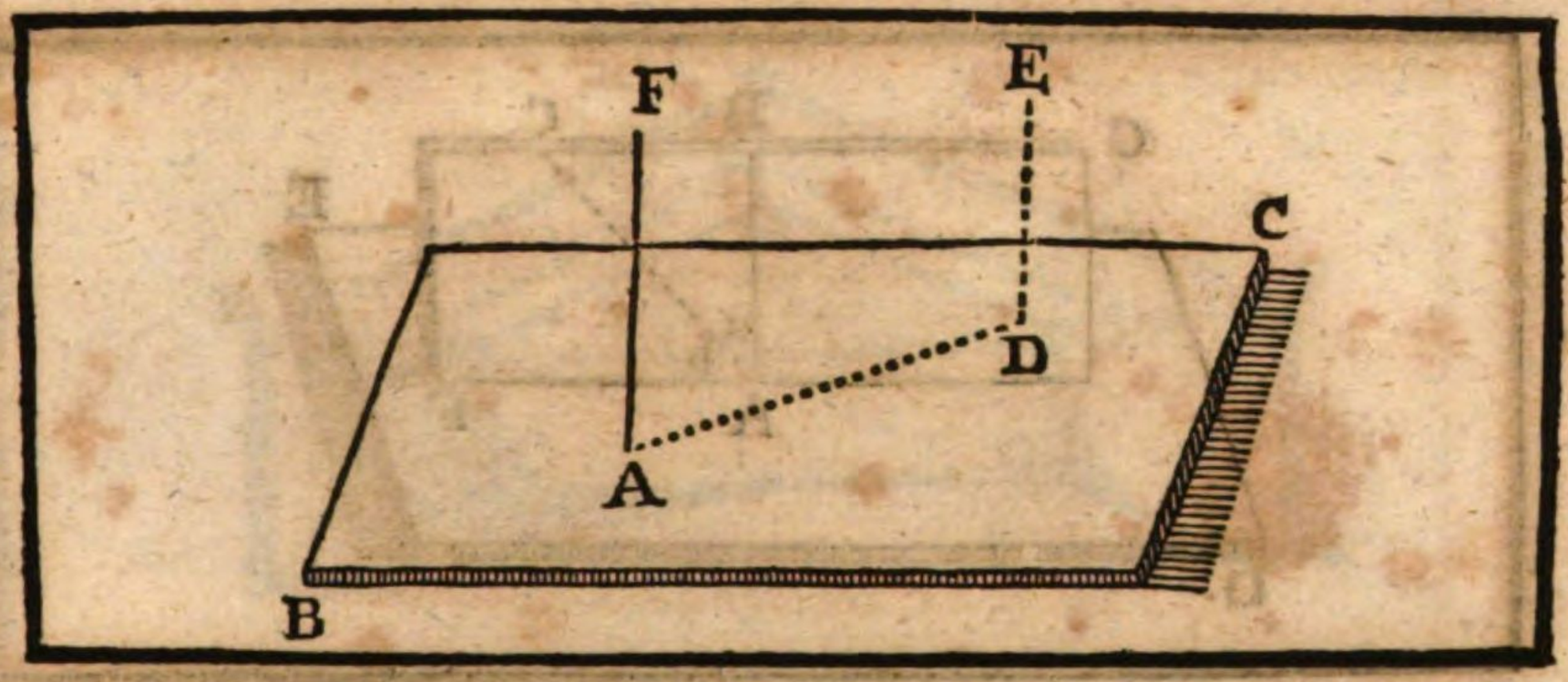
Handgriff.

Ziehe auff der Fläche IK nach Gefallen eine gerade Linie CB.
Auß A ziehe auff CB hinunter, die ⊥ AD. d. 12. I.
Mache auß dem Punct D auff CB die ⊥ DE. d. 11. I.
Auß A auff DE, lasse herunter die ⊥ AF fallen. d. 12. I.
Nun sage ich, daß AF auch ⊥ stehen werde auff der Fläche IK.
Ziehe vorhero durch F die Linie GFH ═, der Linie CDB. d. 31. I.

Beweiß.

Die gerade Linie BC ist ⊥ auff denen zwo Linien DA und DE. d. d. Hand.
Darum stehet sie auch ⊥ auff der Fläche, welche durch DA und DE gezogen verstanden wird. d. 4. II.
Weilen auch GH ═ ist, der CDB, so wird eben GF ⊥ stehen, auff derselben Fläche, welche durch DA und DE gezogen verstanden wird. d. 8. II.
Indeme aber AF in derselben Fläche, worauff die Linien DA, und DE seint, lieget, und GF in F berühret:
So wird der ∠ GFA ein rechter ∠ seyn. d. 3. def. II.
Es ist auch der ∠ AFD ein rechter ∠ gemacht worden. d. d. Hand.
Dahero, weilen AF auff denen zwey Linien DE und GF ⊥ stehet, so wird dieselbe AF auch ⊥ auff der Fläche IK stehen. d. 4. II.

Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer Fläche, und auß einem darauff gegebenen Puncten eine bleyrechte Linie zu erhöhen.

Es ist gegeben auff der Fläche BC der Punct A, auß welchem eine ⊥ zu erhöhen seye.

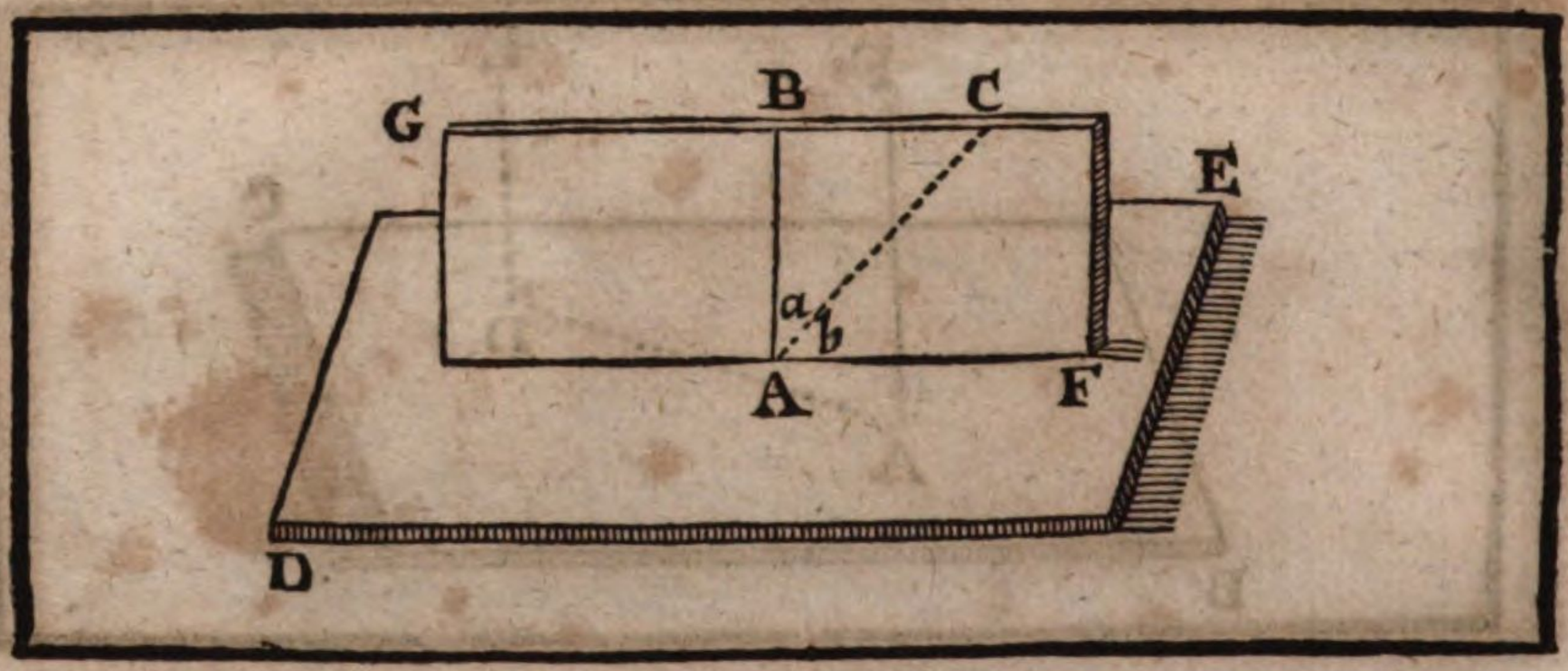
Handgriff.

Nehme nach Gefallen in der Höhe den Punct E.
Lasse auß E die bleyrechte Linie ED hinunter fallen. d. 11. 11.
Auß dem Punct A ziehe AF ═, der DE. d. 31. 1.
so wird AF die verlangte ⊥ seyn, welche auff der Fläche BC hat sollen erhöhet werden.
Ziehe A. D. zusammen.

Beweiß.

Die Linie AF ist ═, der DE. d. d. Hand.
Die Linie DE aber stehet ⊥ auff der Fläche BC. d. d. Vorg.
Folget, daß auch die Linie AF ⊥ stehe auff derselben Fläche BC. d. 8. 11.

Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

Auß einem Puncten auff einer Fläche, kan nur eine bleyrechte Linie auff einerley Seiten erhoben werden.

Es ist gegeben die Fläche DE, und der Punct A darauff. Diesem nach sagt man, daß auß dem gegebenen Punct A nicht mehr bleyrechte, als nur die eine AB. auff einerley Seiten könne überhoben werden.

Beweiß.

Wann es möglich ist, zulasse man, daß zu einem Exempel die zwey bleyrechte AB. AC auß dem Punct A auff der Fläche DE seynd erhoben worden.

Seye unterdessen verstanden, als wann die Fläche GF durch beyde ⊥ AB, AC, (welche dahero auff einer Fläche seynd) gezogen wäre.

Diesem nach folget (weilen beyde Linien AB. AC ⊥ auff der Fläche DE seynd), daß der ∠ a + b und der ∠ b zwey rechte ∠ seynd. d. 3 def. 11.

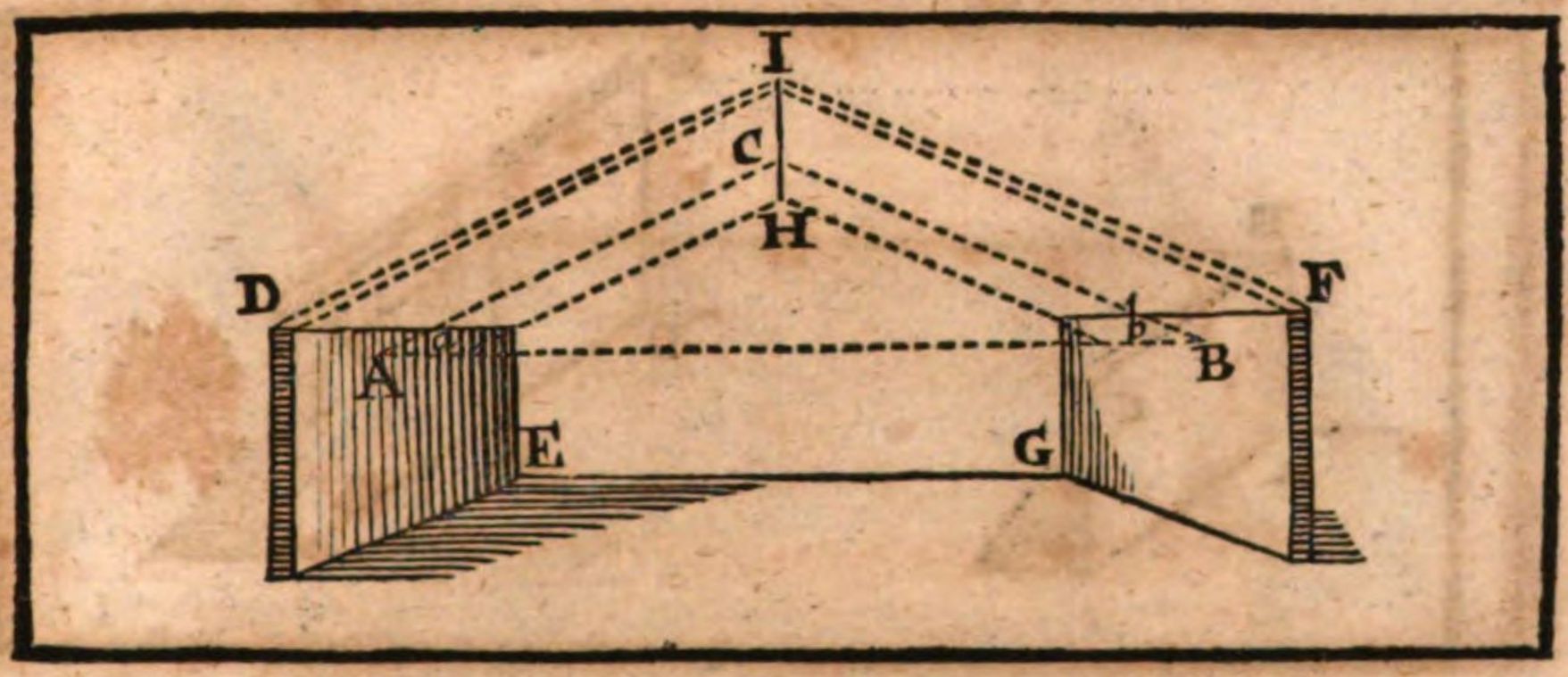
und darumb einander gleich, (nemlich ein gantzes seinem Theil), welches ungereimt ist.

Daranß dann zu schliessen ist, daß auff der vorgegebenen Fläche DE, und auß dem darauff gegebenen Punct A nur eine ⊥, gleichwie AB, auff einerley Seiten kan erhoben werden;

Welches zu beweisen ware.

Anmerckung.

So können auch nicht zwey ⊥ auß einem Punct, welcher in der Höhe ist, auff die unterlegte Fläche gezogen werden. Die Ursach ist, daß (wann solche zwey ⊥ auff einer Fläche allein gezogen würden, wegen gleichen, daß ist, rechten ∠ sothane ⊥ einander = wären. (d. 6. 11.) Diß aber ist ungereimt, massen sie auß einem Puncten gezogen seynd.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

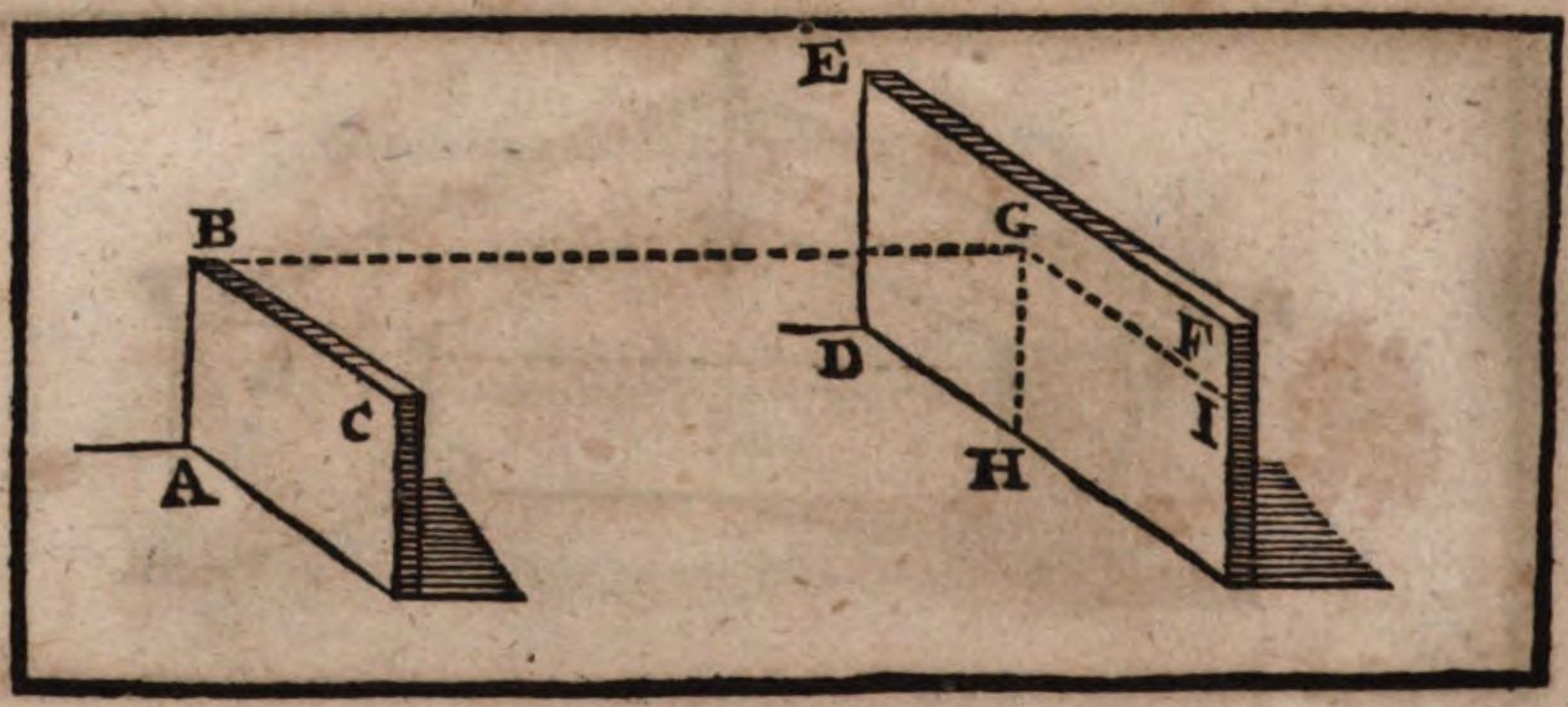
Diejene Fläche, darauff eine gerade Linie beyderseits bleyrecht stehet, seynd einander Parallel.

Es ist gegeben, daß die gerade Linie AB beyderseits bleyrecht stehet auff denen Flächen DE und GF. Diesem nach sagt man, daß die Fläche DE = seye, der Fläche GF.

Beweiß.

Sagete man, es wären die zwey Flächen DE, FG nicht einander =; so gebete man stracks zur Antwort, daß solche dann, nothwendig gegen einer Seiten werden zusammen kommen müssen; Seye dahero ihr gemeiner Durchschnitt HI.
In diesem Durchschnitt nehme ohngefehr den Punct C, und ziehe AC und BC auff denen Flächen DE und GF.
Dieweilen nun die gerade Linie AB, so wohl auff der Fläche DE, als auff der Fläche GF ⊥ stehet: d. d. Vorg.
So folget, daß in dem △ ACB, die zwey ∠ a und b zwey rechte ∠ seynd.
Diß aber kan nicht seyn, massen alle drey ∠ sammentlich eines △ nur zwey rechten ∠ gleich seint. d. 17. 1.
Dahero schliesset man, daß noch wahr seye, daß die Fläche DE, GF, worauff beyderseits die gerade Linie AB ⊥ stehet, einander = seynd.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey gerade Linien, welche einander sich berühren, Parallel seynd zweyen andern geraden Linien, welche sich auch in einem Punct berühren, nicht aber auff einerley Fläche liegen: so seynd auch die Flächen, welche durch sothane Linien gezogen werden, einander Parallel.

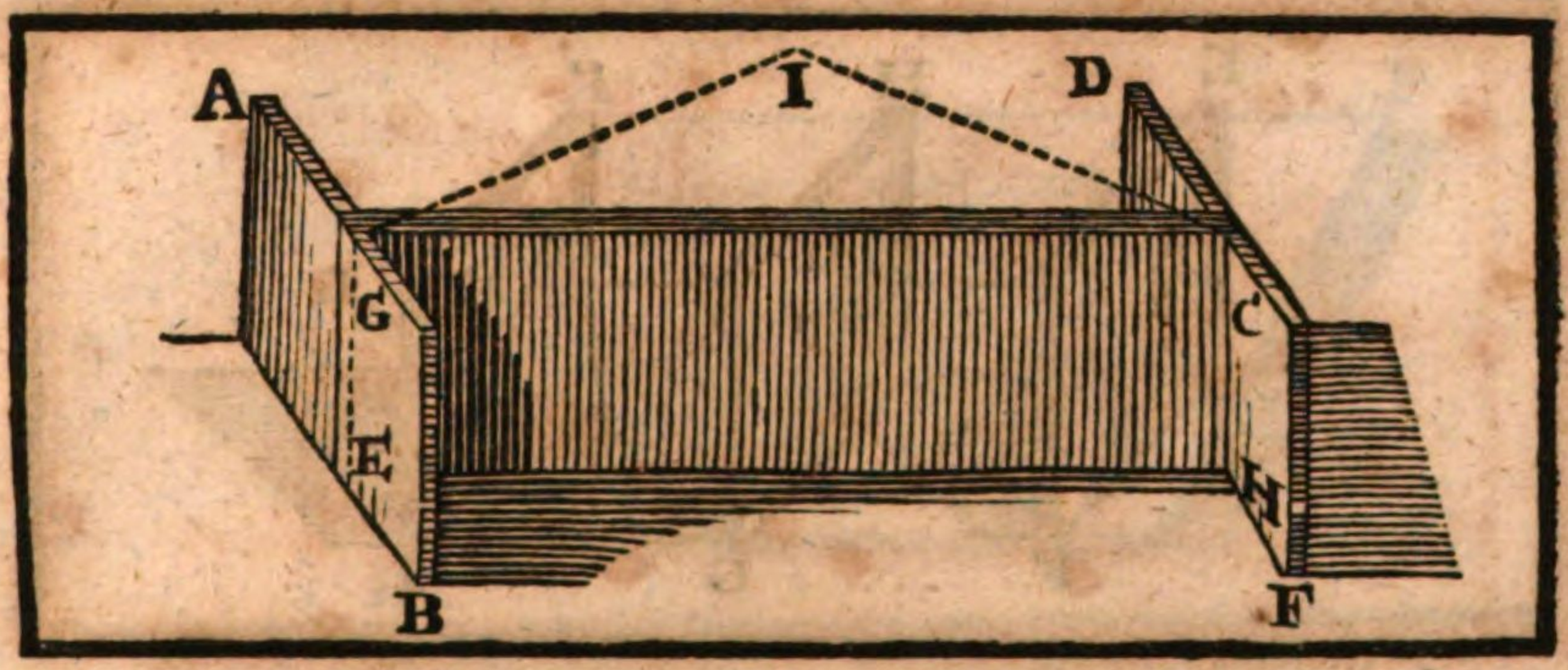
Es ist gegeben, daß die zwey geraden Linien AB, BC, welche sich in B berühren, = seynt, andern zwey geraden Linien DE, EF, welche sich auch berühren in E, und in einer andern Fläche liegen. Diesem nach sagt man, daß die Fläche ABC und DEF, welche durch die Linien AB, BC, und DE, FF gezogen worden, einander = seynd.

Ziehe vorhero auß B die Linie GB ⊥ auff die Fläche DEF. d. 11. 11.
Hernach auß G ziehe GH = denen ED und EF. d. 31. 1.

Beweiß.

Es ist klar, daß die Linien GH, GI = seynt, denen BA und BC. d. 9. 11.
Nunmehro, weilen BC = ist, der GI:
so werden die zween ∠ GBC und BGI □ seyn, zween rechten ∠. d. 29. 1.
Der ∠ BGI aber, ist ein rechter gemacht worden. d. d. Zub.
Darumb auch der ∠ GBC ein rechter ∠ seyn werde.
Eben auff diese Weise wird bewiesen, daß auch der ∠ GBA ein rechter seye.
Darauff folget, daß also die Linie GB ⊥ auff der Fläche ABC stehe. d. 4. 11.
Es ist auch dieselbe GB ⊥ gemacht worden auff der Fläche DEF. d. d. Zub.
Dahero schliesset man, daß die Fläche ABC = seye, der Fläche DEF. d: 14. 11.

Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab.

Betrachtung.

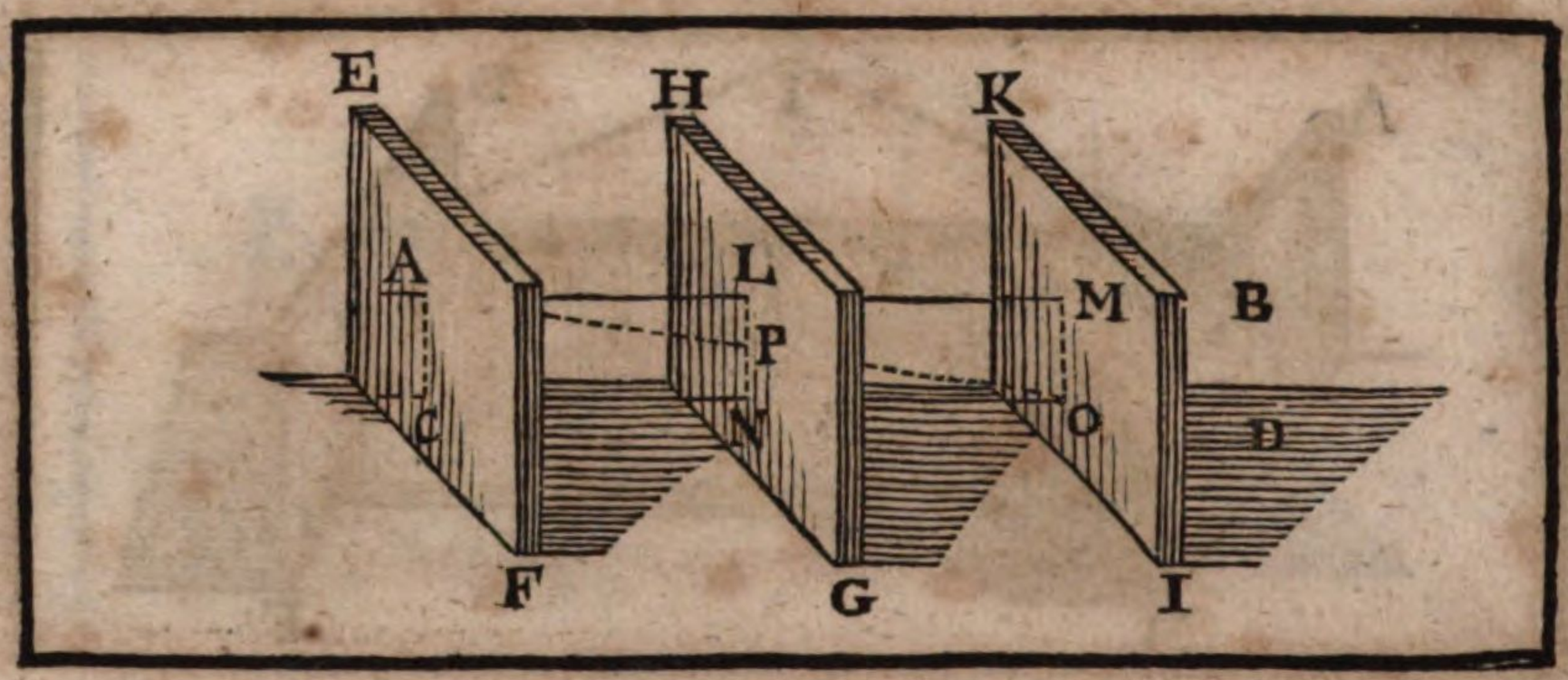
Wann zwey Parallel-Flächen mit einer andern Fläche durchschnitten werden: so werden auch ihre gemeine Durchschnitte einander Parallel seyn.

Es ist gegeben, daß die zwey Parallel-Fläche AB, DF mit der Fläche EG, CH durchschnitten worden seynd. Diesem nach saget man, daß ihre gemeine Durchschnitte EG, HC auch einander Parallel seynd.

Beweiß.

Will man es nicht gestehen, daß diese zwey Durchschnitte, oder gerade Linien EG, HC einander = seynd: so werden sie nothwendig in einem Punct (gesetzt als wie in I) zummen kommen müssen.
Worauff aber folget, daß nothwendig die Fläche AB und DF auch in demselben Punct I werden zusammen kommen, und sich alldorten durchschneiden müssen. d. I. II.
(dann die gerade Linie EGI völlig auff der Fläche AB, und die gerade Linie HCI völlig auff der Fläche DF zu liegen kommet).
Diß aber kan nicht seyn, indeme die Fläche AB anfänglich = gegeben worden ist, der Fläche DF. d. d. Vorg.
Dahero noch warhafftig ist, daß die Durchschnitte EG und HC einander = seyn müssen.

Welches zu beweisen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

Zwey gerade Linien werden mit Parallel-Flächen proportionirlich durchschnitten.

Es seynd gegeben die zwey gerade Linien AB, CD, welche durchschnitten seynd von denen Parallel-Flächen EF, HG, KI, in denen Puncten A, L, M, und C, N, O. Diesem nach sagt man, daß die zwey gerade Linien AB, CD proportionirlich durchschnitten seynd, nemlich daß seye AL, LM:: CN, NO.

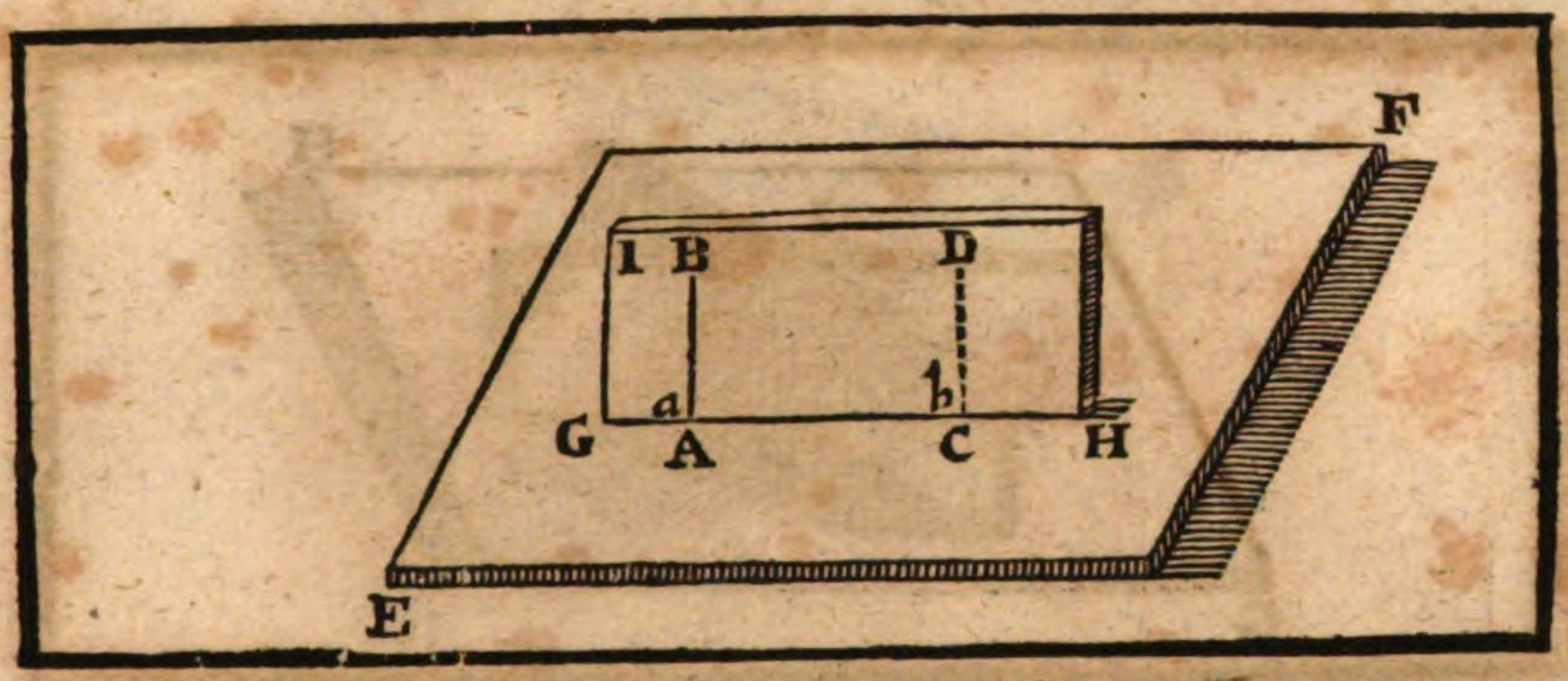
Zubereitung.

Ziehe AC, MO zusammen.
So hange auch AO mit einer geraden Linie zusammen, welche die Fläche HG durchschneidet im Punct P.
Ziehe PL, PN zusammen.

Beweiß.

Nunmehro, weilen die Parallel-Flächen KI, HG durchschnitten seint mit der Fläche deß △ AOM.
So werden ihre gemeine Durchschnitte MO, LP einander = seyn. d. 16. 11.
Eben auff diese Weise werden AC, und PN einander = seyn.
Dessentwegen ist AP, PO :: AL, LM. d. 2. 6.
und auch AP, PO :: CN, NO.
Letztlich AL, LM :: CN, NO. d. 9. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

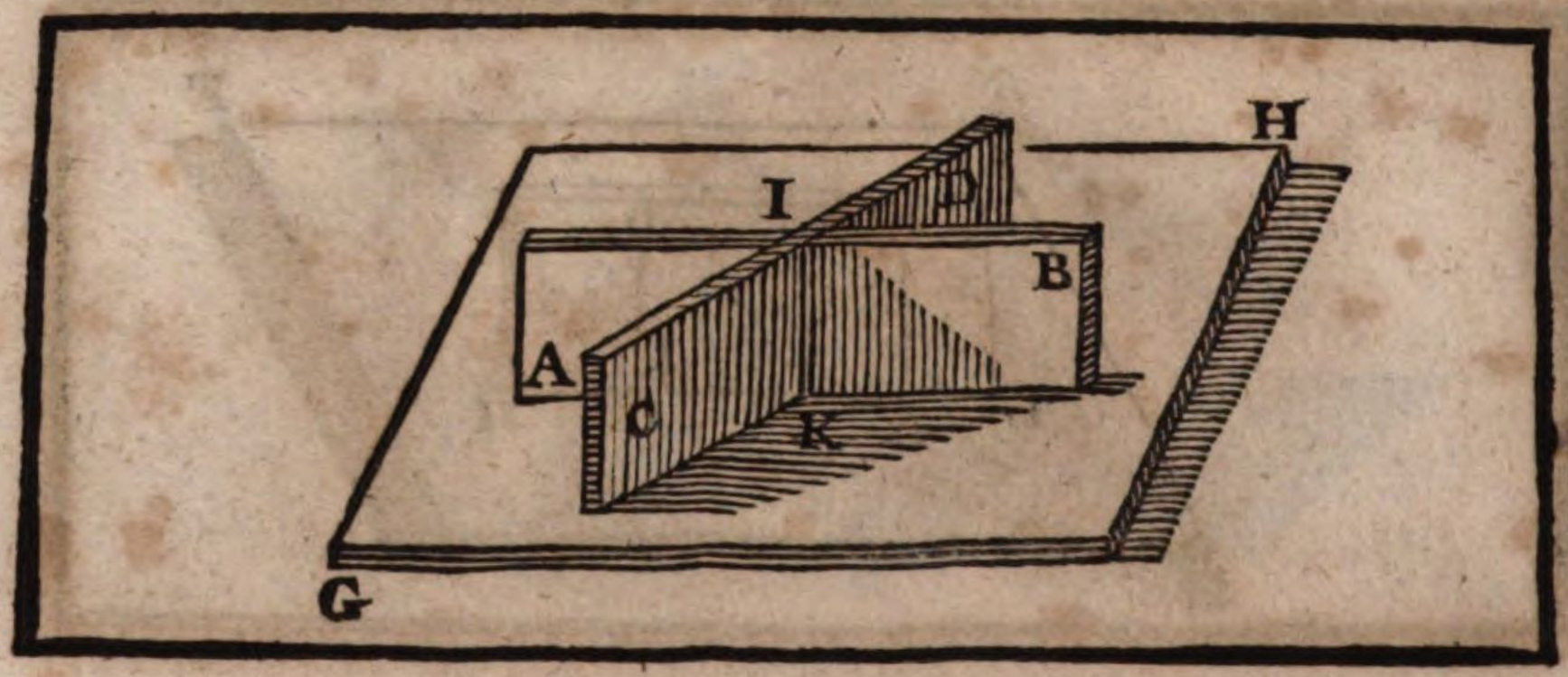
Wann eine gerade Linie auff einer Fläche bleyrecht stehet: so werden alle die jene Flächen, welche durch diese gezogen werden, auch auff derselben Fläche bleyrecht stehen.

Es ist gegeben die Linie AB ⊥ auff der Fläche EF. Diesem nach sagt man, daß alle Flächen, gleich wie die Fläche GIH, welche durch AB gezogen seynd, auch ⊥ auf derselben Fläche EF stehen.

Beweiß.

Seye erstlich der gemeine Durchschnitt der Fläche GIH und EF die gerade Linie GH.
Nehme darauff nach Gefallen den Punct C.
Auß C in der Fläche GIH ziehe CD ═, der AB. d. 31. I.
Diesem nach, weilen die Linie AB ═ ist, der Linie CD,
Die Linie AB aber gegeben ist ⊥ auff der Fläche EF. d. d. Vorg.
So wird CD auch auff derselben Fläche EF ⊥ stehen, d. 8 11.
und darumb ist sie auch ⊥ auff dem gemeinen Durchschnitt GH: d. 3. def. 11.
Auff solche Weise werden alle Linien, welche in der Fläche GIH der geraden Linie AB ═ gezogen seynd, ⊥ auff der Fläche EF, und folgends auch ⊥ auff dem gemeinen Durchschnitt GH stehen.
Und dahero muß auch die Fläche GIH auff der Fläche EF ⊥ stehen. d. 4. def. 11.

Welches zu beweisen ware.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

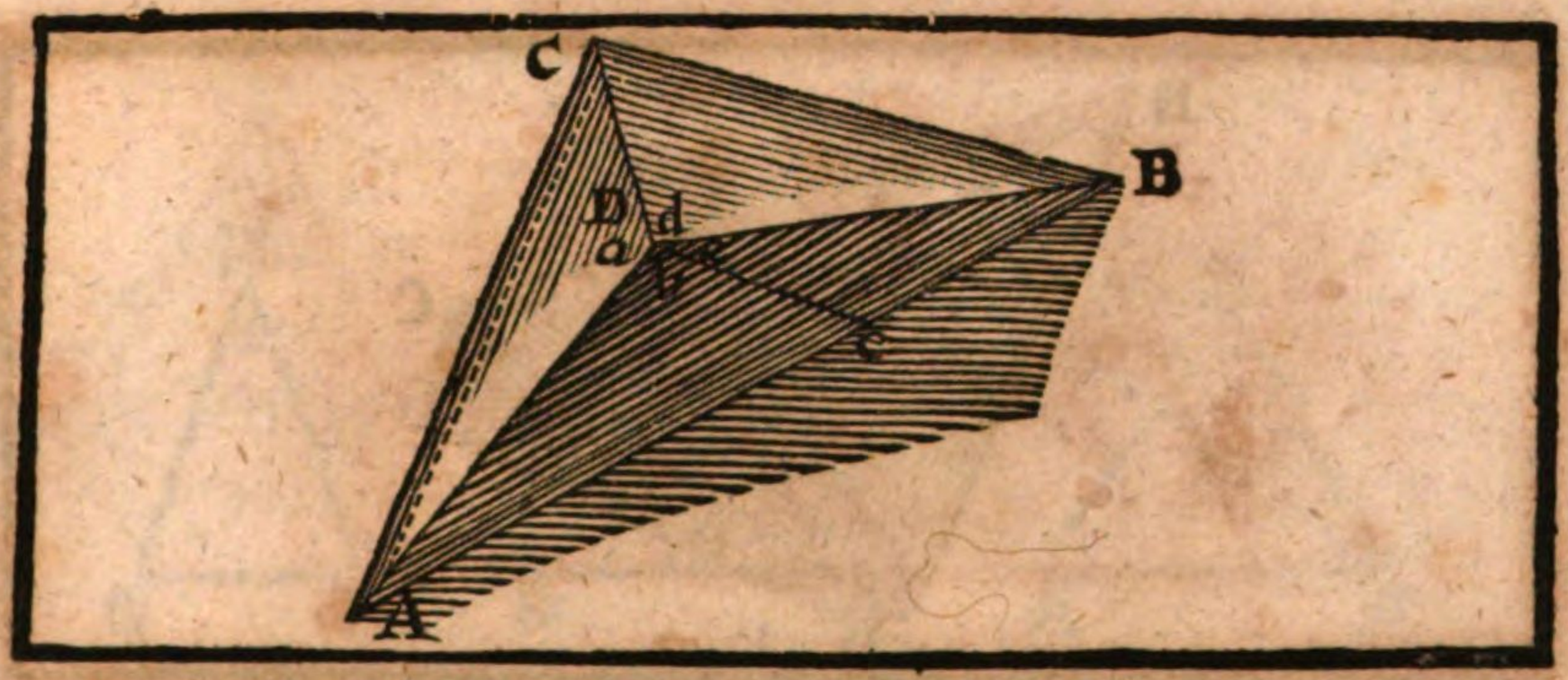
Wann zwey Flächen sich einander durchschneiden, und auff einerler Fläche bleyrecht stehen: so wird auch der gemeine Durchschnitt auff derselben Fläche bleyrecht stehen.

Es seynd gegeben die zwey Flächen AB, CD, welche bleyrecht auff der Fläche GH stehen, und sich einander durchschneiden. Diesem nach sagt man, daß auch ihr gemeiner Durchschnitt KI auff derselben Fläche bleyrecht stehe.

Beweiß.

Die zwey Flächen AB und CD stehen ⊥ auff der Fläche GH.	d. d. Vorg.
Dahero kan auff der Fläche GH auß dem gemeinen Punct K in beyde Flächen AB und CD eine ⊥ gezogen werden.	d. 4. def. 11.
Auß einem Punct K aber können nicht mehr, als nur eine ⊥ (gleich wie KI) auff der Fläche GH erhoben werden.	d. 13. 11.
Folget dahero, daß der gemeine Durchschnitt KI (welcher dieselbe einige Linie ist) ⊥ auff der Fläche GH stehen müsse.	d. 3. 11.

Welches zu machen ware.



Die XX. Vorgab. Betrachtung.

Wann drey flache Winkeln einen dichten Winkel machen; so werden darvon zwey zusammen genommen allzeit grösser seyn, als der dritte Winckel allein.

Es ist gegeben der dichte ∠ D zusammengesetzter von denen drey flachen ∠ a, d und b + c: Diesem nach sagt man, daß aus diesen dreyen ∠ zwey zusammen genommen, allzeit ⌜ seint, als der dritte allein.

Wann nun erstlich alle drey ∠ a, d, b + c einander gleich seint: so ist klar, daß auß diesen zwey zusammen genommen allzeit ⌜ seint, als der dritte allein.

Zum anderten, wann nur zwey einander gleich, und der dritte ∠ kleiner, als ein jeder von beyden, ist: so ist abermal klar, daß von diesen zwey zusammen genommen allzeit ⌜ seint, als der dritte.

Letztlich, wann alle drey ∠ einander ungleich seint, und zwar solcher Gestalt, zu einem Exempel, daß der ∠ b + c unter ihnen der gröste gesetzt seye.

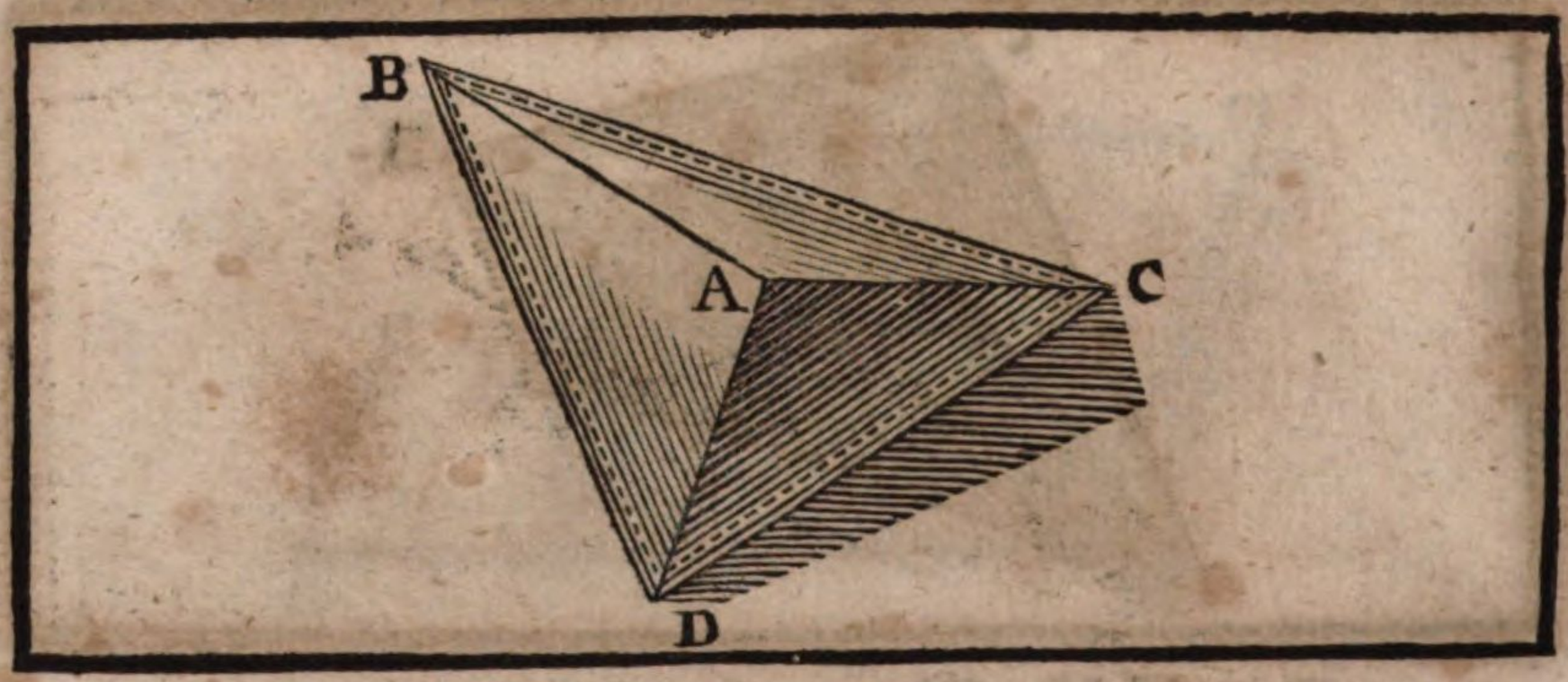
So beweiset man hiermit, daß dannoch die andere zwey ∠ a und d zusammen genommen, ⌜ seint, als der gröste ∠ b + c allein.

Zubereitung. Auff der Fläche ADB ziehe nach Gefallen die gerade Linie AB, und mache mit der Linie DE (welche gezogen wird auß D biß AB) den ∠ b ⌐, dem ∠ a. d. 23. 1.

Nehme CD ⌐ der DE, und hange AC, CB zusammen.

Beweiß. In denen zwey △ ADC, und ADE ist die Seiten AD beyden △ gemein, und die Seiten CD ⌐ der Seiten DE. d. d. Zub.
und der ∠ a ⌐, dem ∠ b.
Dahero ist auch die Basis AC ⌐, der Basis AE. d. 4. 1.
Unterdessen seint die Seiten AC, und CB ⌜, als die Seite AB. d. 20. 1.
Wann man nun von denenselben die zwey gleiche Linien AC, AE darvon ziehet:
So wird doch CB ⌜ verbleiben, als EB. d. 5. ax. 1.
Nunmehro ist in denen zween △ CDB, und EDB, die Seiten DB beyden △ gemein.
Und die Seiten DC ist ⌐, der Seiten DE.
Die Basis CB aber ist ⌜, als die Basis EB. d. d. Vorg.
Dahero ist auch der ∠ d ⌜, als der ∠ c. d. 25. 1.
Wann man nun zu diesen ungl. ∠ d und c die gleiche ∠ a und b beyderseits hinzu setzet:
So folget, daß auch die zween ∠ a und d ⌜ seint, als der ∠ b + c. d. 4. ax. 1.

Welches zu beweisen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Alle flache Winckeln sammentlich, welche einen dichten Winckel machen, seint kleiner, als vier rechte Winckeln.

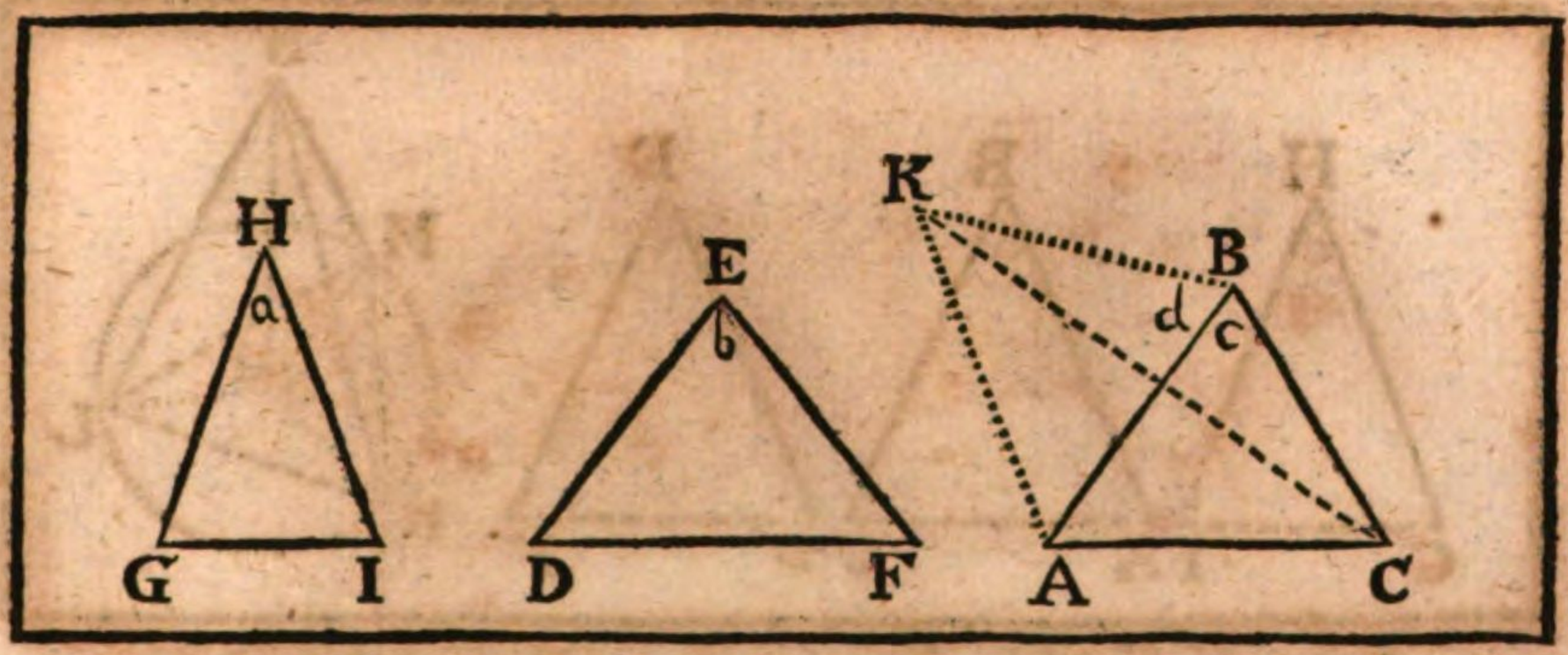
Es ist gegeben der dichte ∠ A, so zusammen gesetzt ist von denen drey flachen ∠ DAB. BAC. CAD. Diesem nach sagt man, daß diese drey ∠ sammentlich ⌝ seynt, als vier rechte ∠.

Zubereitung.

Hange zusammen die auff der Basis nach Gefallen genommene Puncten DBC. Worauß entstehen die drey dichte ∠ bey D, B, C, von denen ein jeder auß drey flachen ∠ zusammen gesetzt ist. Nemlich der ∠ D ist von denen ∠ CDB, CDA, BDA, und der ∠ B ist von denen ∠ DBC, DBA, CBA. Letztlich der ∠ C ist von denen ∠ BCD, BCA, DCA zusammen gesetzt.

Beweiß.

In dem dichten ∠ D seynd die zween ∠ CDA + BDA ⌜, als der ∠ CDB. d. 20. 11.
Auff solche Weise seynd auch die zween ∠ DBA + CBA ⌜, als der ∠ DBC.
Und die zween ∠ BCA + DCA auch ⌜, als der ∠ BCD.
Das ist, die sechs ∠ CDA + BDA. DBA + CBA: BCA + DCA seynd ⌜, als die drey ∠ CDB. DBC. BCD deß flachen △ CDB.
Unterdessen seynd die drey letztere ∠ ⌐, zweyen rechten ∠. d. 32. 1.
Folget, daß auch diese sechs ∠ ⌜ seynd, als zween rechte ∠.
Nun aber alle neun ∠, deren drey △ DAB, BAC, CAD seynd ⌐ sechs rechten ∠. d. 32 Cor 2.
Wann man jetzund von denen sechs rechten ∠, die sechs ∠ CDA + BDA. DBA + CBA. BCA + DCA (welche ⌜, als zween rechte seynd) abziehet,
So werden die übrige flache ∠ umb A ⌝ seyn müssen, als vier rechte ∠.
Welches zu beweisen ware.



Die XXII. Vorgab.

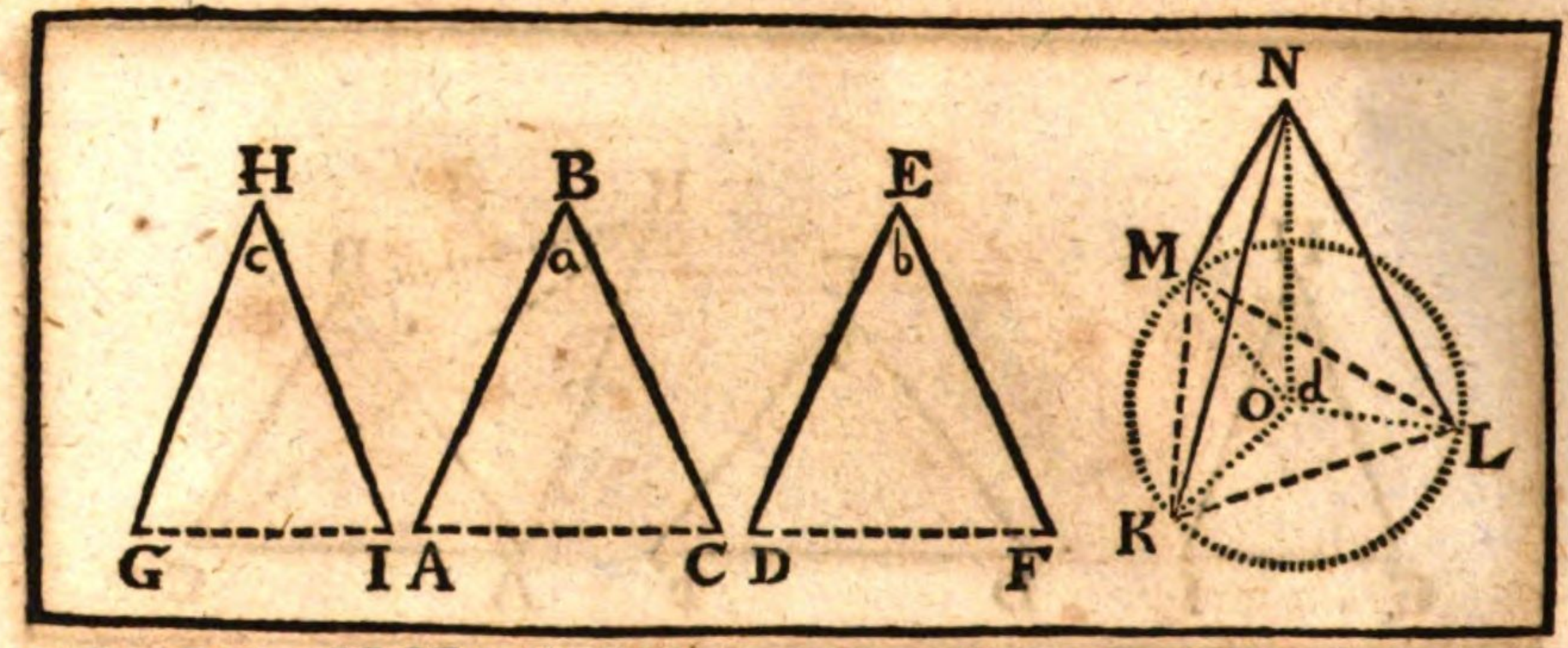
Betrachtung.

Wann drey flache Winckeln seynd, deren jede zwey zusammen genommen grösser seynd, als der dritte; und die Seiten, welche sothane Winckeln begreiffen, einander gleich haben: So ist möglich, daß man aus denen geraden Linien, welche die gleichen Seiten an einander hangen, einen Triangel machen könne.

Es seynd gegeben die drey ∠ a, b, c, darvon zween zusammen genommen, gleichwie die ∠ b + c, jederzeit ⌜ seynd, als der dritte ∠ a; solche drey ∠ auch von gleich langen Linien GH, HI und DE, EF und AB, BC begriffen seynd. Diesem nach sagt man, daß es möglich seye, auß denen drey Linien GI, DF und AC, welche die gleiche Seiten an einander hangen, einen △ zu machen. Das ist, wann bewiesen wird, das, gestalt dieser Sachen, auß diesen drey Linien, zwey zusammen genommen, (als wie allhier DF + AC) allzeit ⌜ seynd, als die dritte GI: so kan alsdann ein △ gemacht werden. (nach d. 22. 1.) Mache vorhero den ∠ d ⌐, dem ∠ b: und BK ⌐, BA, ziehe zusammen KA, KC.

Beweiß.

Weilen KB ⌐ ist, der AB: AB aber ⌐ ist, der DE, oder EF, und
der ∠ d ⌐ gemacht worden ist, dem ∠ b: so wird KA ⌐ seyn der DF. d. 4. 1.
Unterdessen ist der ∠ d + c ⌜, als der ∠ a; folget, daß auch d. d. Vorg.
KC ⌜ seye, als GI. (dann BC, KB, GH, HI einander ⌐ seynd). d. 24. 1.
Entgegen aber ist KC ⌝, als AC + AK) oder die gleiche AC + DF). d. 20. 1.
darum wird GI noch ⌝ seyn, als AC + DF, und
Deßwegen kan auß diesen drey Linien GI, DF, AC ein △ gemacht werden. d. 22. 1.
Welches zu beweisen ware.



Die XXIII. Vorgab. Betrachtung.

Auß drey vorgegebenen flachen Winckeln, deren nach Gefallen zwey zusammen genommen, allzeit grösser als der dritte seynd, einen dichten Winckel zu machen: die drey vorgegebene Winckeln aber müssen sammentlich kleiner seyn, als vier rechte Winckeln.

Es seynd gegeben die drey flache ∠ c, a, b, welche sammentlich ⌝ seynd, als vier rechte ∠, und jede zwey zusammen, ⌜ seint, als der dritte. Diesem nach solte man auß diesen drey ∠ c, a, b einen dichten ∠, gleich wie NKLM machen.

Handgriff. Mache die Linien GH, IH, AB, CB, DE, FE einander gleich.
Hange GI, AC, DF zusammen. { d. 22. I.

Auß diesen drey Linien GI, AC, DF mache den △ KLM. { u. 22. II.
daß nemlich die Seite KM ⌐ seye, der GI: und KL ⌐, der AC:
und LM ⌐, der DF.

Umbschreibe diesen △ KML mit einem Zirckel. d. 5. 4,

Auß dem Mittel-Punct O ziehe in die ∠ K, M, L die gerade Linien OK, OM, OL.

Auß dem Mittel-Punct O auff der Zirckels-Fläche erhöhe die ⊥ ON. d. 12. II.

Nach diesen, weilen eine jede Linie, als wie AB, oder CB. s. f. welche die ∠ a, b, c machen ⌜ ist, als der halbe Diameter OL.
so von andern nach der Länge schon bewiesen worden ist.

Mache, daß die zwey □ auff OL und ON ⌐ seynd, d. 47. I.
dem □ auff AB (oder dergleichen auff CB) u. s. f.

Letztlich ziehe NL, NK, NM zusammen: so wird der verlangte dichte ∠ NKLM gemacht seyn.

Beweiß.

In dem △ NOL ist der ∠ d ein rechter. d. d. Hand.

Dahero wird auch das □ auff LN ⌐ seyn, denen zwey □ auf NO und OL. d 47. I.

Denen zwey □ aber auff NO und OL, ist auch ⌐ das □ auff AB. d. d. Hand.

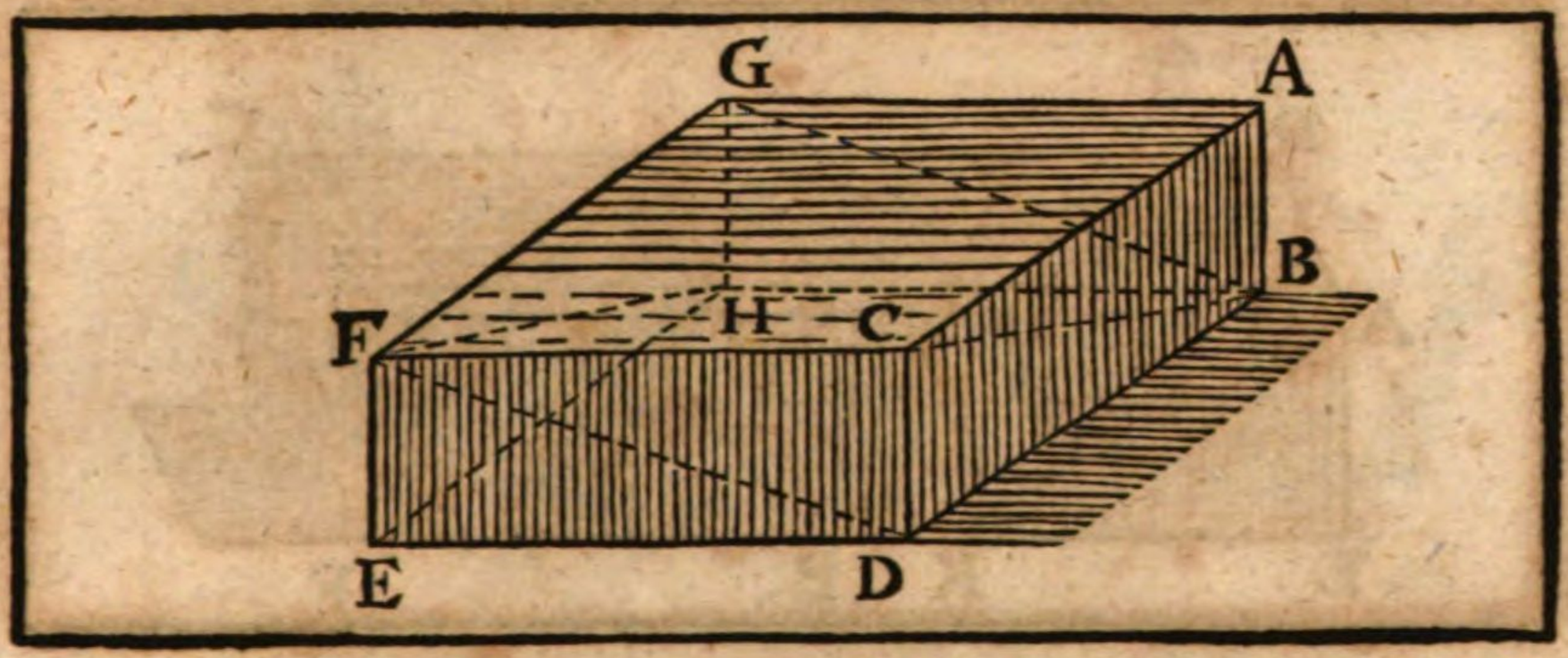
Folget, daß also das □ auff LN ⌐ seye, dem □ auff AB,
und darumb ist die Linie LN ⌐ der Linie AB. d. 46. en. I.

Auff solche Weise ist auch KN ⌐, der BC. Unterdessen ist KL ⌐ gemacht worden, der AC. Dahero ist der △ KNL ⌐, dem △ ABC. d. 8. I.

Eben auff diese Art ist der △ KNM ⌐, dem △ GHI. und der △ MNL ⌐, dem △ DEF.

Und folgends der ∠ KNL ⌐, dem ∠ a, der ∠ KNM ⌐, dem ∠ c. Letztlich der ∠ MNL ⌐, dem ∠ b. Worauß man schliesset, daß also der dichte ∠ NKLM aus denen drey vorgegebenen flachen ∠ a, b, c ist zusammen gesetzt worden.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIV. Vorgab.

Betrachtung.

In denen Parallelepipeden seynd die gegenüberstehende Flächen, gleichförmige und ein ander gleiche Parallelogrammen.

Es ist gegeben das ▱ EFAB, welches mit denen sechs vierseitigen Flächen DF, CB, GB, FH, und EB, FA umschlossen ist, von denen jederzeit die zwey gegenüberstehende Seiten einander Parallel seynd (nach d. 30. def. 11.) Diesem nach sagt man, daß allzeit die zwey gegenüber stehende Flächen, gleich wie zu einem Exempel, FD, GB, gleichförmige und einander gleiche ▭ seynd. Ziehe vorhero FH, FD, GB, CB zusammen.

Beweiß.

Weilen die Parallel-Flächen DF, GB durchschnitten seynd mit der Fläche CB: so wird die Linie CD = seyn, der Linie BA. — d.d.Vorg. d.16.11.

Auff solche Weise ist eben EF =, der HG.

Indeme auch die Parallel-Flächen DF, GB durchschnitten seynd mit der Fläche FA: so wird die Linie FC = seyn, der Linie GA.

Auff diese Weise ist auch die Linie ED =, der Linie HB, und darumb seynd FD und GB ▭. — d.35.def.1.

Eben auff solche Weise seynd auch die übrige überstehende Flächen, ▭.

Ferners, massen FE, ED = seynd, denen GH, HB. — d.d.Vorg.

so wird der ∠ FED ⌐ seyn, dem ∠ GHB. — d. 10. 11.

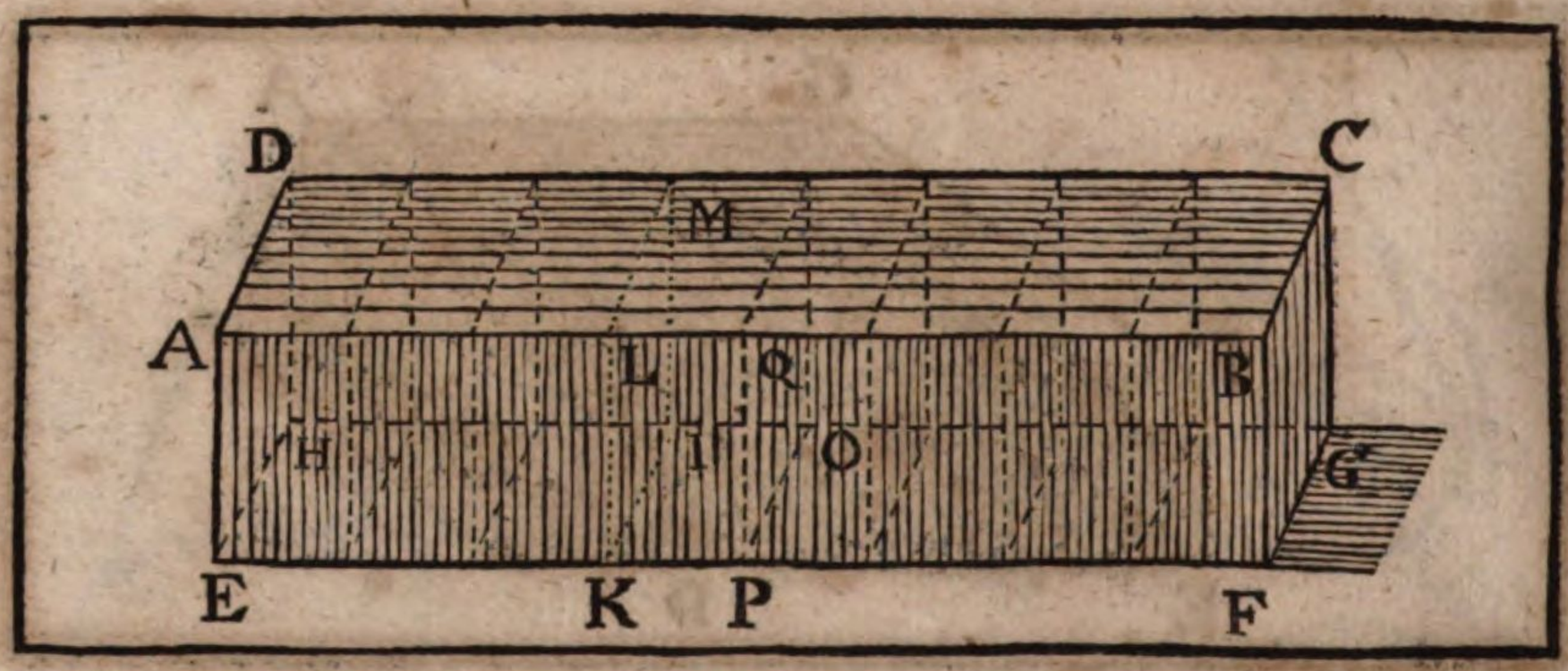
Es seynd auch FE, ED ⌐, denen Linien GH, HB. — d. 33. 1.

darum ist der △ FED ⌐, dem △ GHB. — d. 4. 1.

Und deßwegen ist auch der △ FED gleichförmig dem △ GHB. — d. 4 6.

und folgends das ▭ FD ⌐, und gleichförmig, dem ▭ GB, u. f. — d.6.ax.1. u.34.1.

Welches zu beweisen ware.



Die XXV. Vorgab. Betrachtung.

Wann ein Parallelepipedum mit einer Fläche, welche denen gegenüberstehenden Flächen Parallel lauffet, durchschnitten wird: so wird seyn, gleich wie ein Stücks Basis sich verhaltet zu des andern stückes Basis, also ist ein dichtes Stück zu dem andern dichten Stück.

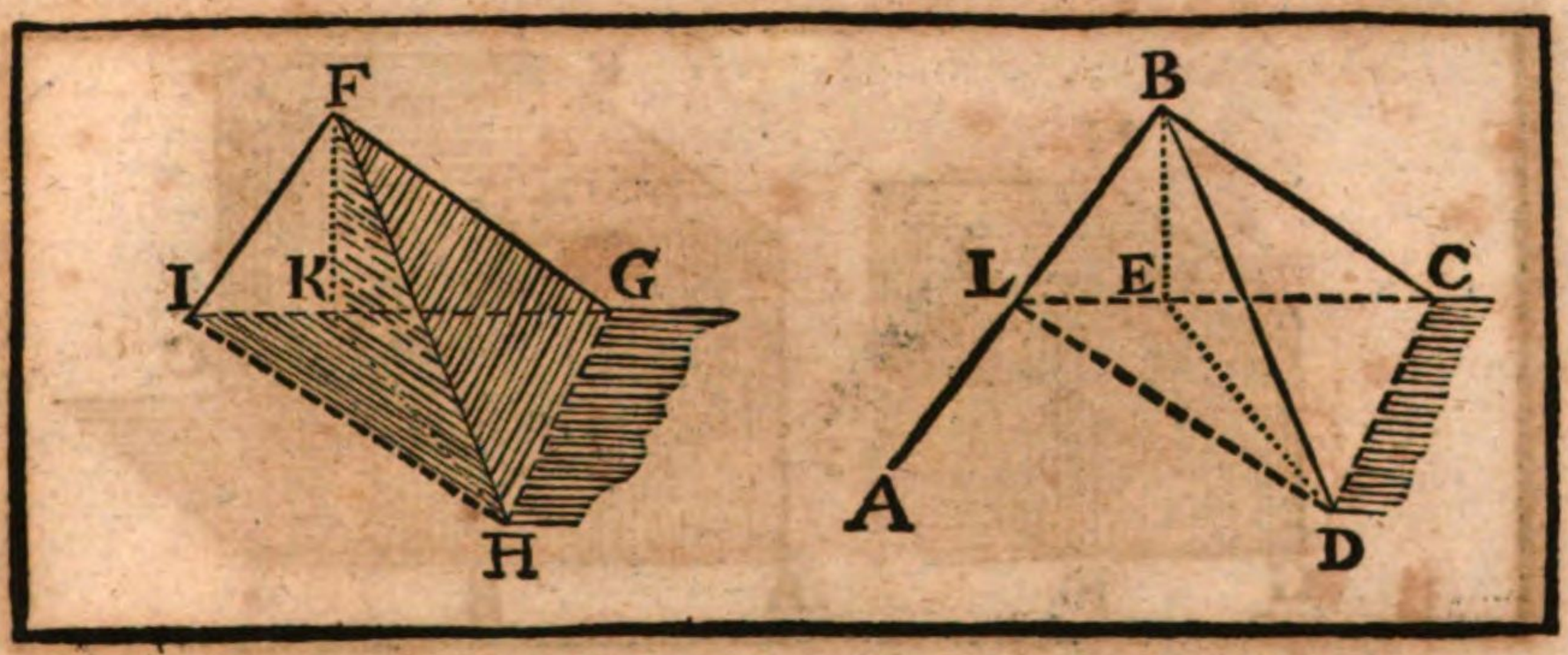
Es ist gegeben, daß das ▱ ABGH durchschnitten seye mit der Parallel-Fläche KIML.
Diesem nach sagt man, daß, wie die Basis HK, Basis KG :: ▱ KD. ▱ KC.

Zubereitung.

Suche einen Theil, welcher beyde Bases KH, KG gleich auffmesset.
Seye ein solcher Theil, die Fläche KO, welcher in der Basis KH just dreymahlen,
Und in der Basis KG just fünff mahlen, begriffen ist.
Ziehe unterdessen durch PO die Fläche QO ═, der Fläche LI,
Worauß der dichte Theil LO entstehet. Diesem nach

Beweiß.

Nun ist klar, daß wegen gleichfachen Theilen, und Parallel-Linien, der dichte Theil LO, so offt in dem dichten Stück KD seye, als offt der flache Theil in der einen Basis KH ist, nemlich just dreymahlen.
Und eben wird derselbe dichte Theil LO so offt in dem dichten Stück KC seyn, als offt der flache Theil KO in der andern Basis KG ist, nemlich just fünff mahlen.
Dahero wie offt die Basis KH einen fünfften Theil von der Basis KG begreiffet, so offt das dichte Stück KD einen fünfften dichten Theil von dem dichten Stück KC begreiffen werde.
Und auch, wie offt die Basis KH zwey fünfftheile von der Basis KG begreiffet, so offt auch das dichte Stück KD zwey Fünfftheile von dem dichten Stück KD begreiffen werde. u. s. f.
Darum sich verhalten thut die Basis HK, Basis KG :: ▱ KD. ▱ KC. { d. 6. def. 5. u. 7.
Welches zu beweisen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Handgriff.

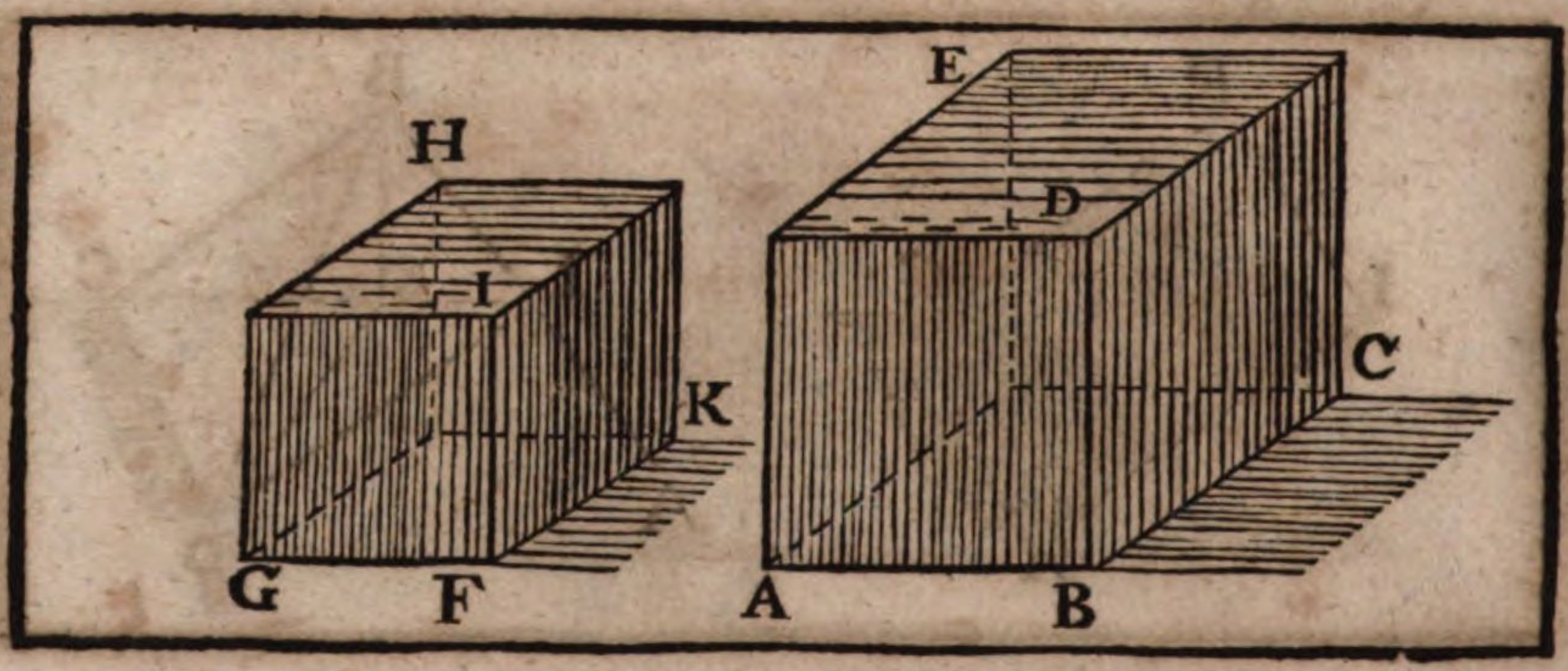
Auß einem Punct auff einer vorgegebenen geraden Linie einen dichten Winckel, gleich einem andern vorgegebenen dichten Winckel, zu machen.

Es ist gegeben der Punct B auff der Linie AB, auß welchen ein dichter ∠, gleich dem vorgegebenen dichten ∠ FIHG, zu machen seye.

Handgriff und Beweiß.

Mache aus H auff der Fläche IHG die bleyrechte HK.
Ziehe zusammen KF, KI, IH, HG, GK. d. 11. 11.
Mache auff der Linie AB, die BL ⌐, der FI.
Und den flachen ∠ LBC ⌐, dem flachen ∠ IFG. d. 23. 1.
Nehme die Länge BC ⌐, der Länge FG.
Mache auff der Fläche LBC den ∠ LBE ⌐, dem ∠ IFK.
auff der Fläche IFG.
Nehme BE ⌐, der FK.
Auß dem Punct E auff der Fläche LBC erhöhe die ⊥ ED ⌐,
der ⊥ KH. d. 12. 11.
Hange letztlich BD, DC, CE, EL, LD zusammen.
Der Beweiß ist auß dem gemachten Handgriff gantz klar und leicht,
daß nemlich der dichte ∠ BLCD ⌐ seye dem gegebenen
dichten ∠ FIHG.

Welches zu machen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Handgriff.

An einer vorgegebener geraden Linie (AB) ein Parallelepipedum (BE) zu beschreiben, welches einem andern vorgegebenen Parallelepipedum (FH) gleichförmig und gleichgestölt seye.

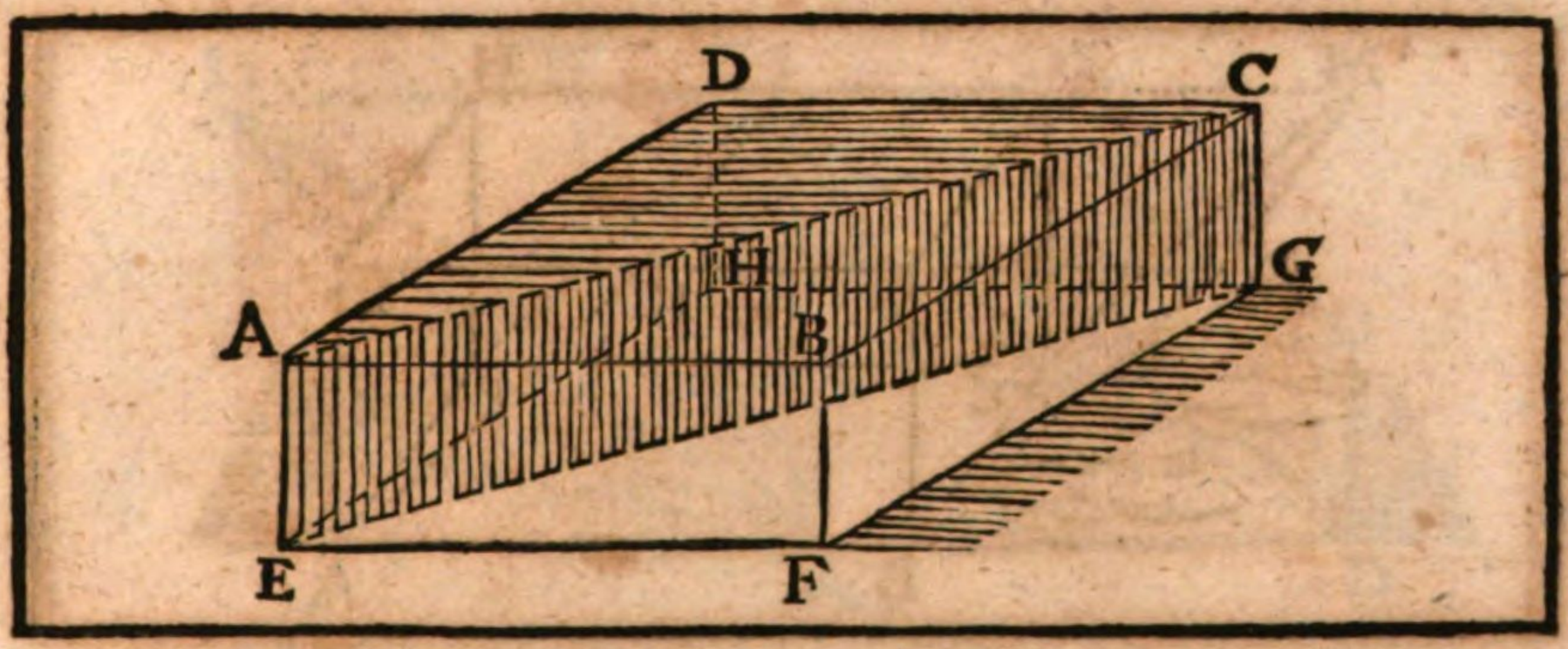
Handgriff.

Auß dem Punct B auff der Linie AB mache den dichten ∠ BADC ⌐, dem dichten ∠ FGIK. d. 26. 6.
Alsdann mache GF, FI:: AB, BD.
und FI, FK:: BD, BC. d. 12. 6.
So wird hernach aus der Gleichen seyn GF, FK:: AB, BC. d. 22. 5.
Nunmehro verfertige das ⌲ BE, so wird solches dem vorgegebenen ⌲ FH gleichförmig und gleichgestölter seyn.

Beweiß.

Die drey ▭ AC, AD, DC seynd gleichförmig und gleichgestölt worden, denen drey ▭ GK, GI, IK. { d. d. Hand. { 1. 1. def. 6.
Es seynd auch die gegenüberstehende, gleich und gleichförmige ▭: d. 24. 11.
Dahero werden die sechs Flächen deß ⌲ BE gleich gestölt und gleichförmig seyn, denen sechs Flächen deß ⌲ HF.
Und folgends wird hierdurch das ⌲ BE gleichförmig und gleichs gestölt seyn, dem ⌲ FH.

Welches zu machen ware.



Die XXVIII. Borgab.

Betrachtung.

Ein jedes Parallelepipedum wird durch diejene Fläche, welche durch die überzwerg ſtehende Winckeln gezogen iſt, juſt entzwey geſchnitten.

Es iſt gegeben, daß das ▭ AG mit der Fläche ACGE, ſo durch die überzwerg ſtehende ∠ A, C, E, G gezogen iſt, durchſchnitten ſeye. Dieſem nach ſagt man, daß das ▭ AG hiermit juſt entzwey geſchnitten worden ſeye.

Beweiß.

Dieweilen die Fläche BG ein ▭ iſt: ſo werden die Seiten CG, BF einander ⊓, und ═ ſeyn. d. 34. I.

Auff ſolche Weiſe werden auch AE, BF einander ⊓ und ═ ſeyn. und folgends AE ⊓, und ═ ſeyn, der CG. d. 9. II.

Deßwegen iſt auch die Linie AC ⊓, und ═, der Linie EG. d. 39. I.

und darumb iſt ACGE ein ▭. d. 34. def. I.

Unterdeſſen iſt das ▭ ABCD ⊓, und gleichförmig, dem ▭ EFGH. d. 24. II.

Dahero auch die △ ADC, ABC ⊓, und gleichförmig ſeyn werden denen △ EHG, EFG. d. 34. I. und 4. 6.

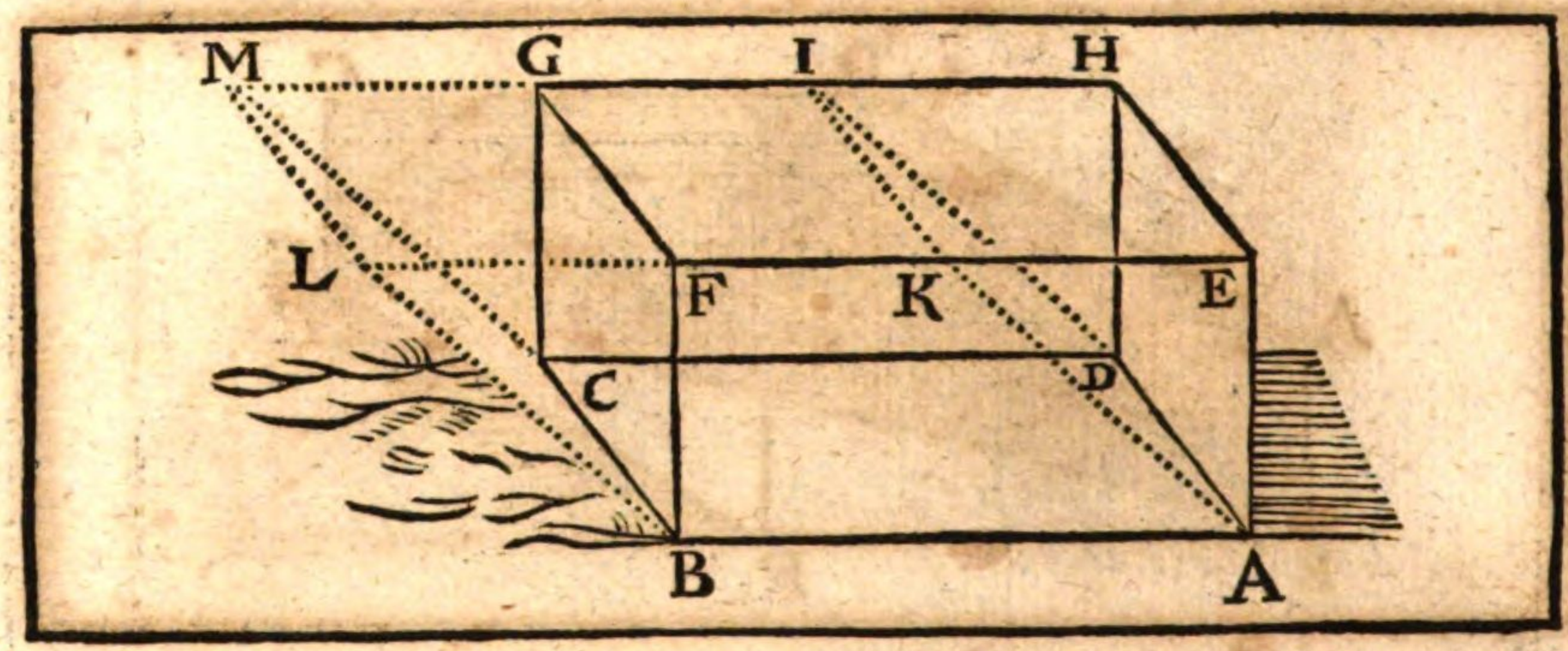
Ferners, ſeynd die ▭ ABFE, BCGF ⊓, und gleichförmig, denen ▭ CGHD, und DHEA. d. 24. II.

Folget, daß alſo in der Eck-Säule AECGDH alle Flächen ⊓, und gleichförmig ſeynd, allen Flächen in der Eck-Säule AECGBF, eine jede der ihren.

Dahero iſt eine Eck-Säule ⊓, der andern Eck-Säule. d. 10. def. II.

Weilen nun dieſe zwey Eck-Säulen das gantze ▭ AG machen: ſo iſt klar, daß das ▭ AG mit der Fläche ACGE gerad entzwey ſeye geſchnitten worden.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

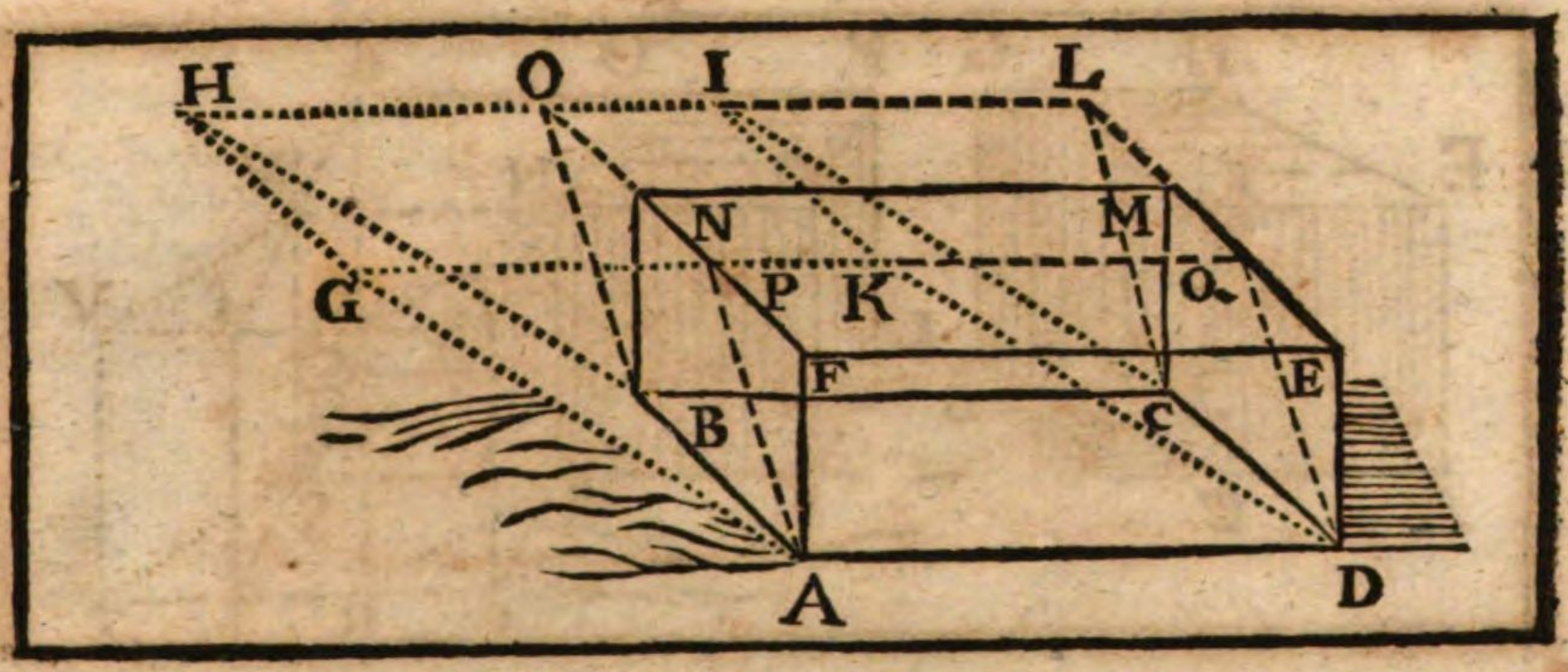
Die Parallelepipeden, welche auff einerley Basis stehen, und einerley Höhe, auch ihre auffstehende Linien in einerley geraden Linien fort haben, seynd einander gleich groß.

Es seynd gegeben die zwey ⌲ AEFBDHGC und AKLBDIMC, welche auff einerley Basis ABCD stehen, und einerley Höhe, auch ihre auffstehende Linien AE, AK, BF, BL, DH, DI, CG, CM in einerley geraden Linien EFL und HGM fort haben. Diesem nach sagt man, daß das ⌲ AEFDHG ⊓ seye, dem ⌲ AKLDIM.

Beweiß.

Das ▭ DG ist ⊓, dem ▭ DM. d. 35. I.
Wann darvon das gemeine Trapezium DIGC abgezogen wird.
So bleibet dannoch der △ DIH ⊓, dem △ CMG.
Auff solche Weise ist auch der △ AKE ⊓, dem △ BLF:
und das ▭ EKIH ist ⊓, dem ▭ FLMG. d. 36. I.
Auch die Fläche AEHD ist ⊓ der Fläche BFCG.
und die Fläche AKID ist ⊓, der Fläche BLMC. d. 24. II.
Folget, daß also die Eck-Säule AEKIDH ⊓ seye, der Eck-Säul BFLMGC. d. 10. def. II.
Wann nun beyderseits das dichte Stück AKFBCGID hinzu gesetzt wird,
So wird letztlich das ⌲ AEFBDHGC ⊓ seyn, dem ⌲ AKLBDIMG.

Welches zu beweisen ware.



Die XXX. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallepipeden, welche auff einerley Basis stehen, und einerley Höhe, nicht aber ihre auffstehende Linien in einerley Linie fort gestölter haben, seynd auch einander gleich.

Es seynd gegeben die zwey ⌲ AFNBCMED, und AGHBCIKD, welche auff einerley Basis ABCD stehen, und einerley Höhe, die auffstehende Linien aber AF, AG, und BN, BH, und CM, CI, und DE, DK, nicht in einerley Linien EF, MN fort haben. Diesem nach sagt man, daß dannoch das ⌲ AFNBCMED ⌐ seye, dem ⌲ AGHBCIKD.

Zubereitung.

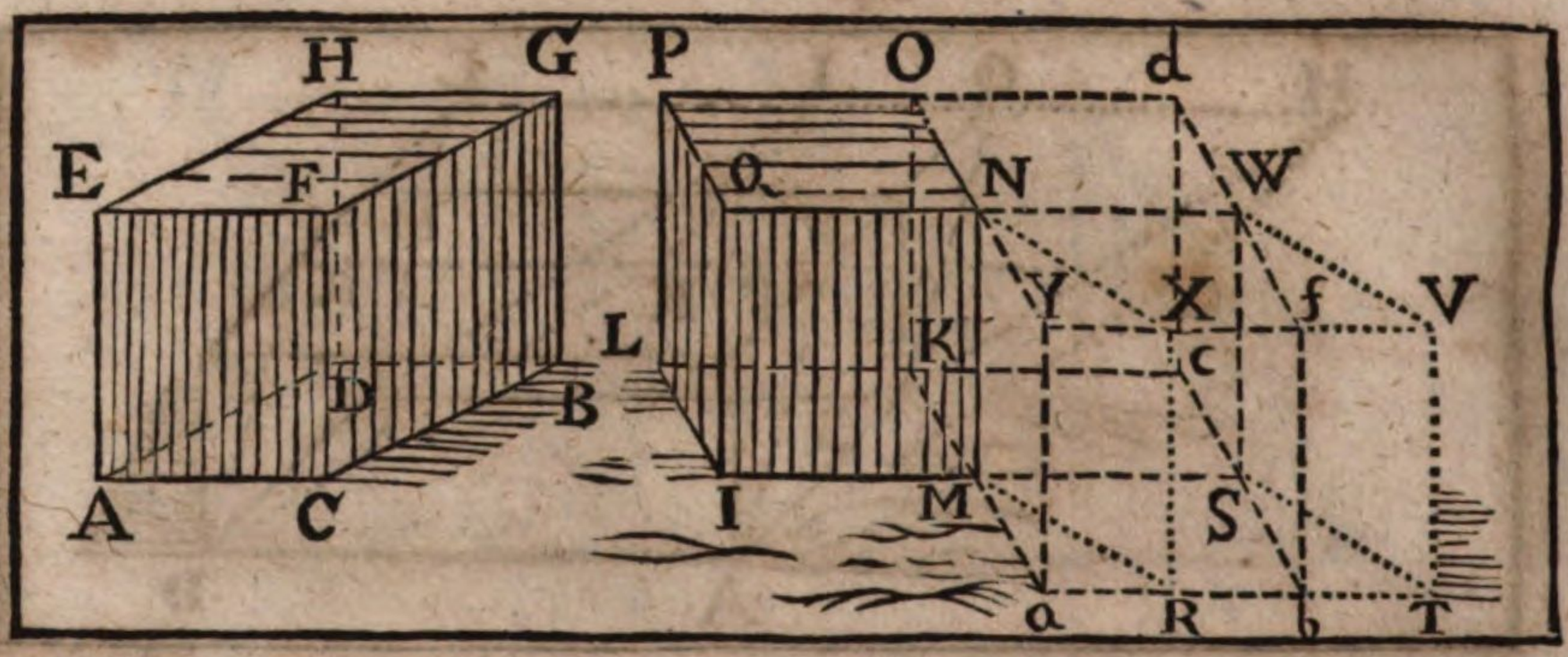
Verlängere HI und EM, biß sie zusammen stossen in Punct L.
Verlängere auch GK biß in Q, und FN biß in O.
Hange zusammen AP, BO, und DQ, CL.

Beweiß.

Das ⌲ AFNBCMED ist ⌐, dem ⌲ APOBCLQD. d. 29. XI.
(dann sie auff einerley Basis ABCD stehen, und einerley Höhe, und ihre auffstehende AF, AP: BN, BO: CM, CL: DE, DQ in einerley Linie FNO und EML fort haben).

Das ⌲ APOBCLQD aber ist ⌐, dem ⌲ AGHBCIKD. d. 29. XI.
(dann sie auch auff einerley Basis ABCD stehen, und einerley Höhe, und ihre auffstehende Linien AN, AG: BO, BH. CL, CI: DQ, DK in einerley geraden Linien QPG und LOH fort haben)

Dahero ist auch das ⌲ AFNBCMED ⌐, dem ⌲ AGHBCIKD.
Welches zu beweisen ware.



Die XXXI. Vorgab. Betrachtung.

Die Parallepipeden, welche gleiche Bases, und einerley Höhe haben, seynd einander gleich.

Es seynd gegeben die zwey ⌲ AHGC, und IPOM, welche gleiche Bases AB, IK, und einerley Höhe haben. Diesem nach sagt man, daß das ⌲ AHGC ⊓ seye, dem ⌲ IPOM.

Zweyerley Fähle können sich hierinnen ereignen, erstlich, wann die auffstehenden Linien AE, DH, BG, CF, IQ, LP, KO, MN bleyrecht auff ihren Basen AB, IK stehen; Diesem nach,

Zubereitung.

Verlängere IM gerad hinauß, und mache MS ⊓, der AD.
Aus dem Punct M auf MS mache den ∠ SMR ⊓, dem ∠ DAC.
Nehme MR ⊓, der AC.
Auß R ziehe RT ⊓, und ═ der MS, und ziehe TS zusammen.
Alsdann erfülle das ⌲ RNWT mit der Höhe MN, welche die Höhe ist deren zwey gegebenen ⌲.
Unterdessen verlängere KM, und TR, biß sie zusammen stossen in Punct a.
Hernach durch S, ziehe cSb ═, der KMa.
Verlängere LK, biß sie an die Linie bSc in Punct c anstosse.
Letztlich erfülle die zwey ⌲ aNWb und MOdS mit der Höhe MN, welche die gegebene Höhe deren zwey ⌲ ist.

Beweiß.

Die zwey Linien MS, MR seynd ⊓, denen zwey AD, AC. und der ∠ SMR ist auch ⊓ gemacht worden, dem ∠ DAC. — d. d. Zub.
Folget, daß das ▭ MT ⊓, und gleichförmig seye, dem ▭ AB. — d. 36. 1.
Weilen auch MS, MN ⊓ seynt, denen AD, AE. — d. 20. 6.
(dann AE und MN die gleiche Höhe deren ⌲ seynd) und beyde ▭ rechte ∠ begreiffen.
Darum wird das ▭ MW auch ⊓, und gleichförmig seyn. dem ▭ AH:
Auff solche Weise wird bewiesen, daß eben das ▭ Mx ⊓, und gleichförmig seye, dem ▭ AF.

Nun hat man drey ▭ deß ⊟ RNWT ⊓, und gleichförmig,
deren drey ▭ deß ⊟ AHGC.

Dahero seynd auch die drey gegenüber stehende ▭ eines ⊟
⊓, und gleichförmig, denen drey gegenüber stehenden ▭ deß
andern ⊟. d. 24. 11.

Und folgends ist das ⊟ RNWT ⊓, dem AHGC. d. 16. def. 11.

Ferner, indeme die zwey ⊟ aNWb, und RNWT auff einerley
Basis MW stehen, und einerley Höhe, auch ihre auffstehende d. d. Zub.
Linien Ma, MR : NY, NX : Wf, Wv : Sb, ST in geraden
Linien Ta, VY fort haben.

So wird das ⊟ aNWb ⊓ seyn, dem ⊟ RNWT. d. 29. 11.
das ⊟ RNWT ist aber bewiesen worden ⊓, dem ⊟ AHGC.

Folget, daß auch das ⊟ aNMb ⊓ seye, dem ⊟ AHGC.

Unterdessen siehet man, daß das ⊟ IPdS durchschnitten seye
mit der Fläche ONMK.

Deßwegen ist, Bas. IK. Bas. MC:: ⊟ IPOM. ⊟ MOdS. d. 25. 11.
Abermahlen, weilen man siehet, daß das ⊟ aOdb durchschnitten
seye, mit der Fläche MNWS.

So wird auch seyn, Bas. aS. Bas. Mc:: ⊟ aNWb. ⊟ MOdS.

Es ist aber die Basis IK ⊓, der Basis aS. d. d. Vorg.
(dann das ▭ aS ist ⊓, dem ▭ MT. d. 35. 1.
und das ▭ MT ist ⊓ gemacht worden, dem ▭ AB. d. d. Zub.
und das ▭ AB ist ⊓ gegeben worden, dem ▭ IK) d. d. Vorg.

Darumb wird das ⊟ IPOM ⊓ seyn, dem ⊟ aNWb. d. 9. 5.

Dieweilen auch das ⊟ aNWb schon bewiesen ist ⊓, dem ⊟ RNWT. d. d. Vorg.
und das ⊟ RNWT ist ⊓ gemacht worden, dem ⊟ AHGC. d. d. Zub.
Folget letztlich, daß auch das ⊟ IPOM ⊓ seye, dem ⊟ AHGC.

Welches zum ersten zu beweisen ware.

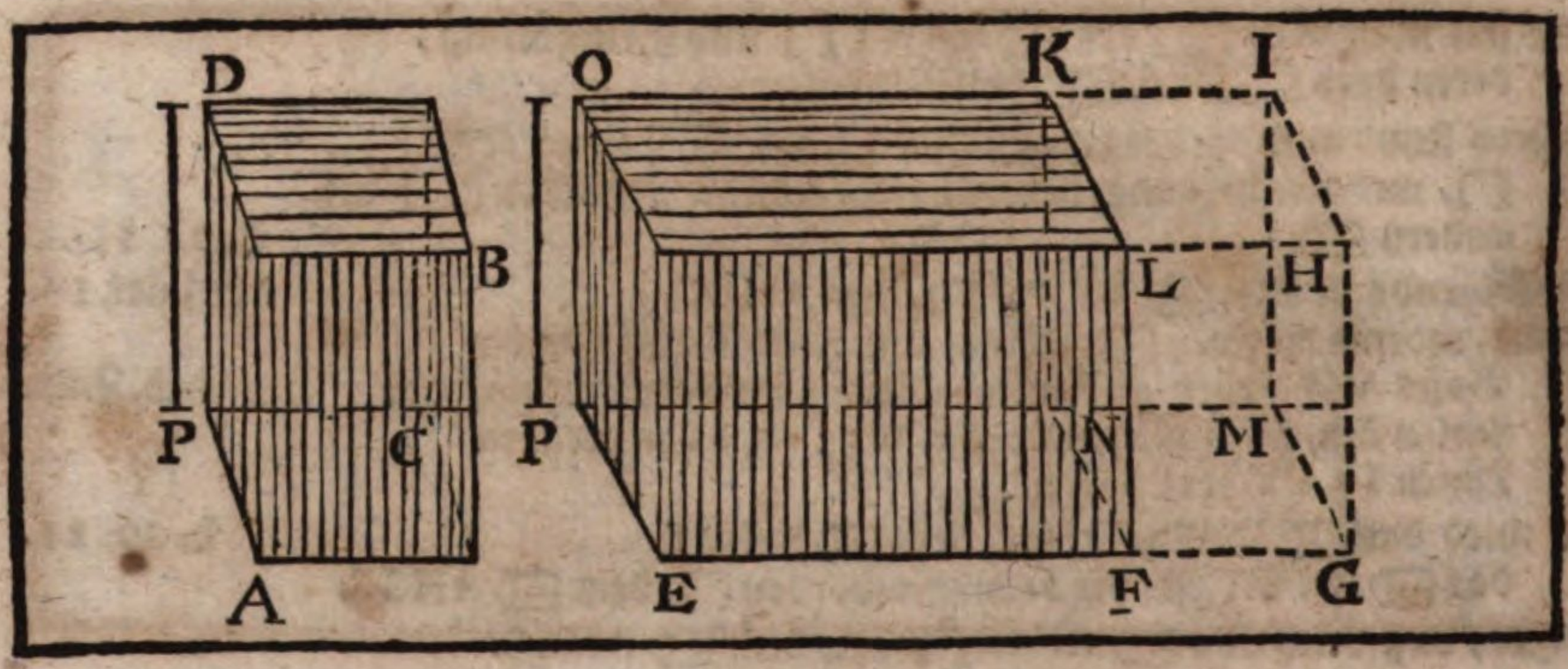
II. Wann die auffstehenden Linien auff denen Basen schrög stehen.

So schreibet man auff denenselben Bases, und in einerley
Höhe andere ⊟, welche ihre auffstehende (wie vorgehends
geschehen) bleyrecht auff denen Bases haben.

Sothane ⊟ werden hernach einander gleich seyn. d. 31. 11.

Diese aber seynd ⊓, ihren schrögen ⊟. d. 23. 11.
Dahero auch die Schröge ⊟ einander ⊓ seyn werden. u. 30.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallelepipeden, welche in einerley Höhe seynd, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Bases.

Es seynd gegeben die ▱ ADB, EOL, welche einerley Höhe haben. Diesem nach sagt man, daß sich verhalte, das ▱ ADB, ▱ EOL : : Bas. AC. Bas. EN.

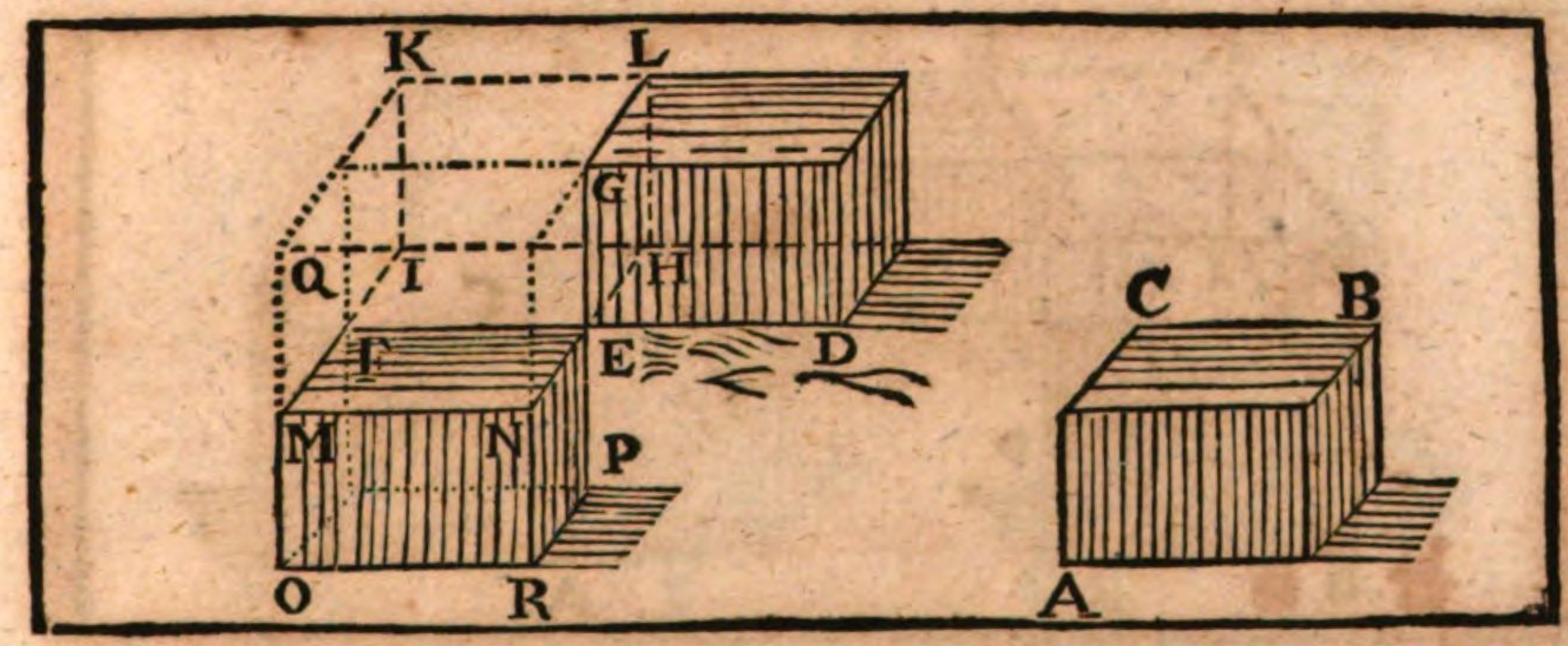
Zubereitung.

An der Linie FN mache das ▭ FM ⊓, dem ▭ AC. d. 45. I.
Also, daß der ∠ NFG ⊓ seye, dem ∠ PEF, und
hierdurch die Basis EM gleichsam ein ▭ allein werde.
Hernach ausfülle das ▱ EOIG.

Beweiß.

Es ist klar, daß das ▱ FKIG ⊓ seye, dem ▱ ADB. [d 31 11.
(Dann sie einerley Höhe haben; hernach ist die Basis FM ⊓, der [d. d. Zub.
Basis AC gemacht worden).
Dahero seyn werde ▱ FKIG. ▱ EOKF : : ▱ ADB. ▱ EOKF. d. 7. 5.
Es verhaltet sich aber das ▱ FKIG, ▱ EOKF : : Bas. FM. Bas. EN. d. 25. 11.
(oder der gleichen AC.)
Folget, daß auch seye das ▱ ADB, ▱ EOKF : : Bas. AC, Bas. EN.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichförmige Parallelepipeden stehen gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß, ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.

Es seynd gegeben die gleichförmige ▭ DL und AB, und die Seiten DE gleichförmig-haltnuß-sagend, der Seite BC. Diesem nach sagt man, daß das ▭ DL sich verhalte, zu dem ▭ AB in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten DE zu BC.

Zubereitung.

Verlängere DE, und mache EF ⊓, der BC.

An EF mache solcher gestalt das ▭ EO, daß es nicht allein ⊓, gleichförmig und gleichgestölt seye dem ▭ AB, sondern auch, das DEF, HEN, GEP in geraden Linien fortliegen. {d. 45. I. u. 27. II.

Hernach erfülle das ▭ EQ auff die Art, als wann das ▭ PQ nur ein ▭ allein wäre. Ebrn auff diese Weise erfülle das ▭ EK also, daß das ▭ DK nur ein ▭ allein zu seyn scheine.

Diesem nach stehet zu beweisen, daß erstlich die vier ▭ DL, EK, EQ, EO. vier stets geproportionirte Grösse seynd, und zwar in der Verhaltnuß, welche DE zu EF (oder dergleichen CB) hat: das übrige folget vor sich selbst.

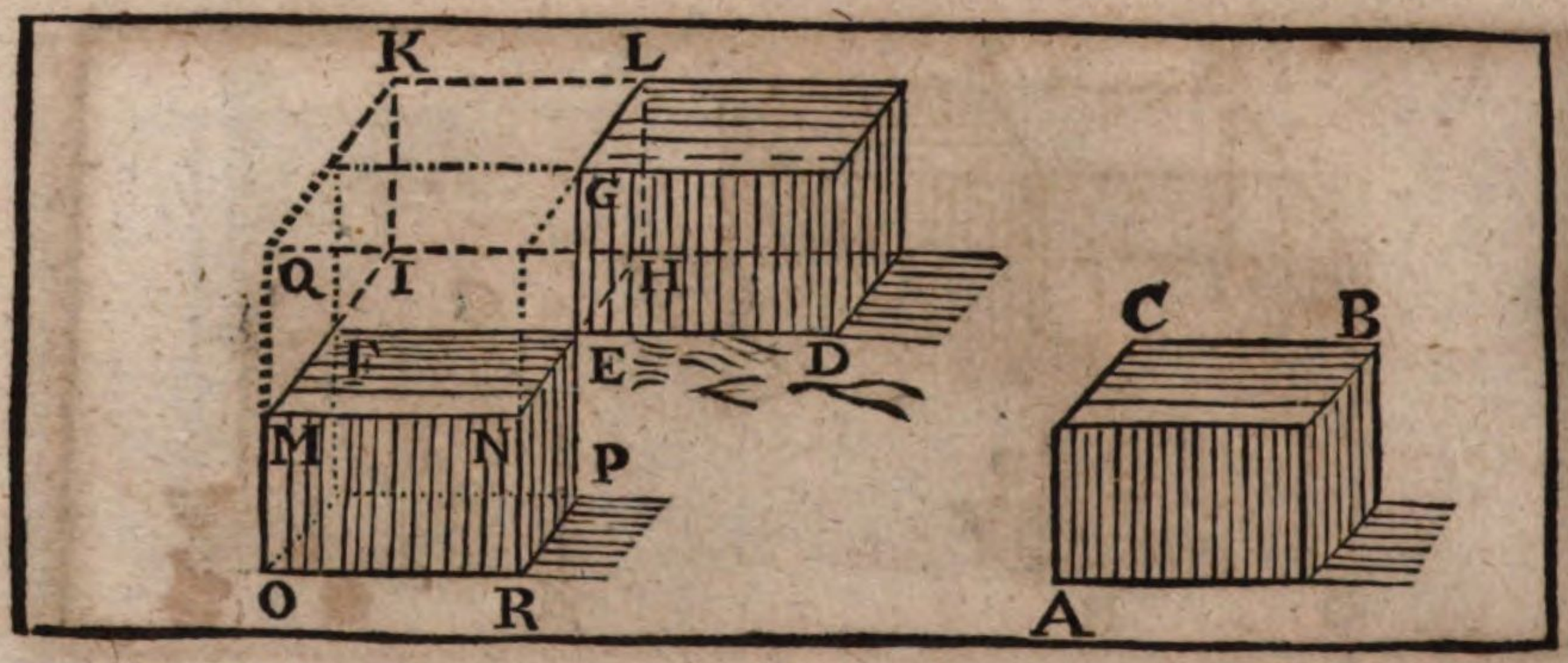
Beweiß.

Erstlich ist klar, daß wegen der Gleichförmigkeit deren ▭ DL und EO sich verhalte DE, EH :: EF, EN. {d. 9. def. II. u. 1. def. 6.

Und durch die Verwexlung DE, EF :: EH. EN. d. 16. 5.
sich auch verhalte DE, EG :: EF, EP.

Und durch die Verwexlung DE, EF :: EG, EP. d. 16. 5.

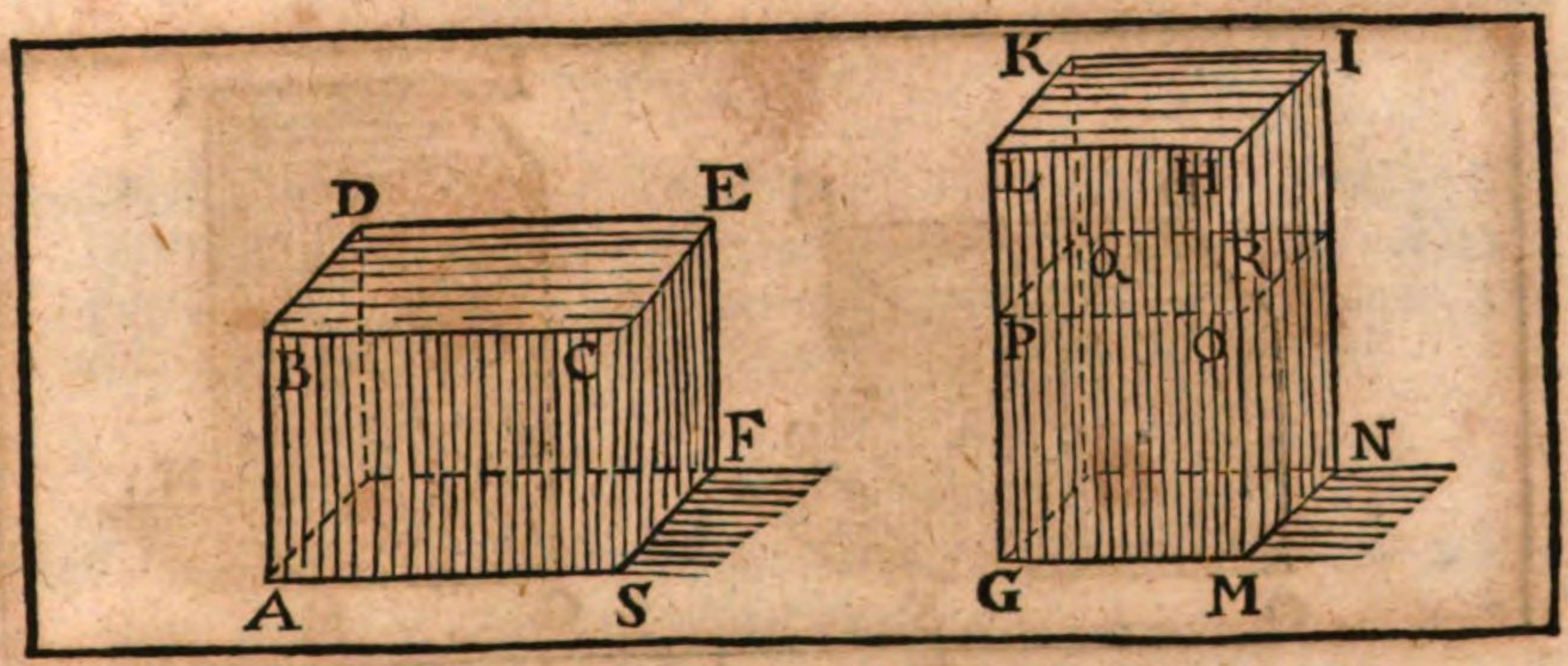
Darum seynd die Verhaltnussen DE zu EF, und EH zu EN, und EG zu EP. d. 11. 5. einander gleich, nemlich alle ⊓, der Verhaltnuß DE zu BC. Diesem nach



Weilen das ⌲ DK durchschnitten ist mit der Parallel-Fläche EL. d. d. Zub.
so wird seyn als wie Basis DH, Basis EI :: ⌲ DL. ⌲ EK. d. 25. 11.
Es ist aber die Basis oder ▭ DH, ▭ EI :: DE, EF. d. 1. 6.
Darum ist auch wie DE, EF :: ⌲ DL, ⌲ EK. d. 11. 5.
Weilen auch das ⌲ HQ durchschnitten ist mit der Parallel-Fläche FG. d. d. Zub.
so wird auch seyn das ⌲ EK, ⌲ EQ :: als wie Basis HF,
Basis EM. d. 25. 11.
Und die Basis oder ▭ HF ist zu den ▭ FM :: als wie EH, EN. d. 1. 6.
Dahero auch seyn werde, als wie EH, EN :: ⌲ EK, ⌲ EQ. d. 11. 5.
Letztlich ist wiederumb das ⌲ GO mit der Parallel-Fläche EM durchschnitten. d. d. Zub.
Darum wird seyn das ⌲ EQ, ⌲ EO :: als wie die Basis GF,
Basis FP. d. 25. 11.
Es ist aber Basis oder ▭ GF, FP :: EG, EP. d. 1. 6.
Deßwegen ist auch das ⌲ EQ, ⌲ EO :: als wie EG, EP. d. 11. 5.
Nun ist klar, daß diese 4 ⌲ DL, EK, EQ, EO, stets geproportionirt d 9 außleg. 5.
seynd, und zwar in der Verhaltnuß, welche haben die Linien DE
zu EF, EH zu EN, und EG zu EP.
Diese Verhaltnuß ist aber unter sich, und auch gleich der Verhaltnuß
DE zu BC bewiesen. d. d. Vorg.
Dahero stehet das ⌲ DL zu dem ⌲ EO (oder dem gleichen ⌲ AB) in d. 10. def. 5.
dreymahliger Verhaltnuß, welche ED zu BC hat.
Welches zu beweisen ware.

Folge.

Wann vier stets geproportionirte Linien seynd, daß, wie sich die erste zu der vierten verhaltet; also sich auch das ⌲, so auff der ersten Linie gemacht ist, zu dem ⌲, welches gleichförmig und gleich gestölt auff der anderten Linie gemacht ist) verhalte: Auß diesen erhellet auch, daß die Dopplirung eines Cubus oder Würffels, allein in der Erfindung zweyer mittlern Proportional-Linien, bestehe.



Die XXXIV. Vorgab.

Betrachtung.

Gleiche Parallelepipeden haben ihre Bases und Höhe widerkehrlich geproportionirter; und die Parallelepipeden, welche ihre Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter haben, seynd einander gleich.

Es seynd gegeben die gleiche ▭ (verstehe, gleiches Inhalts) ADES, GKIM, deren Bases seynd AF, GN, und die Höhe AB, GL. Diesem nach sagt man, daß die Bases AF, GN, und die Höhe AB, GL in einer wiederkehrlichen Proportion seynd, nemlich, daß seye Bas. AF, Bas. GN:: Höhe GL, Höhe AB.

Seye jetzund gesetzt, daß erstlich die auffstehende Seiten AB, GL bleyrecht auff denen Basen AF, GN stehen.

Wann nun die zwey gleiche ▭ einerley Höhe haben: so ist klar, daß sie auch gleiche Bases, und alsdann augenscheinlich eine wiederkehrliche Proportion haben müssen.

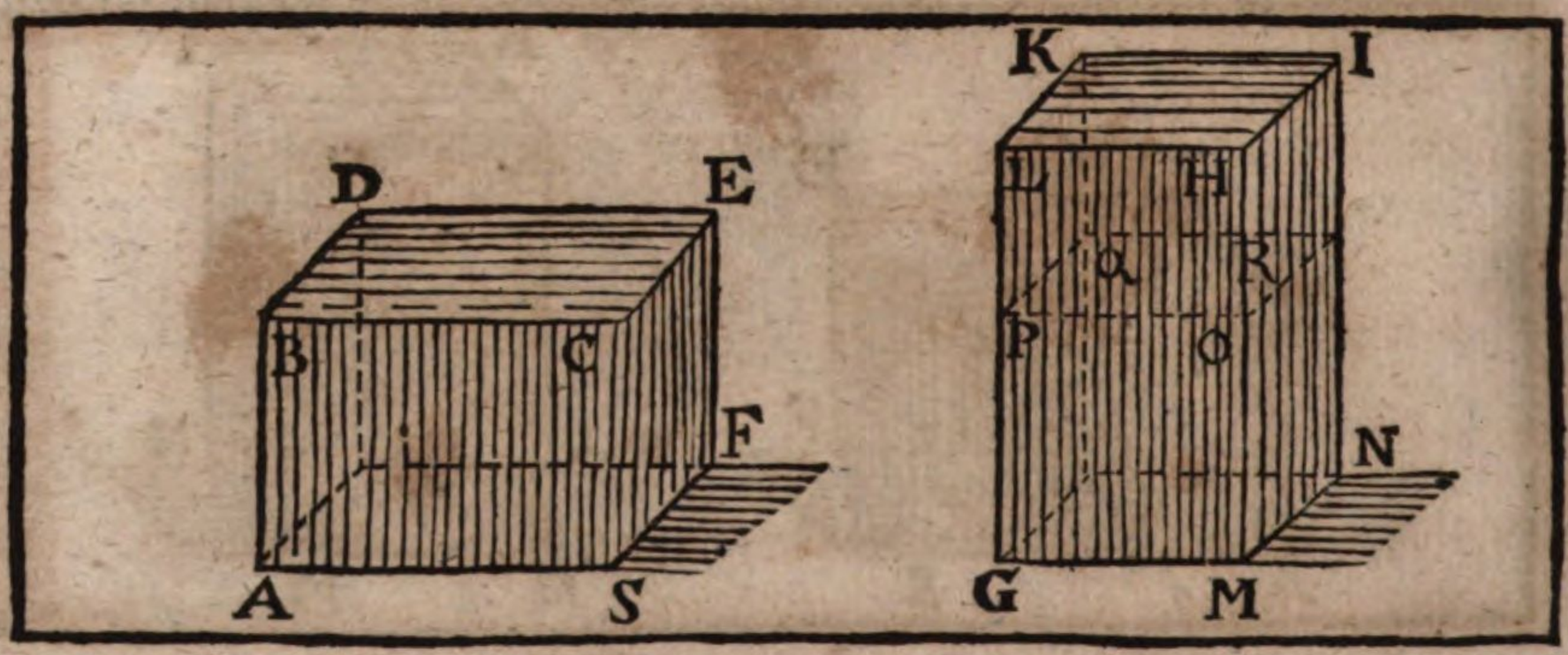
Man setze aber, daß das ▭ GI höher seye, als das ▭ AE.

Zubereitung.

Schneide ab von der Höhe GL, die GP □, der Höhe AB.
Hernach ziehe durch P die flache PQRO ═, der Basis GN, oder LI.

Beweiß.

Weilen die ▭ AE, GR einerley Höhe haben; so wird seyn
das ▭ AF, ▭ GR :: Bas. AF, Bas. GN. d. 32. II.
Es ist aber das ▭ AE, ▭ GR :: ▭ GI, ▭ GR. d. 7. 5.
(dann die ▭ AE, und GI einander □ gegeben worden seynd.) d. d. Vorg.
Dahero auch seyn werde Bas. AF, Bas. GN :: ▭ GI, ▭ GR.



Unterdessen, weilen das ▭ GI durchschnitten ist mit der Fläche PQRO. d.d.Zub.

So wird seyn, das ▭ PI, ▭ GR :: Bas. LO Bas. PM. d. 25. 11.

Es haltet sich aber die Basis LO. Bas. PM :: LP. PG. d. 1. 6.

Deßwegen ist auch das ▭ PI, ▭ GR :: LP, PG.

Und durch die Zusammensetzung, das ▭ GI (oder das gleiche ▭ AE) d. 18. 5.
▭ GR :: GL, PG (oder dergleichen Linie AB).

Dahero letztlich seyn werde Bas. AF, Bas. GN :: Höhe GL, Höhe AB.

Welches zum ersten zu beweisen ware.

Wann nun gegeben ist, daß die Bases, und Höhe deren ▭ AE und GI widerkehrlich geproportionirt seynd, nemlich Bas. AF, Bas. GN :: GL, AB.

So sagt man zum anderten, daß das ▭ AE ⊓ seye, dem ▭ GI.

Die Zubereitung verbleibet als wie oben.

Indeme sich verhaltet das ▭ AE, ▭ GR :: Bas. AF. Bas. GN. d. 32. 11.

und die Basis AF, Bas. GN :: Höhe GL, Höhe AB (oder die ⊓ GP.) d.d.Vorg.

So wird auch seyn, das ▭ AE, ▭ GR :: GL. GP.

Es ist aber GL, GP :: ▭ GH, ▭ GO. d. 1. 6.

Und als wie die Bas. GH. Bas. GO :: ▭ GI, ▭ GR. d. 32. 11.

Darum auch seyn werde das ▭ AE, ▭ GR :: ▭ GI, ▭ GR.

Und deßwegen ist das ▭ AE ⊓, dem ▭ GI. d. 9. 5.

Welches zum anderten zu beweisen ware.

Wann letztlich gegeben wird, daß die auffstehende AB, GL nicht bleyrecht, sondern schrög auff denen Bases stehen, so ist der Beweiß, und die Zubereitung, wie folget: nemlich,

Man machet erstlich auff denenselben Bases AF, GN, die auffgehende I, und mit denen schrögen ▭ in einerley Höhe.

Worauß alsdann erscheinet, daß diese Schröge ⊓ seyn, denen rechten ▭. d. 30. 11.

die rechte ▭ aber haben ihre Basen und Höhen in widerkehrlicher Proportion. d. 34. 11.

Folget, daß auch die Schröge ▭ in widerkehrlicher Proportion ihrer Basen und Höhen seynd, u. s. f.

Welches zu beweisen ware.

Anmerckung.

Was gesagt und bewiesen worden ist, in denen 29. 30. 31. 32. 33. 34. Vorgaben von denen ⌲, das jene wird auch gesagt und bewiesen von denen drey-eckichten Eck-Säulen. Die Ursach ist, weilen sie deren ⌲ gerad die Helffte seyn, wie es in der 28. Vorgab dieses Buchs bewiesen ist. Nemlich man sagt:

I.

Die drey-eckichte Eck-Säule, welche einerley Höhe haben, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Bases.

II.

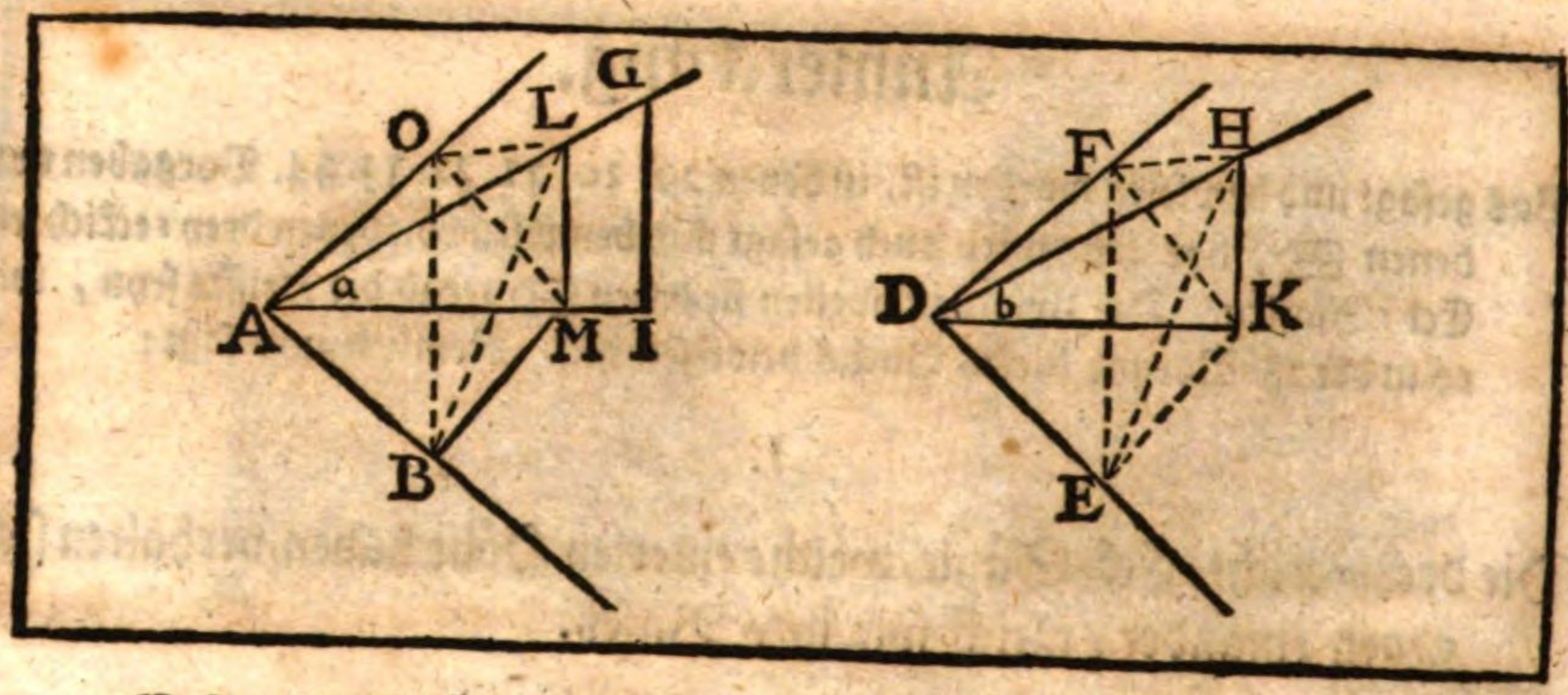
Wann sie einerley oder gleiche Bases haben, und in einerley Höhe stehen, so seynd solche alsdann einander gleich.

III.

Wann sie einander gleichförmig seynd: so stehen sie gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.

IV.

Wann sie einander gleich seynd: so haben sie ihre Bases und Höhe in einer wider-kehrlichen Proportion; und hinwiederum, wann sie ihre Bases und Höhe in widerkehrlicher Proportion haben; so seynd sie einander gleich.



Die XXXV. Vorgab. Betrachtung.

Wann zwey flache Winckeln (BAC, EDF) einander gleich seynd, und aus ihren Spitzen (A, D) gerade Linien (AG, DH) in die Höhe gehen, welche mit denen ersten Linien beyderseits gleiche Winkeln mitmachen: (nemlich den ∠ BAG ⊓, dem ∠ EDH, und CAG ⊓, FDH) unterdessen in denen in die Höhe gehenden Linien (AG, DH) einige Puncten, (als wie G und H) nach Gefallen genommen, und auß selben auf die Fläche (BAC, EDF) (worauff anfänglich die flachen Winckeln (BAC, EDF) gesetzt seyn, bleyrechte Linien (GI, HK) herunter gelassen; und alsdann auß denen Puncten (I, K) welche von denen bleyrechten auff denen Flächen seynd gemacht worden) in die flachen Winckeln gerade Linien (IA, KD) gezogen werden: So werden sothane Linien mit denen in die Höhe stehenden (AG, DH) einander gleiche Winckeln (a und b) machen.

Zubereitung.

Mache AL ⊓, der DH. Ziehe LM ═, der GI.
Auß M mache MB bleyrecht auff AB, und MC ⊥ auff AC. d. 12. I.
Auch aus K mache KE ⊥ auff DE, und KF ⊥ auff DF.
Hange BL, LC, und EH, FH zusammen.

Beweiß.

Weilen LM ═ ist, der IG, welche auff der Fläche BAC ⊥ ist. d.d. Vorg.
so wird auch LM auff derselben Fläche BAC stehen. d. 8. 11.
Dahero seynd die ∠ LMC, LMA, LMB rechte ∠. d. 3. def. 11.
Und deßwegen ist das □ auff AL ⊓, dem □ auff LM, und AM. d. 47. I.
Das □ auff AM ist aber ⊓, denen □ auff AC, und CM. d. 47. I.
Darumb ist das □ auf AL ⊓ denen □ auff LM, AC, CM.
Denen □ auff LM und CM ist aber ⊓, das □ auff CL.
Folget, daß das □ auff AL auch ⊓ seye, denen □ auff AC und CL.
Dahero ist der ∠ ACL ein rechter ∠. d. 48. I.

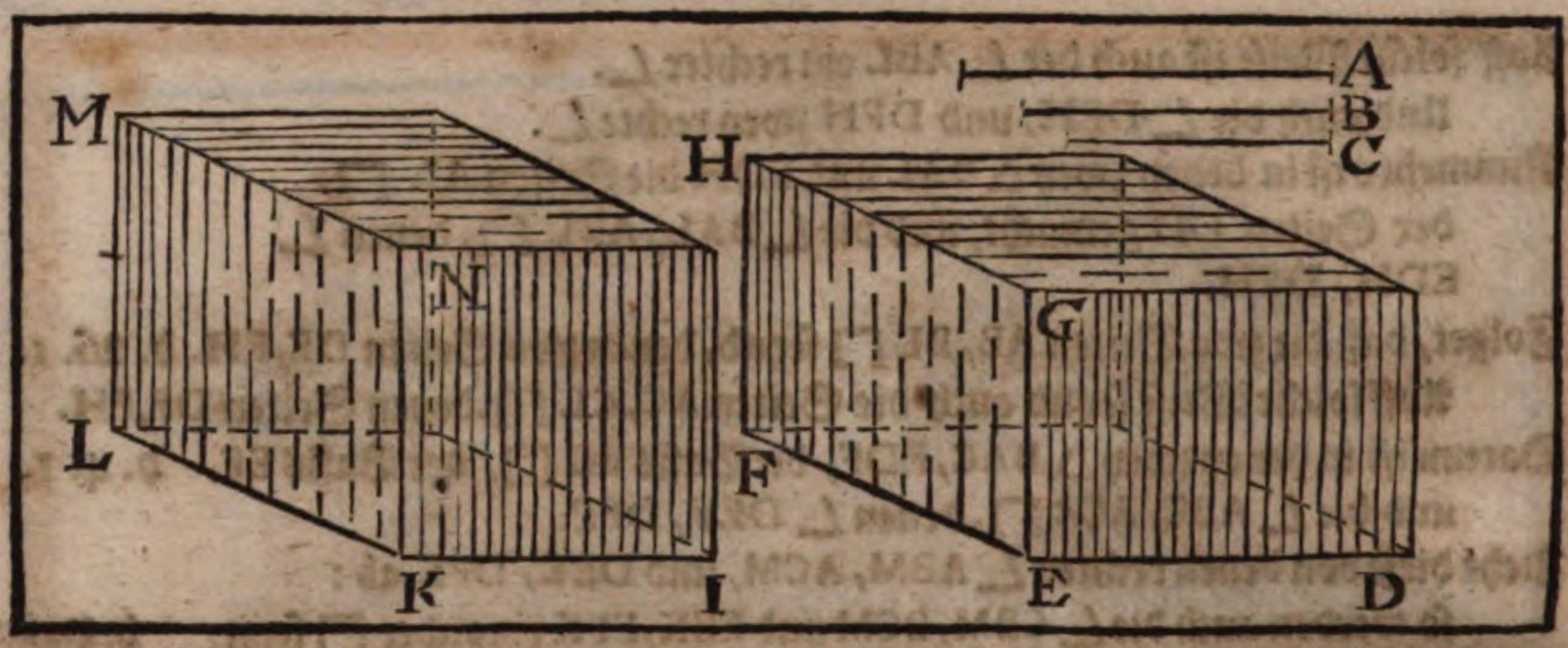
Auff solche Weise ist auch der ∠ ABL ein rechter ∠.
Und auch die ∠ DEH, und DFH zwey rechte ∠:
Nunmehro ist in denen zwey △ BAL und EDH die Seiten AL ⊓,
der Seiten DH gemacht, und die ∠ BAL, ABL ⊓, denen ∠
EDH, DEH.
Folget, daß die zwo Seiten AB, BL ⊓ seynd, denen zwo Seiten DE, EH. d. 26. I.
Auff solche Weise seynd auch die Seiten AC, CL ⊓, denen Seiten DF, FH.
Darum ist in denen zwey △ BAC, EDF, die Basis BC ⊓, der Basis EF. d. 4. I.
und die ∠ ABC, ACB ⊓, denen ∠ DEF, DFE.
Ziehe diese von denen rechten ∠ ABM, ACM, und DEK, DFK ab:
so werden auch die ∠ CBM, BCM und FEK, EFK einander ⊓ seyn. d. 3. ax. I.
Weilen dann, in denen zween △ BCM, EFK die ∠ CBM, BCM, und
FEK, EFK, und die Seiten BC und EF einander ⊓ seynd: d. d. Vorg
So werden auch die Seiten BM, CM ⊓ seyn, denen Seiten EK, KF. d. 26. I.
Indeme aber in denen zween △ ACM, DFK die Seiten AC, CM, und DF,
FK einander ⊓ seynd bewiesen worden, und die ∠ ACM, DFK zween
rechte ∠ seynd: so wird darum die Basis AM ⊓ seyn der Basis DK. d. 4. I.
Wann unterdessen auß denen gleichen □, welche auff denen gleichen AL,
und DH seynd gemacht worden, die gleiche □ auff denen gleichen
AM, und DK abgezogen werden.

So wird annoch verbleiben das □ auff LM ⊓, dem □ auff HK. (d. 47. I. und 1. ax. I.)
Und dahero ist auch die Linie LM ⊓, der Linie HK. d. an. 46. I.
Nunmehro schliesset man, weilen in denen zween △ ALM, DHK.
die drey Seiten AM, AL, LM ⊓ seynd, denen drey DK, DH, HK.
Daß letztlich der ∠ a ⊓ seye, dem ∠ b. d. 8. I.

Welches zu beweisen ware.

Folget.

Wann zwey flache und einander gleiche ∠ gegeben seynd, und auß ihren Spitzen gerade Linien in die Höhe auffstehen, welche mit denen anfänglich gegebenen geraden Linien beyderseits gleiche Winckeln mit machen, daß die ⊥ einander ⊓ seynd, welche von denen äusersten Puncten deren auffstehenden gleichen Linien, in dieselbe Fläche, (worauff die flache ∠ stehen) seynd gezogen worden, nemlich LM ist ⊓ der HK.



Die XXXVI. Vorgab.

Betrachtung.

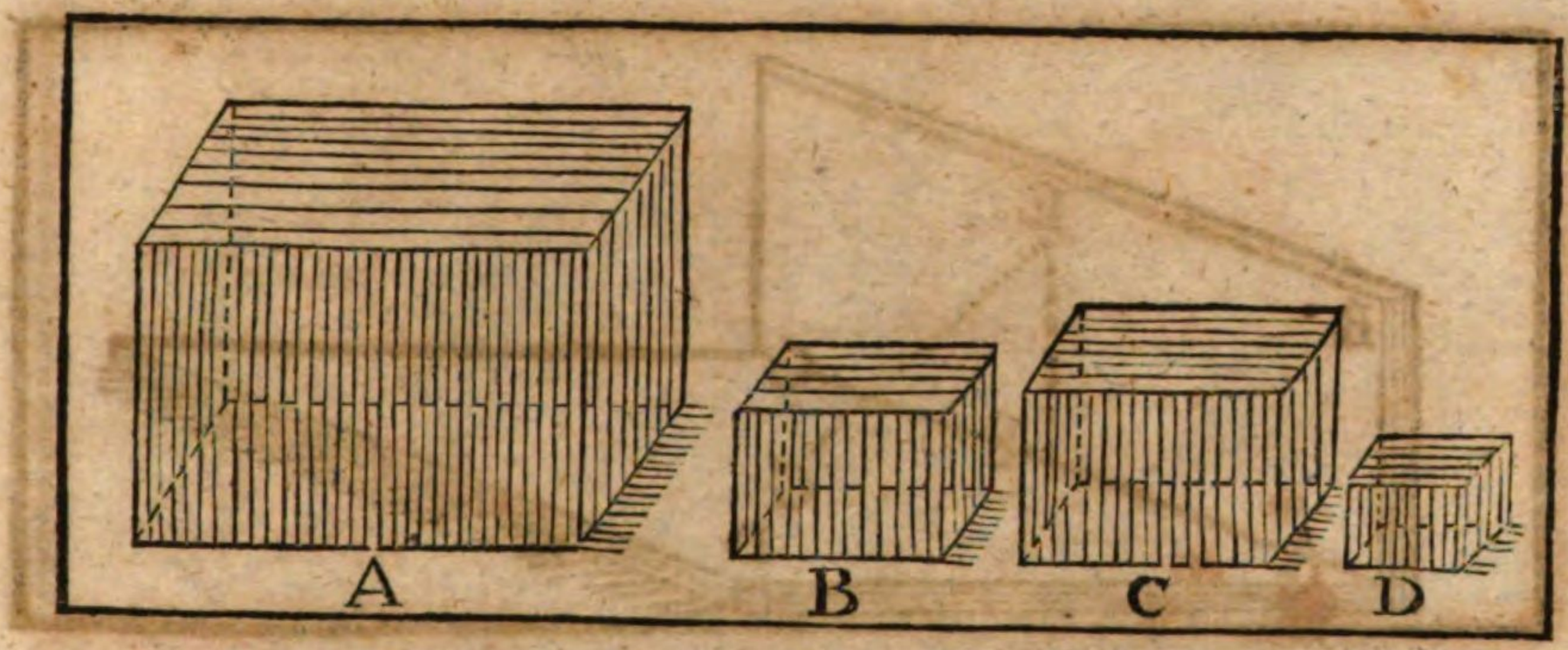
Wann drey gerade Linien geproportionirt seynd: so ist das Parallelepipedum, welches gemacht wird von diesen drey Linien, gleich dem Parallelepipedum, so auß der mittlern Linie zwar gleichseitig, gleichwincklicht aber dem ersten Parallepipedum gemacht ist.

Es seynd gegeben die drey geproportionirten Linien A, B, C, das ist, es stehet A, B :: B, C. Auß diesem seynd auff solche Art die gleichwincklichte ⌲ DH, IM. gemacht worden, daß nemlich DE ⊓, A: EF ⊓, B: EG ⊓, C: und IK, KL, KN, ⊓, der mittlern B seynd. Und der dichte ∠ K ⊓, dem dichten ∠ E: Diesem nach sagt man, daß das ⌲ IM ⊓ seye, dem ⌲ DH.

Beweiß.

Indeme gemacht ist DE, KI :: KN. EG. d. d. Vorg.
so wird das ▭ IN ⊓ seyn, dem ▭ DG. d. 14. 6.
Unterdessen, weilen der dichte ∠ K ⊓, dem dichten ∠ E.
Und die KL ⊓ ist gemacht worden, der EF. Wann man nun d. d. Vorg.
den dichten ∠ K auff den andern ∠ E legen solte,
So werden beyde just auff einander eintreffen, und der Punct L
wird just auff den Punct F einfallen. d. 8. ax. 1.
Dahero werden die bleyrechten Linien, welche auß denen Puncten
L und F auff dieselbe Fläche (worauff die Bases IN und DG
stehen) gezogen seynd, auch einander ⊓ seynd, und d. 35. Cor. 11.
Deßwegen beyde ⌲ IM, und DH einerley Höhe haben,
Letztlich aber wegen der gleichen Bases IN und DG und der gleichen Höhe,
ist das ⌲ IM ⊓, dem ⌲ DH. d. 31. 11.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXVII. Vorgab. Betrachtung.

Wann vier gerade Linien geproportionirt seynd: so werden die Parallelepipeden, welche auff ihnen gleichförmig und gleichgestölter beschrieben worden, auch geproportionirt seyn; und hinwiederum, wann vier Parallelepipeden geproportionirt seynd: so werden auch die vier Linien, worauff sie gleichförmig und gleichgestölter beschrieben seynd, geproportionirt seyn.

Es seynd gegeben die vier geproportionirte gerade Linien A, B :: C, D. Darauff seynd vier gleichförmig und gleich gestölte ▭ gemacht worden. Diesem nach sagt man, daß erstlich seye das ▭ A, ▭ B :: ▭ C, ▭ D.

Beweiß.

Das A ▭ ist zu den ▭ B in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Linie A zu B hat.

Also auch ist das ▭ C zu dem ▭ D in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Linie C zu D hat. d. 33. 11.

Es ist aber die Verhaltnuß A zu B ⊓ gegeben, der Verhaltnuß C zu D. d. d. Vorg.

Folget, daß auch die Verhaltnuß deß ▭ A, zu dem ▭ B ⊓ seye, der Verhaltnuß deß ▭ C, zu dem ▭ D.

Darum ist das ▭ A, ▭ B :: ▭ C, ▭ D. d. 6. 7. def. 5.

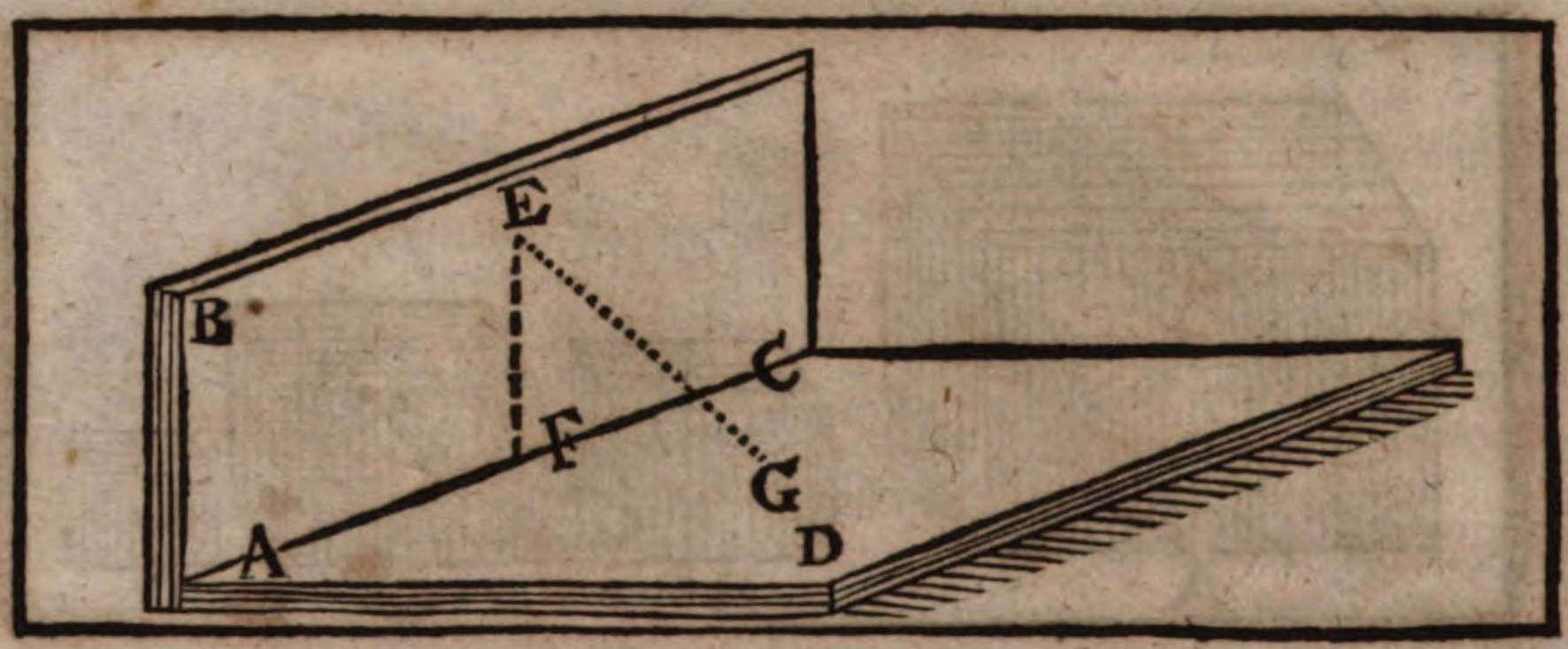
11. Wann es ist, ▭ A, ▭ B :: ▭ C, ▭ D; so sagt man, daß auch seye A, B :: C, D.

Dann das ▭ A zu dem ▭ B in dreymahliger Verhaltnuß ist, der jenen, welche die Linie A zu B hat, und auch das ▭ C ist zu den ▭ D in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Linie C zu D hat. d. 33. 11

Die Verhaltnuß aber deß ▭ A, zu dem ▭ B ist ⊓ gegeben worden, der Verhaltnuß deß ▭ C, zu dem ▭ D. d. d. Vorg.

Folget, daß auch die Verhaltnuß der Linie A zu B ⊓ seye, der Verhaltnuß der Linie C zu D. Darum ist es A, B :: C. D. d. 6. 7. def. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine Fläche auff einer andern Fläche bleyrecht stehet, und man auß einem Punct, welcher auff der einen Fläche nach Gefallen genommen worden, eine bleyrechte Linie auff die andere Fläche ziehen will: so wird sothane bleyrechte Linie in den gemeinen Durchschnitt fallen.

Es ist gegeben die Fläche ABC ⊥ auff der Fläche ADC, ihr gemeiner Durchschnitt ist AC. Nun will man auß dem Punct E, welcher auff der Fläche ABC nach Gefallen ist genommen worden, eine ⊥ auff die Fläche ACD herunter ziehen. Diesem nach sagt man, daß die ⊥ nicht anderwertig, gesetzt wie in G, sondern fust in den gemeinen Durchschnitt, als wie in Punct F fallen werde.

Beweiß.

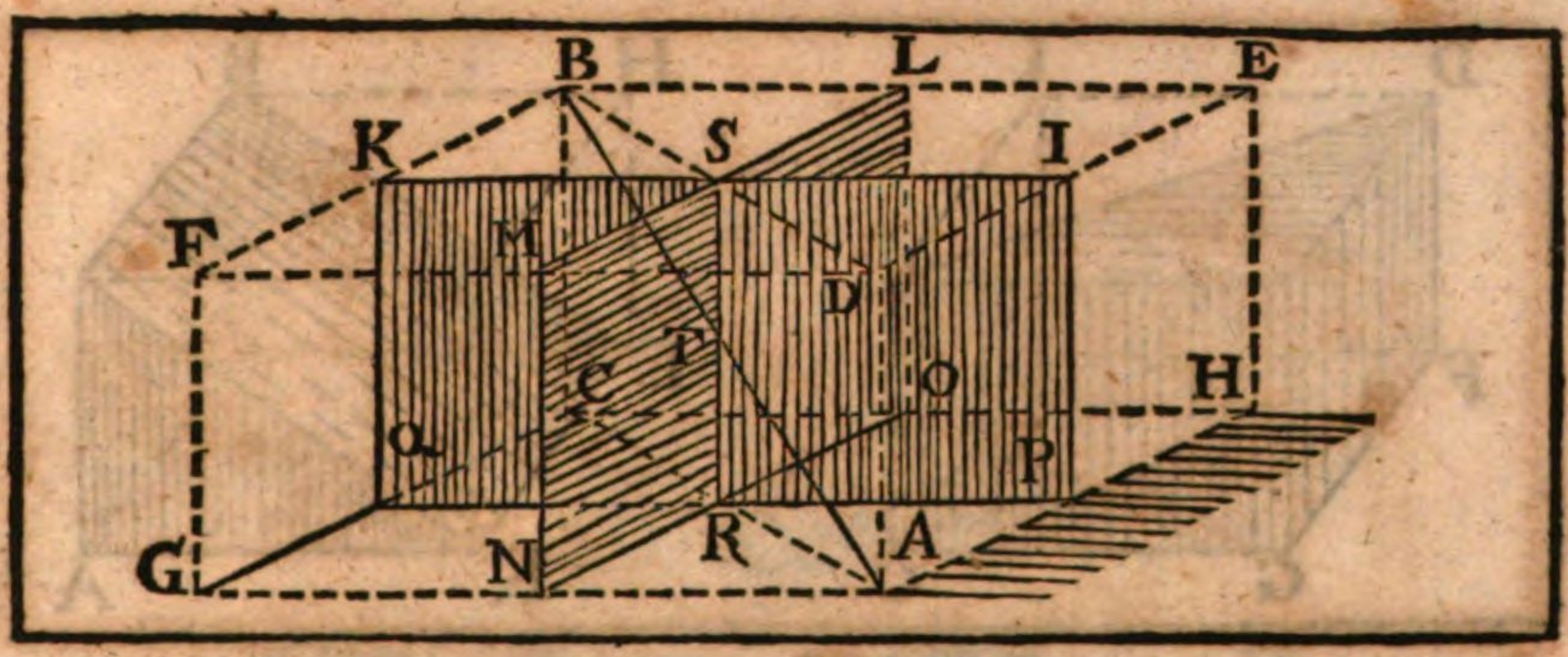
Wann man es nicht glaubet, sondern noch darbey bleibet, daß nemlich die herunter gezogene ⊥, nicht in den gemeinen Durchschnitt AC, sondern in Punct G auff der Fläche ADC, falle:

So ziehe dann auß dem Punct E, die Linie FE ⊥ auff den gemeinen Durchschnitt AC; Diese FE wird hernach auch ⊥ auff der Fläche ADC stehen. d. 4. def. 11.

Worauff aber folgete, daß auff solche Weise auß dem Punct E, welcher ausserhalb der Fläche ADC ist, auff dieselbe Fläche ADC zwey ⊥ nemlich EF, und EG gezogen wären. Welches ungereimt ist: d. 13. an. 11.

Dahero schliesset man, daß also nothwendig die auß dem Punct E gezogene ⊥ auff die Fläche ADC in den gemeinen Durchschnitt AC, gleich wie EF, fallen müsse, und nicht in die andere Fläche.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXIX. Vorgab. Betrachtung.

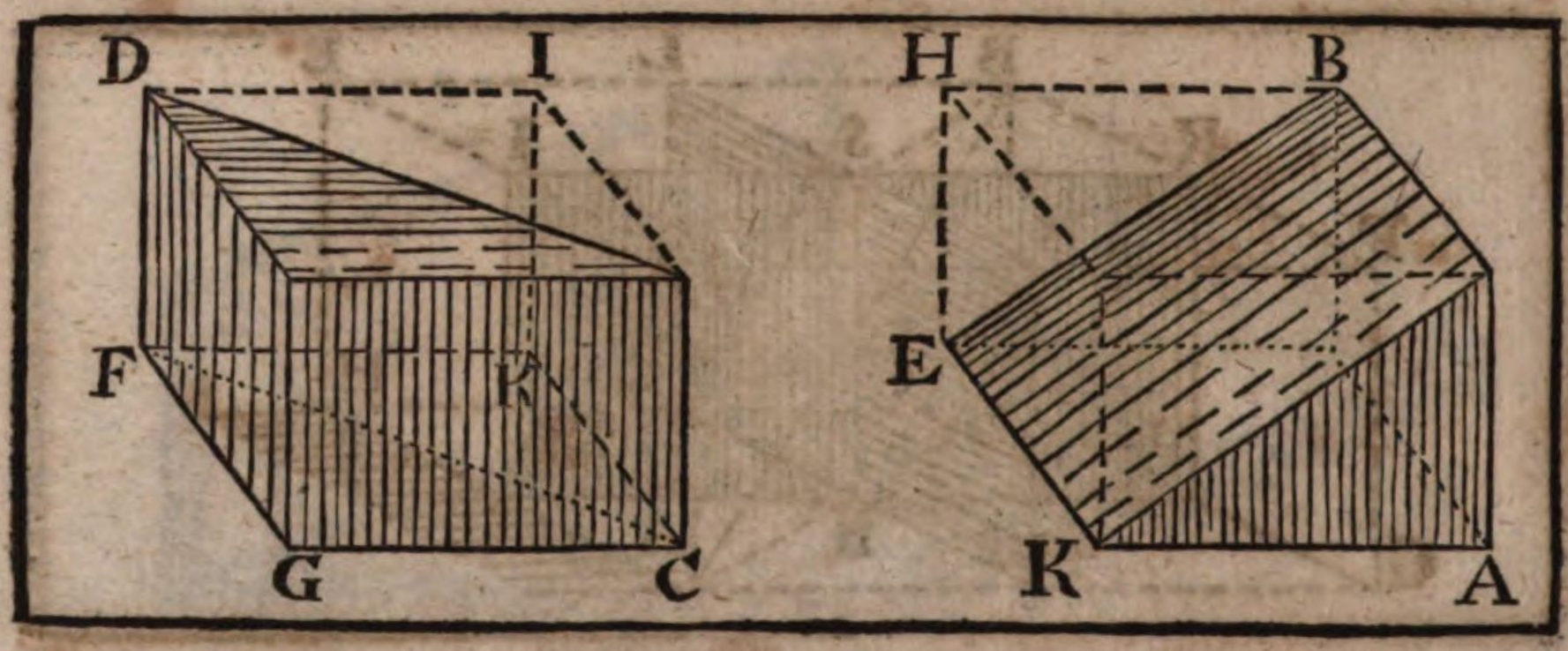
Wann in einem Parallelepipedum (AB) die Seiten deren gegenüberstehenden Fläche (BE, FD: CH, GA: FB, DE: GC, AH) gleich entzwey geschnitten, und durch ihre Puncten (KLIM, QOPN) einige Fläche gezogen werden: (nemlich KP, LN) so wird der gemeine Durchschnitt (RS), und deß Parallelepipedums Diameter (BA) sich einander gleich entzwey schneiden. (nemlich daß BT ⊓ seye, der AT, und ST ⊓, der RT.)

Ziehe SB, SD, RC, RA zusammen.

Beweiß.

Die Seiten CQ, QR seynd ⊓, denen Seiten AP, PR.	d. d. Zuß. u. 34. I.
und der ∠ CQR ist ⊓, dem ∠ APR (umwexlender Weise).	d. 29. I.
Dahero wird auch die Basis CR ⊓, seyn der Basis AR.	d. 4. I.
und also ist der ∠ CRQ ⊓, dem ∠ ARP.	
Unterdessen seynd die zween ∠ PRA, ARQ ⊓, zween rechten ∠.	d. 13. I.
Folget, daß auch die zween ∠ CRQ, ARQ ⊓ seynd 2 rechten ∠.	
und darumb ist CRA eine gerade Linie fort.	d. 14. I.
Eben auff diese Weise ist BSD eine gerade Linie fort.	
Indeme weiters AD = und ⊓ ist, der FG; und FG = und ⊓, der CB.	d. 34. I.
So wird auch AD = und ⊓ seyn, der CB.	d. 9. II. u. 1. ax. I.
und darum ist auch BD = und ⊓, der AC.	d. 33. I.
Folgends werden deßwegen die Linien BA und SR in derselben Fläche BDAC liegen.	d. 7. II.
Dahero, weilen in denen zween △ BTS, ATR die BS ⊓ ist, der AR.	d. 7. ax. I.
und der ∠ BTS ⊓, dem ∠ ATR, und der ∠ BST ⊓, dem ∠ RTA.	d. 15. I. u. 29. I.
Wird letztlich die BT, und ST ⊓ seyn, der AT, und RT.	d. 26. I.

Welches zu beweisen ware.



Die XL. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Eck-Säulen von einerley Höhe seint, und die eine zu der Basis ein Parallelogram hat, welches doppelt ist, der andern Basis, so ein Triangel ist: so seint beyde Eck-Säulen einander gleich.

Es seynd gegeben die zwey Eck-Säulen AB, CD von einerley Höhe. AB hat zur Basis das ▭ AE, und CD hat zur Basis den △ CGF, welcher die Helffte von dem ▭ AE ist. Diesem nach sagt man, daß die Eck-Säule AB, ⊓ seye, der Eck-Säule CD.

Erfülle vorhero die ⊟ AH, und GI.

Beweiß.

Weilen die Basis AE doppelt ist, deß △ CGF. d. d. Vorg.
und das ▭ GK auch doppelt ist, deß △ CGF. d. 34. I.
So wird das ▭ AE ⊓ seyn, dem ▭ GK. d. 6. ax. I.

Und dahero wird wegen der gleichen Höhe, und gleichen Baſes,
das ⊟ AH ⊓ seyn, dem ⊟ GI. d. 31. II.

Die Eck-Säule AB und CD seynd aber geradt die Helffte deren
⊟ AH und GI. d. 28. II.

Folget, daß auch die Eck-Säule AB ⊓ seye, der Eck-Säule CD.

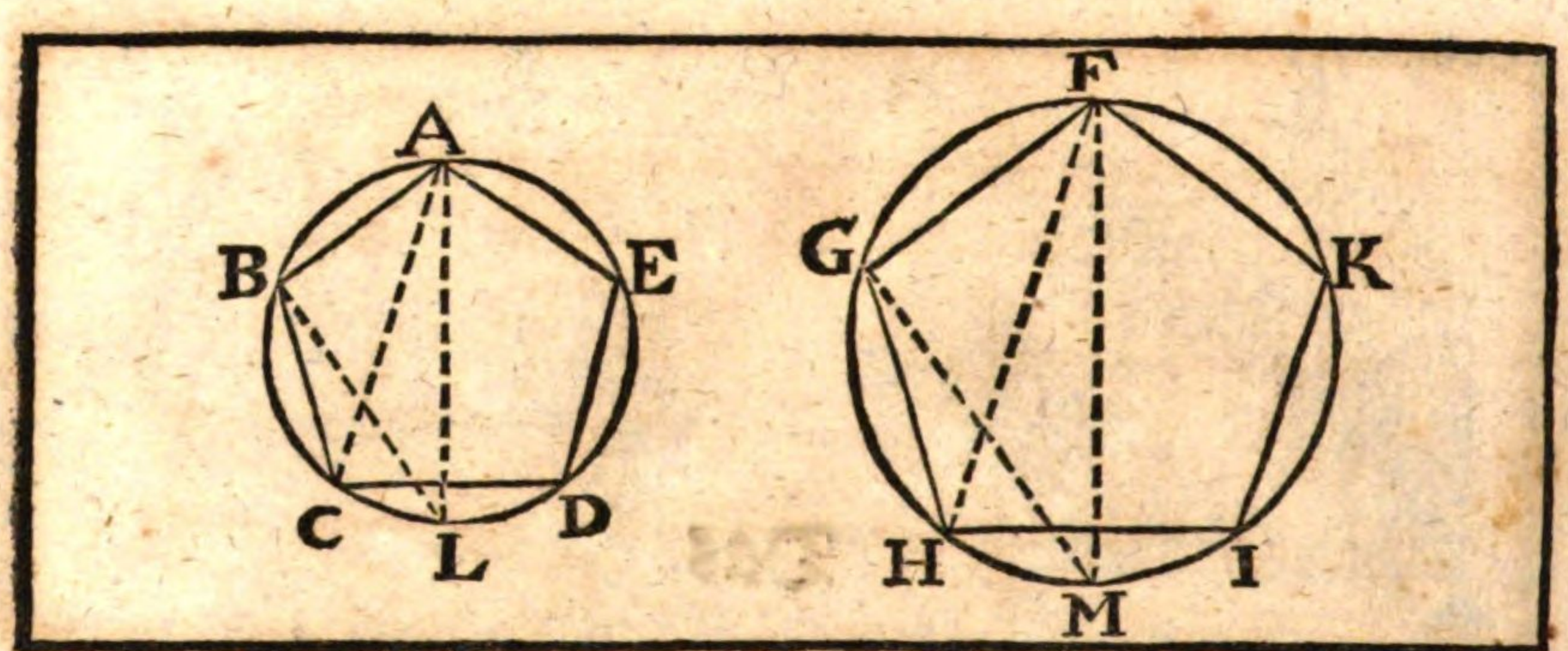
Welches zu beweisen ware.

Das

Achte Buch

Des Teutsch-redenden

Euclides.



Die I. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichförmige in Zirckel eingeschriebene Viel-Ecke, verhalten sich gegen einander, gleich wie die Quadraten auff dero Diametern.

Es seynd gegeben die in Zirckeln eingeschriebene gleichförmige Viel-Ecke, ABCDE, FGHIK, und deren Diametern LA, MF. Diesem nach sagt man, daß, gleich wie sich verhalte das □ auff LA, zu dem □ auff MF, also seye das Viel-Eck ABCDE zu dem Viel-Eck FGHIK.

Ziehe vorhero AC, BL, und FH, GM zusammen.

Beweiß.

Wegen der Gleichförmigkeit deren Viel-Ecke, ist der ∠ B ⌐, dem ∠ G. d. 1. def. 6.

Und verhalten sich die Seiten AB, BC: : FG, GH. d. 6. 6.

Deßwegen ist der △ ABC gleichwincklicht dem △ FGH. d. 6. 6.

Nemlich der ∠ C ist ⌐ dem ∠ H. u. s. f.

Unterdessen ist der ∠ ALB ⌐, dem ∠ ACB, und der ∠ FMG ⌐, d. 21. 3.

dem ∠ FHG (dann sie auff gleichförmigen Schnitze AB, FG stehen.)

Dahero ist auch der ∠ ALB ⌐, dem ∠ FMG.

Es ist auch der ∠ ABL ⌐, dem ∠ FGM (dann beyde im halben Zirckel d. 31. 3.

stehen.)

Folget dann, daß auch der dritte ∠ BAL ⌐ seye, dem dritten ∠ GFM. d. 32. 1.

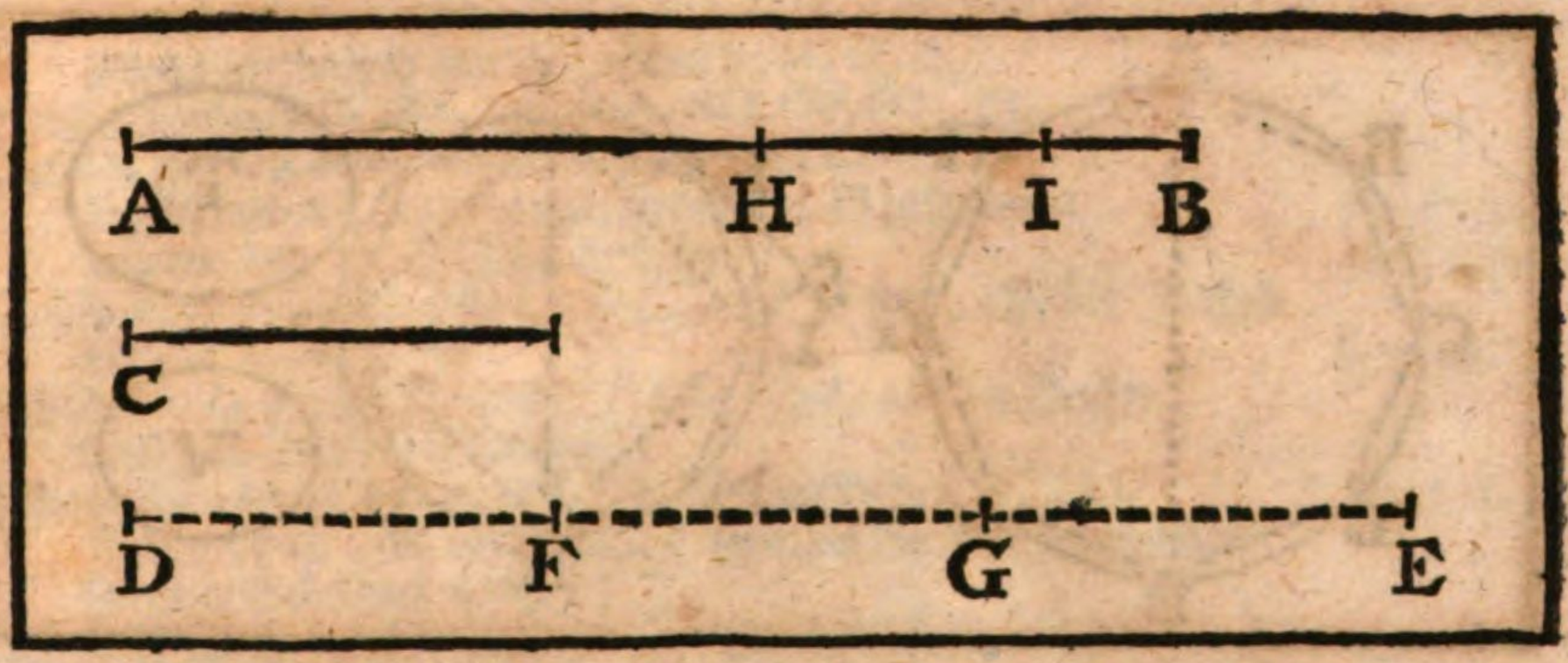
Darauß schliesset man, daß, als wie sich verhalte AL, AB: : FM, FG. d. 4. 6.

Und durch die Verwexlung AL, FM: : AB, FG. d. 16. 5.

Und deßwegen, wie sich das □ auff AL, zu dem □ auff FM verhaltet:

Also ist das Viel-Eck ABCDE auff AB, zu dem Viel-Eck FGHIK auff FG. d. 22. 6.

Welches zu beweisen ware.



Hülffe.

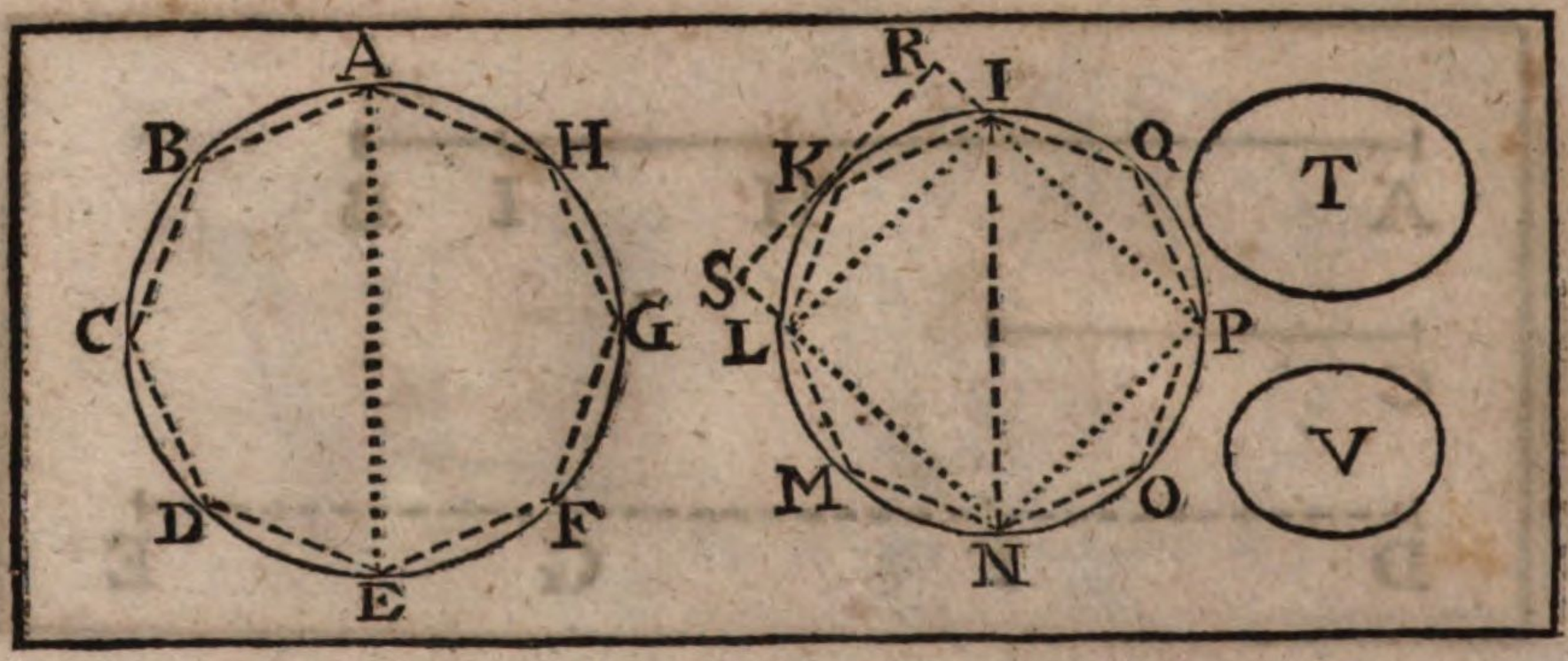
Wann zwey ungleiche Grössen (AB und C) seynd, und von der grössern (AB) mehr als die Helffte (nemlich AH) abgezogen wird, und von der übrigen (HB) abermahlen mehr, als die Helffte (nemlich HI) hinweg genommen wird, u. s. f. so geschicht, daß letztlich die übergebliebene Grösse (IB) kleiner seyn werde, als die vorgegebene kleinere Grösse (C).

Zubereitung.

Nehme C so offt, biß ihre vielfache DE die Grösse AB übertreffe.
Seyen die Theile DF, FG, GE ein jeder insonderheit ⌐, der C.
Unterdessen abziehe auß AB die AH, so mehr ist als die Helffte von AB.
Aus der übrigen HB abziehe wiederumb die HI, so mehr ist als die Helffte von HB, und so fort, biß endlich die Theile AH, HI, IB gleich an der Anzahl werden, denen Theilen DF, FG, GH.

Beweiß.

Es ist klar, daß FE ⌐ seye, als die Helffte von DE.
DE ist aber ⌐ gemacht worden, als AB.
Darumb ist auch die Helffte von DE ⌐, als die Helffte von AB.
Deßwegen ist FE noch viel ⌐, als die Helffte von AB
Unterdessen ist HB ⌐ worden, als die Helffte von AB. [d. d. Vorg. und Zub.
Folget dann, daß FE noch viel mehr ⌐ seye, als HB,
Und darumb dero Helffte GE auch ⌐ seye, als die Helffte von HB.
Es ist aber wiederumb IB ⌐ gemacht worden, als die Helffte von HB. [d. d. Vorg. und Zub.
so wird deßwegen auch GE noch ⌐ seyn, als IB.
Unterdessen ist GE ⌐, der kleinern Grösse C. [d. d. Zub.
Folget, daß auch C ⌐ seye, als die letzt übersbliebene Grösse IB.
Welches zu beweisen ware.



Die II. Vorgab. Betrachtung.

Die Zirckeln verhalten sich gegen einander, gleich wie die Quadraten auff ihren Diametern.

Es seynd gegeben die zween Zirckeln ACEG. ILNP, deren Diametern seynd AE, IN. Diesem nach sagt man, daß, gleich wie sich das □ auff AE, zu dem □ auff IN verhalte: also verhaltet sich der Zirckel ACEG zu dem Zirckel ILNP.

Beweiß.

Wann man es nicht gestehen will, so seye gemacht, daß, gleich wie sich verhalte das □ auff AE, zu dem □ auff IN: also verhalte sich der Zirckel ACEG zu einer andern Grösse, gesetzt, gleich wie zu T.

Nunmehro muß T entweder ⌉, oder ⌈ seyn, als der Zirckel ILNP. Dann gleich (ob zwar es wol wahr ist) kan sie allhier demselben nicht seyn, auß der Ursach, daß sonsten der Zirckel ACEG zu dem Zirckel ILNP, und zu gedachter Grösse T, einerley Verhaltnuß hätte, d. 7. 5.

Und sich deßwegen der Zirckel ACEG auch zu dem Zirckel ILNP verhaltete, als wie das □ auff AE, zu dem □ auff IN. Dieses aber wird allhier noch nicht gestanden.

Seye daher erstlich gesagt, daß T ⌉ seye, als der Zirckel ILNP, umb die Grösse V.

Das ist, der Zirckel ILNP seye ⌈, denen Grössen T + V.

Diesem nach schreibe in den Zirckel ILNP, das □ ILNP ein, welches ⌈ seyn werde, der Helffte des umbschriebenen □ um denselben Zirckel ILNP. d. 9. an. 4.

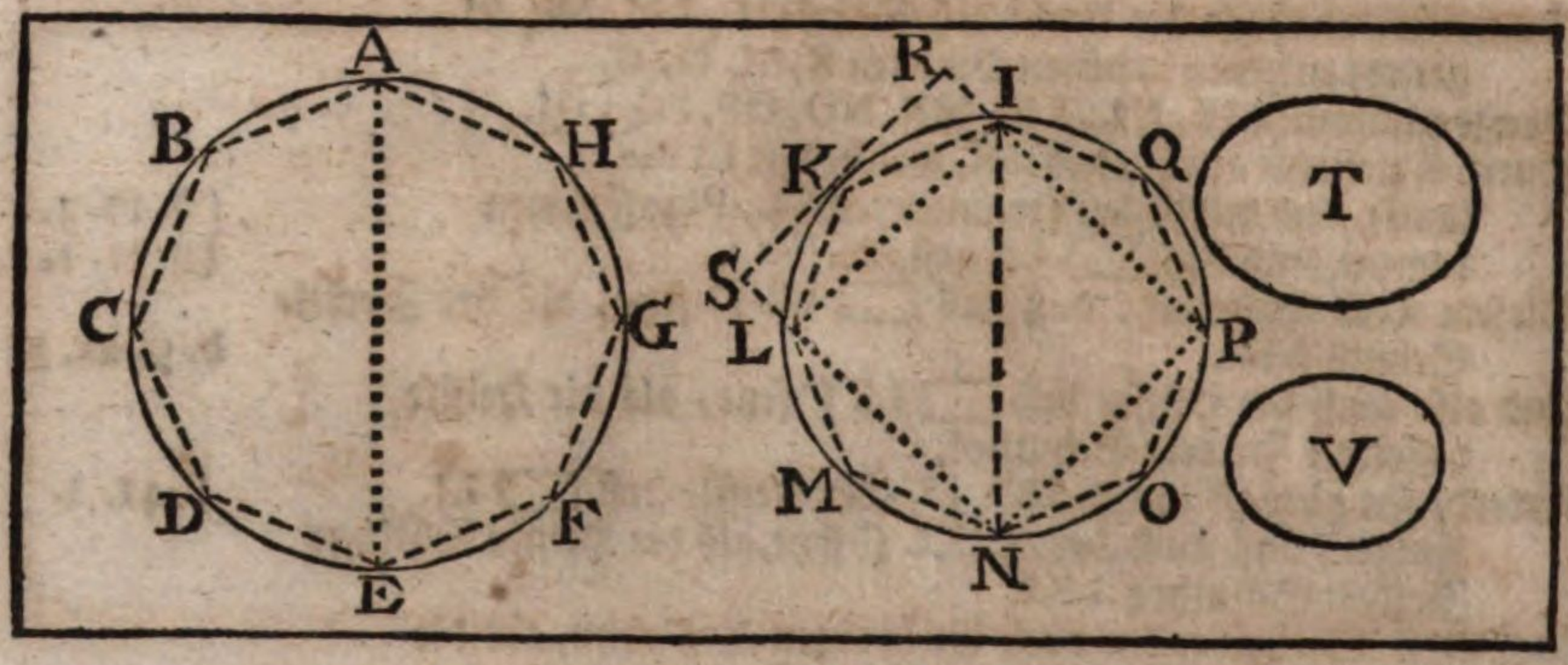
So ist auch klar, daß das umschriebene □ umb den Zirckel ILNP ⌈, seye, als derselbe Zirckel. d. 9. ax. 1.

Und folgends auch die Helffte des umbschriebenen □ umb den Zirckel ILNP ⌈ seye, als die Helffte desselben Zirckels.

Unterdessen aber ist das □ ILNP ⌈, der Helffte des umbschriebenen □.

Deßwegen auch das □ ILNP ⌈ ist, als die Helffte deß Zirckels ILNP.

Nunmehro zertheile die Umbkreiß-Stücke IL, LN, NP, PI
geradt entzwey in denen Puncten K, M, O, Q.
Hange zusammen IK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ, QI.
Durch K ziehe die anrührende SR, welche mit LI ═
lauffe, und mit denen verlängerten NL, PI zusammen
komme, und das ▭ LR gestalte. [d. 17. 3. u. 31. 1.
Diesem nach erscheinet, daß das ▭ LR ⌜ seye, als der Zirckel-
Schnitz LKI. d. 9. ax. I.
Und also auch die Helffte deß ▭ LR ⌜ seye, als die Helffte
desselben Zirckel-Schnitzes.
Unterdessen aber ist der △ IKL ⌜, der Helffte deß ▭ LI. d. 41. I.
Folget, daß auch der △ IKL ⌜ seye, als die Helffte desselben
Zirckel-Schnitzes LKI.
Auff diese Weise werden auch die übrigen △ ⌜ seyn, als die
Helffte deren Schnitze, in welchen sie seynd.
Und also seynd alle △ sammentlich ⌜, als die Helffte aller
Schnitze sammentlich.
Solte man noch weiter fort die Umbkreiß-Stücke LK, KI, u. s. f.
gleich entzwey zu schneiden, und mit geraden Linien zusammen zu
hangen, sich bemühen.
So würde, gleich wie vorgehends, bewiesen, daß die darauß entsproßne
△ sammentlich ⌜ wären, als die Helffte deren Zirckel-Schnitze
sammentlich, in welchen sie seynd, u. s. f.
Wenn nun von dem Zirckel ILNP mehr, als die Helffte,
nemlich das □ ILNP abgezogen, und auch von denen übrigen
Zirckelschnitze mehr als die Helffte, nemlich die △ IKL, LMN. u. s. f.
hinweg genommen werden. Und stets so fort eines von dem an-
dern abgezogen wird.
So werden endlich einige Zirckel-Schnitze überbeiben, welche sam-
mentlich ⌝ seyn werden, als die Grösse V, so der Unterscheid zwi- d. Vor. Lem.
schen dem Zirckel ILNP, und der Grösse T ist
Setze man, daß die überbliebenen Zirckel-Schnitze IK, KL, LMt u. s. f. seint,
welche sammentlich ⌝ seint, als V.
Diesem nach, weilen der Zirckel ILNP ⌐ ist, der T + V,
Und man auß gedachtem Zirckel die überbliebene Schnitze,
und auß T + V die Grösse V (welche schon ⌜ bewiesen worden
ist, als die überbliebene Schnitze sammentlich) ordentlich abziehet.
So folget klar, daß auch das übrige Viel-Eck IKLMNOPQ ⌜,
verbleibe, als die übrige Grösse T.
Unterdessen einschreibe in den Zirckel ACEG das Viel-Eck ABCD
EFGH, welches gleichförmig seye dem Viel-Eck IKLMNOPQ. d. 18. 6.
Nun ist gewiß, daß sich das Viel-Eck ABCD, zu dem Viel-Eck IKLM,
verhalte, als wie das □ auff AE, zu dem □ auff IN. d. 1. 12.
Es ist aber gesagt worden, daß sich verhalte das □ auff AE zu dem
□ auff IN, als wie der Zirckel AECG, zu der Grösse T.
Dahero sich verhalten werde das Viel-Eck ABCD, zu dem Viel-Eck
IKLM, als wie der Zirckel ACEG, zu der Grösse T.
Entzwischen ist das Viel Eck ABCD ⌝, als der Zirckel ACEG. d. 9. ax. I.



Folget dann letztlich, daß auch das Viel-Eck IKLM ⌝ seye, als T. d. 14. 5.
Dieses aber ist erst vorgehends ⌜ bewiesen worden, als dieselbe T.

Dahero ist es ungereimt, und kan deßwegen die Grösse T
nicht ⌝ seyn, als der Zirckel ILNP. ꝛc.

Mercke, wann man den kleinern Zirckel ILNP zu dem grössern Zirckel ABEG halten und vergleichen wolte, daß eben auff diese Art solte bewiesen werden, daß unmöglich wäre, daß der kleinere Zirckel sich zu einer Grösse, welcher kleiner wäre, als der grössere Zirckel, also verhalten könte, als wie das □ auff IN deß kleinern Zirckels, zu dem □ auff AE deß grössern Zirckels: dahero haubtsächlich erhellet, daß niemahlen ein □ auff dem Diameter eines Zirckels, zu den andern □ auff dem Diameter eines andern Zirckels, dieselbe Verhaltnuß habe, welche der erstere Zirckel, zu der Grösse, (welche kleiner als der letztere Zirckel ist) habe. Es seye hernach der erste Zirckel ⌜, oder ⌝, als der letztere.

Seye zum andern mahl gesagt, daß die Grösse T ⌜ seye,
als der Zirckel ILNP.

Indeme schon vorhero gesagt worden ist, daß sich der Zirckel ACEG also zu der Grösse T verhalte, gleich wie das □ auff AE, zu dem □ auff IN.

So wird sich auch durch die Umbkehrung T zu dem Zirckel ACEG verhalten: als wie das □ auff IN, zu dem □ auff AE.

Unterdessen setze man, daß, wie sich T zu dem Zirckel ACEG verhalte, also sich auch der Zirckel ILNP zu einer andern Grösse, gleich wie zu der Grösse V, verhalte.

Weilen aber T ⌜ zu seyn gesagt wird, als der Zirckel ILNP:
so wird auch der Zirckel ACEG ⌜ seyn, als V. d. 14. 5.

Dahero sich verhalten werde das □ auff IN zu dem □ auff AE
:: der Zirckel ILNP, zu V, so doch ⌝ bewiesen worden ist, als der Zirckel ACEG. Dahero ist es auch ungereimt, und schon im Vorgehenden bewiesen worden, daß nicht seyn könne, daß das □ auff dem Diameter IN, zu dem □ auff dem andern Diameter AE dieselbe Verhaltnuß habe, welche der erste Zirckel ILNP zu der

Grösse V (welche kleiner, als der letztere Zirckel ACEG ist) habe; es seye gleichwol der erste Zirckel ⌜, oder ⌝, als der letztere.

Mercke, daß, wann man den kleinern Zirckel ILNP zu dem grössern Zirckel ACEG halten, und vergleichen wolte, eben auff diese Art solte bewiesen werden: daß unmöglich wäre, daß das □ auff IN, zu dem □ auff AE dieselbe Verhaltnuß haben solte, welche der kleinere Zirckel ILNP zu der Grösse V (welche kleiner ist, als der andere Zirckel (ACEG) hat.

Auß diesem schliesset man, daß also T auch nicht ⌜ seye, als der Zirckel ILNP, und dahero nothwendig demselben Zirckel ILNP ⌐ seyn müsse.

Und deßwegen, massen gesagt ist, daß sich verhalte das □ auff AE zu dem □ auff IN, als wie der Zirckel ACEG, zu der Grösse T.

Jetzund aber der Zirckel ACEG sich zu der Grösse T verhalte, als wie derselbe Zirckel ACEG, zu dem Zirckel ILNP. d. 7. 5.
(denn T ⌐ bewiesen worden ist dem Zirckel ILNP)

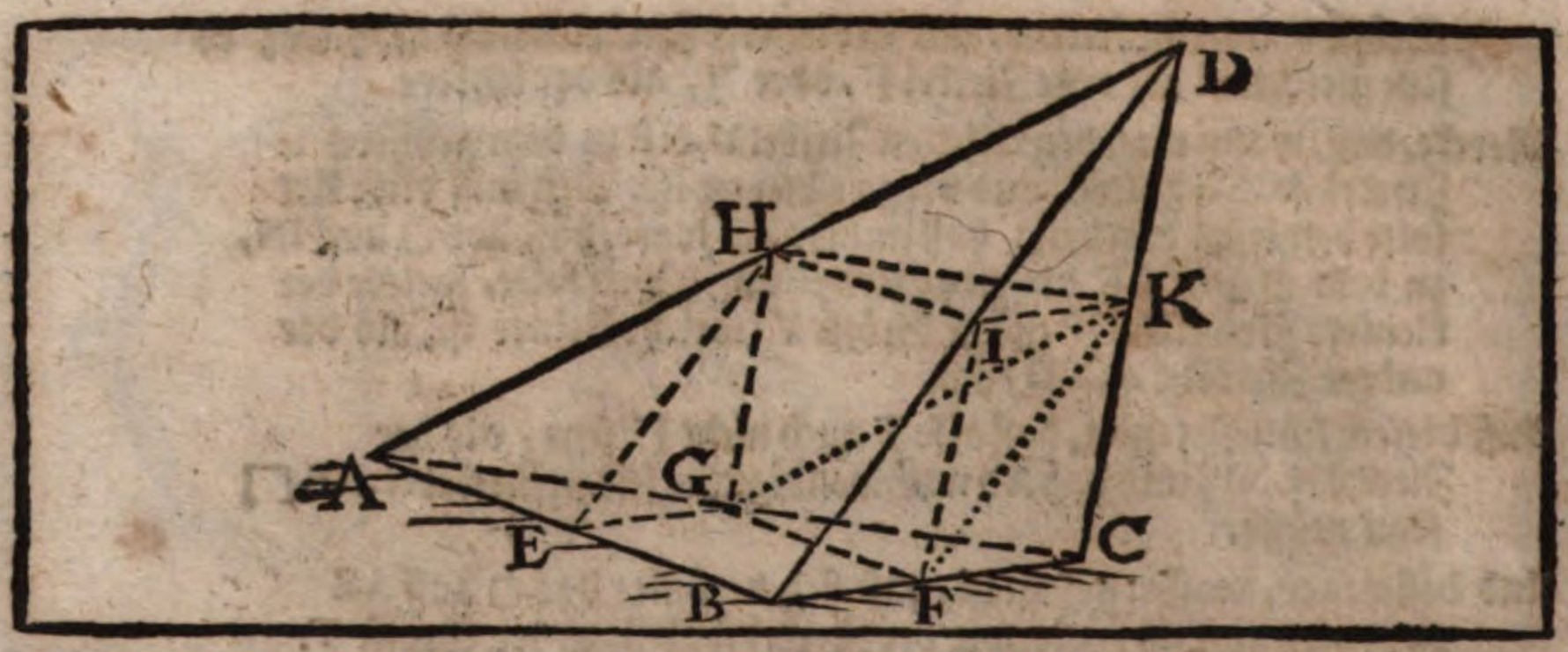
Folget letztlich, daß es seye, gleichwie sich verhalte das □ auff AE zu dem □ auff IN :: der Zirckel ACEG, zu dem Zirckel ILNP.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

1. Daß sich ein Zirckel zu dem andern verhalte, als wie das in dem ersten eingeschriebene Viel-Eck, zu den, in den andern Zirckel gleichförmig eingeschriebenen, Viel-Ecken.

2. Die Zirckeln verhalten sich gegen einander in zweymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern.



Die III. Vorgab. Betrachtung.

Eine jede Spitz-Säule, so eine dreyeckigte Basis hat, wird in zwey Eck-Säule abgetheilt, welche einander gleich, und zusammen genommen grösser, als die Helffte der gantzen Spitz-Säule seint; hernach in zwey Spitz-Säulen, welche einander gleich, und der gantzen, und unter sich gleichförmig seynd.

Es ist gegeben die Spitz-Säule DABC, welche die dreyeckichte Basis ABC hat. Diesem nach sagt man: I. Daß in solcher zwey Eck-Säulen, gleich wie EBFGHI und CFGHIK, welche einander gleich seynd, sich befinden.

Zertheile dahero alle Seiten der Spitz-Säule geradt entzwey in denen Puncten E, F, G, H, I, K, und hange zusammen HK, HI, IK, HE, IF, GF.

Beweiß.

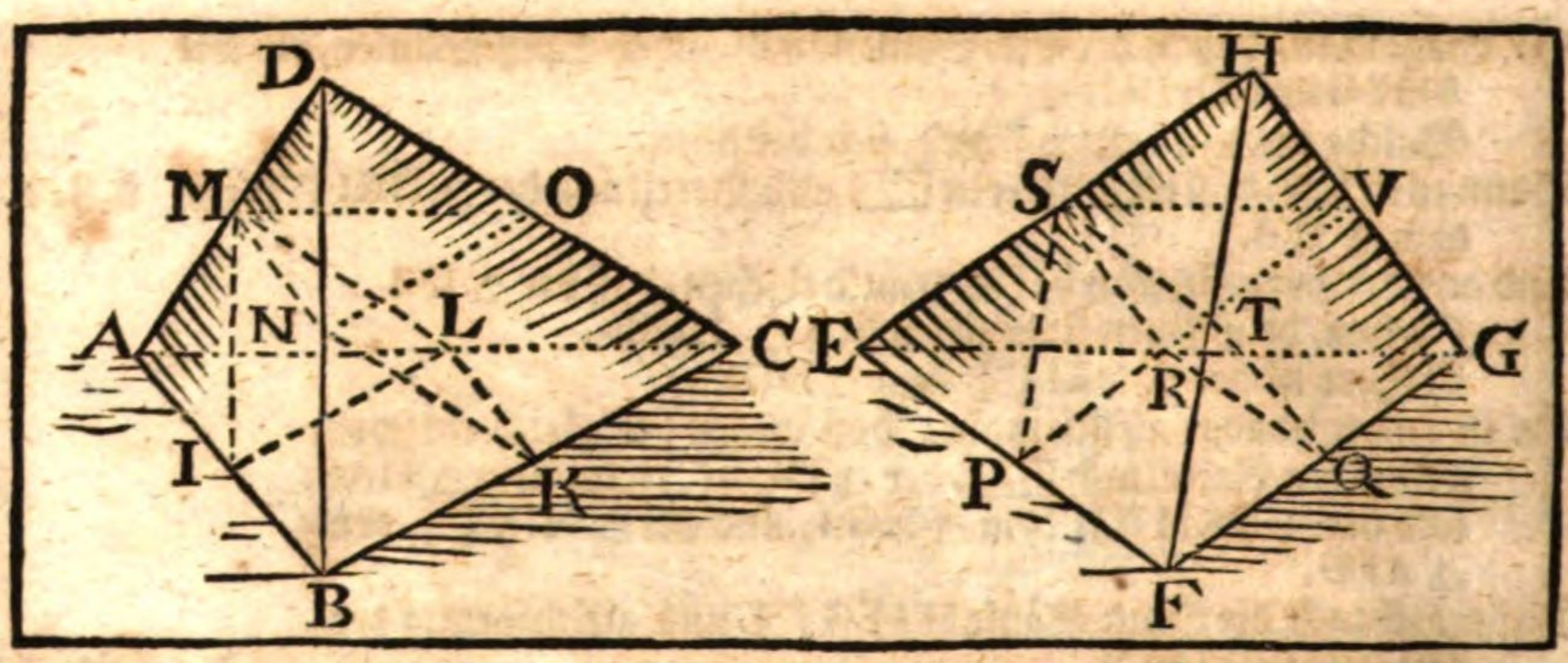
Weilen in dem △ BDC die Seiten DC, DB gleich entzwey seynd getheilt worden, und dahero einander proportionirlich:
So wird seyn DK, KC:: DI, IB,
Und deßwegen ist IK ═, der BC. d. 2. 6.
Auff solche Weise ist auch IF ═, der KC.
und darumb ist FIKC ein ▭. d. 35. def. 1.
Eben also beweiset man, daß CGHK, und HIFG ▭ seynd;
Item, daß auch BFGE und EHIB ▭ seint.
Indeme aber IK und KH ═ seint, denen FC und CG,
so werden auch die Flächen HIK und GFC (so durch dieselbe seynd gezogen worden) einander ═ seyn. d. 15. 11.
Und deßwegen ist CFGHIK eine Eck-Säule. d. 13. def. 11.
Eben auff diese Art kan man beweisen, daß EBFGHI eine Eck-Säule seye.
Unterdessen, weilen diese zwo Eck-Säulen einerley Höhe haben,
und das ▭ BFGE, so die Basis der Eck-Säule EBFGHI ist,
doppelt, oder noch einmahlen so groß ist, als der △ GFC, d. 41. 1.
welcher die Basis der Eck-Säule CFGHIK ist.
So wird dahero die Eck-Säule EBFGHI ⊓ seyn, der Eck-Säule CFGHIK. d. 40. 11.
Welches zum ersten zu beweisen ware.

II. Sagt man, daß in der Eck-Säule DABC, zwey Spitz-Säulen, als wie AHEG und DHIK.
Welche einander gleich seynd, sich befinden.
Dann es ist klar, daß wegen deren ▭ und Bereitung der △ DKI ⌐ seye, d. 8. I. dem △ IFB.
Und aus den vorgehenden hat man auch ersehen, daß der △ IFB ⌐ seye, dem gegen über stehenden △ HGE.
Dahero ist der △ DKI ⌐, dem △ HGE.
So ist ferner handgreifflich wahr, daß wegen der gleich entzweys getheilten Seite, und ▭, der △ DHI ⌐ seye, dem △ HAE. und der △ DKH ⌐, dem △ HGA, und der △ HIK ⌐, dem △ AEG.
Dahero ist auch die Spitz-Säule HAEG ⌐, und gleichförmig der Spitz-Säule DHIK. d. 10. def. 11.
Welches zum andern zu beweisen ware.

III. Sagt man, daß solche zwey Spitz-Säulen gleichförmig der gantzen DBAC seynt.
Dann die Linie KI ist = der Linie BC,
und deßwegen ist der △ IDK gleichförmig, dem △ BDC. d. 4. Cor. 2. 6.
Auff solche Weise werden auch die übrigen △ in denen zwey kleinen Spitz-Säulen gleichförmig seyn, denen übrigen △ der gantzen Spitz-Säule DABC. Welches zum dritten zu beweisen ware.

IV. Sagt man, daß die zwey Eck-Säulen EBFGHI und CFGHIK zusammen genommen ⌜ seint, als die Helffte der gantzen Spitz-Säule.
Ziehe vorhero zusammen GK, FK, worauß entstehen die zwey Spitz-Säulen KGFC, und DHIK, so einander gleich seint. d. 28. 11.
Dann erstlich ist der △ GFC ⌐, dem △ HIK bewiesen. d. d. Vor.
Hernach, weilen die Linie FI =, und ⌐ ist, der Linie KD. [d. 2. 6.
Und auch die Linie FK = und ⌐ ist, der Linie ID. [und 33. 1.
Letztlich auch GK = und ⌐ ist, der Linie HD.
So seynd darumb die △ FCK, IKD und GCK, HKD und GFK, HID einander gleich. d. 8. 1.
Und folgends die Spitz-Säule KCFG auch ⌐, der Spitz-Säule DKIH. d. 10. def. 1.
Die Eck-Säule CFGHIK ist aber ⌜, als die Spitz-Säule ECFG.
(nemlich das gantze ist ⌜, als sein Theil).
Dahero auch die Eck-Säule CFGHIK ⌜ ist, als die Spitz-Säule DKIH.
Unterdessen ist der Eck-Säule CFGHIK ⌐, die Eck-Säule EBFGHI.
Und der Spitz-Säule DKIH ist ⌐, die Spitz-Säule HAEG. [d. d. Vor.
Deßwegen ist die Eck-Säule EBFGHI auch ⌜, als die Spitz-Säule HAEG.
und folgends seynd beyde Eck-Säule sammentlich ⌜, als die beyde Spitz-Säulen sämmtlich. d. 4. ax. 1.
Und darumb seint auch beyde Eckſäulen sammentlich ⌜, als die Helffte der gantzen Spitzsäule DBAC. (Dann es ist klar, wann ein gantzes in zwey ungleiche Theile abgetheilet wird, daß der gröſſere Theil, gröſſer als die Helffte, der kleinere aber, kleiner als die Helffte seye.)

Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab. Betrachtung.

Wann zwey Spitz-Säulen, welche einerley Höhe, auch eine dreyeckichte Basis haben, und eine jede in zwey gleiche Spitzsäulen, so auch gleichförmig der gantzen seynd, und in zwey gleiche Ecksäulen abgetheilt seynd, und diese Spitzsäulen, gleich wie vorgehends wiederumb auff solche Weise abgetheilt werden, u. s. f. So wird seyn, als wie sich eine Basis der einen, zu der Basis der andern, Spitzsäule verhaltet, also werden sich alle Ecksäulen in der einen, zu allen Ecksäulen in der andern Spitzsäule, verhalten.

Es seynd gegeben die zwey Spitzsäulen DABC, HEFG, welche einerley Höhe und die Basis dreyeckicht haben; diese seynd abgetheilt, wie es in der vorgehenden Vorgab geschehen ist, in zwey gleiche Ecksäulen MIBNKL, KNMOCL und SPFRQT, QTSRGV, und in zwey gleiche, und der gantzen gleichförmigen Spitzsäulen MAIL, MDNO und SEPR, SHTV. Und diese Spitzsäulen seynd abermahlen nach solcher Art abgetheilet worden, u. s. f. so lang man wil, doch mit diesem Geding, daß beyderseits gleiche Anzahl deren Abtheilungen gehalten werden. Diesem nach sagt man, daß wie sich die Basis ABC, zu der Basis EFG verhaltet: also werden alle Ecksäulen in der Spitzsäule DABC, zu allen Ecksäulen in der Spitzsäule HEFG sich halten.

Beweiß.

Erstlich ist klar, weilen die Spitzsäule DABC, HEFG. einerley Höhe haben, und die Ecksäulen welche in der ersten Abtheilung entstanden seynd, just in der Helffte derselben Höhe seynd gemacht worden.

Daß auß dieser Ursach gedachte Ecksäulen auch einerley Höhe haben.

Alsdann wird sich wegen gleicher Abtheilung beyderseits verhalten

BC, KC:: EG, QG. d. 15. 5.

Deßwegen ist der △ ABC, △ LKC:: △ EFG, △ RQG. d: 22. 6.

(dann der △ LKC so wol gleichförmig ist dem △ ABC, als der △ RQG, dem △ EFG). d. 4. Cor. 26.

Und durch die Verwexlung der △ ABC, △ EFG:: △ LKC, △ RQG. d. 16. 5.

Hernach, als wie die Basis LKC zu der Basis RQG :: die Eckſäule KNMLCO, zu der Eckſäule QTSRGV. d.34.an.11.

Und auch als wie die Eckſäule KNMLCO, zu der Eckſäule QTSRGV :: die Eckſäule MIBNLK, zu der Eckſäule SPFTRQ. d.7.5.
(Dann ſie haben einerley Höhe, und ſeynd einander gleich)

Dahero letztlich ſeyn werde, wie die Basis ABC zu der Basis EFG :: die Eckſäule KNMLCO + MIBNLK, zu denen Eckſäulen KTSRGV + SPFTRO.

Waun ferners die Spitzſäule MDNO, MAIL und SHTV. SEPR auff gedachte Art abgetheilt werden,

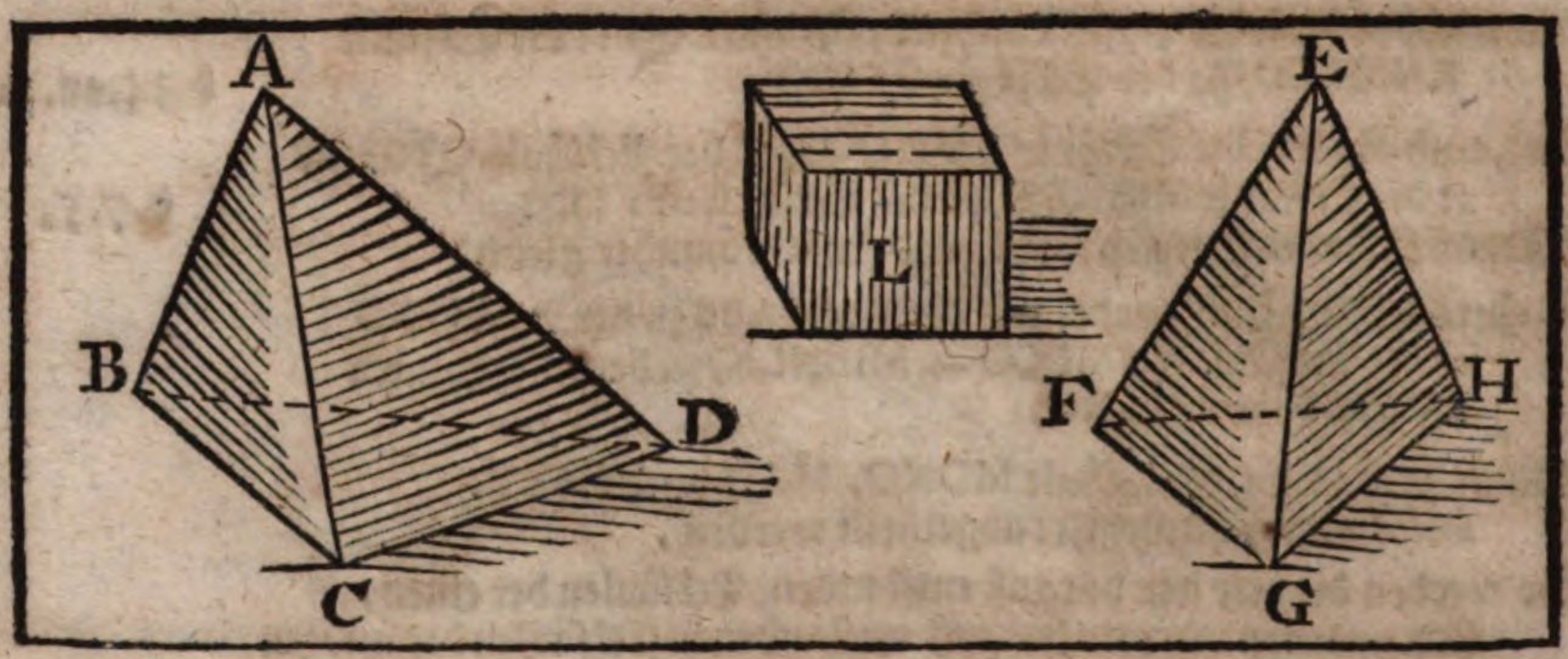
So werden die vier neu darauß entſtandene Eckſäulen der einen, ſich zu denen vier neu darauß entſtandenen Eckſäulen der andern Spitzſäule verhalten; als wie die Basis MNO, und AIL, zu denen Baſes STV und EPR. d.d.Vorg.

Durch die vorgehende Vorgab aber iſt bewieſen worden, daß die Basis MNO und AIL eine jede inſonderheit ⊓ iſt, der Basis LKC, und eben die Basis STV und EPR, eine jede inſonderheit ⊓, der Basis RQG.

Unterdeſſen verhaltet ſich auch der △ LKC, △ ABC:: △ RGQ, △ EFG. d.2.6.
und durch die Verwexlung iſt der △ LKC, △ RGQ :: △ ABC. △ EFG.

Dahero alle Eckſäulen in der Spitzſäule DABC ſich alſo verhalten werden / zu allen Eckſäulen in der Spitzſäule HEFG: gleich wie d.12.5. Die Basis ABC ſich zu der Basis EFG haltet.

Welches zu beweiſen ware.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

Die Spitz-Säulen, so einerley Höhe, und dreyeckichte Bases haben, halten sich gegen einander, als wie ihre Bases.

Es seynd gegeben die Spitzsäulen ABCD, EFGH, so einerley Höhe, und die Bases BCD, FGH dreyeckicht haben. Diesem nach sagt man, daß seye als wie BCD, FGH :: ABCD, EFGH.

Beweiß.

Solte es nicht also seyn, so seye, daß eine Spitzsäule, nemlich ABCD, eine grössere Verhaltnuß habe zu der andern EFGH, als die eine Basis BCD, zu der andern Basis FGH.

Nehme demnach die Grösse L auff solche Weise, daß sie kleiner, als die Spitzsäule ABCD seye, und zu der Spitzsäule EFGH die selbe Verhaltnuß habe, welche die Basis BCD, zu der Basis FGH hat. Nemlich daß seye Bas. BCD. Bas. FGH :: L. Spitz. EFGH.

Hernach zertheile die Spitzsäule ABCD, gleich wie es in der dritten Vorgab geschehen, in zwey gleiche Eck- und Spitzsäulen, und diese zertheile wiederumb auff solche Weise, und also weiter fort, so viel man es nöthig hat. Diesem nach,

Weilen nun die erste zwey Ecksäulen mehr als die Helffte der Spitzsäule ABCD seint, und abermahlen die vier neue und kleinere Ecksäulen auch mehr, als die Helffte deren ersten zwey kleinen Spitzsäulen, seint. u. s. f. d. 3. 12.

So ist klar, daß so viel Ecksäulen in der Spitzsäule ABCD mögen gestaltet werden, welche zusammen genommen, letztlich Γ seyn können, als die Grösse L, welche kleiner ist genommen worden, als die Spitzsäule ABCD.

Mache unterdessen auch eine solche Eintheilung der kleinern Ecksäule in die Spitzsäule EFGH, welche in gleicher Anzahl mit der ersten seint.

Diesem nach, weilen sich alle Ecksäulen in der Spitzsäule ABCD also verhalten zu allen Ecksäulen in der Spitzsäule EFGH, als wie die Basis BCD, zu der Basis FGH. d. 4. 12.

Und aber genommen ist, daß sich die Grösse L zu der Spitzsäule EFGH eben also verhalte, als wie die Basis BCD zu der Basis FGH.

Darum sich auch verhalten werden alle Ecksäulen in ABCD zu allen Ecksäulen in EFGH: als wie die Grösse L, zu der Spitzsäule EFGH.

Unterdessen seynd die Ecksäulen in ABCD sammentlich Γ angenommen worden, als L. d.d.Vorg.

Deßwegen auch die Ecksäulen in EFGH Γ seyn müssen, als die Spitzsäule EFGH, welches aber ungereimt ist, (daß nemlich ein Theil Γ seyn solte, als sein gantzes). d. 14.5.

Dahero schliesset man, daß keine andere Grösse, als wie L, so kleiner ist als die Spitzsäule ABCD, dieselbe Verhaltnuß habe zu der Spitzsäule EFGH, welche die Basis BCD, zu der Basis FGH hat.

Und darumb hat keine unter diesen Spitzsäulen, eine zu der andern eine grössere Verhaltnuß, als eine Basis zu der andern hat.

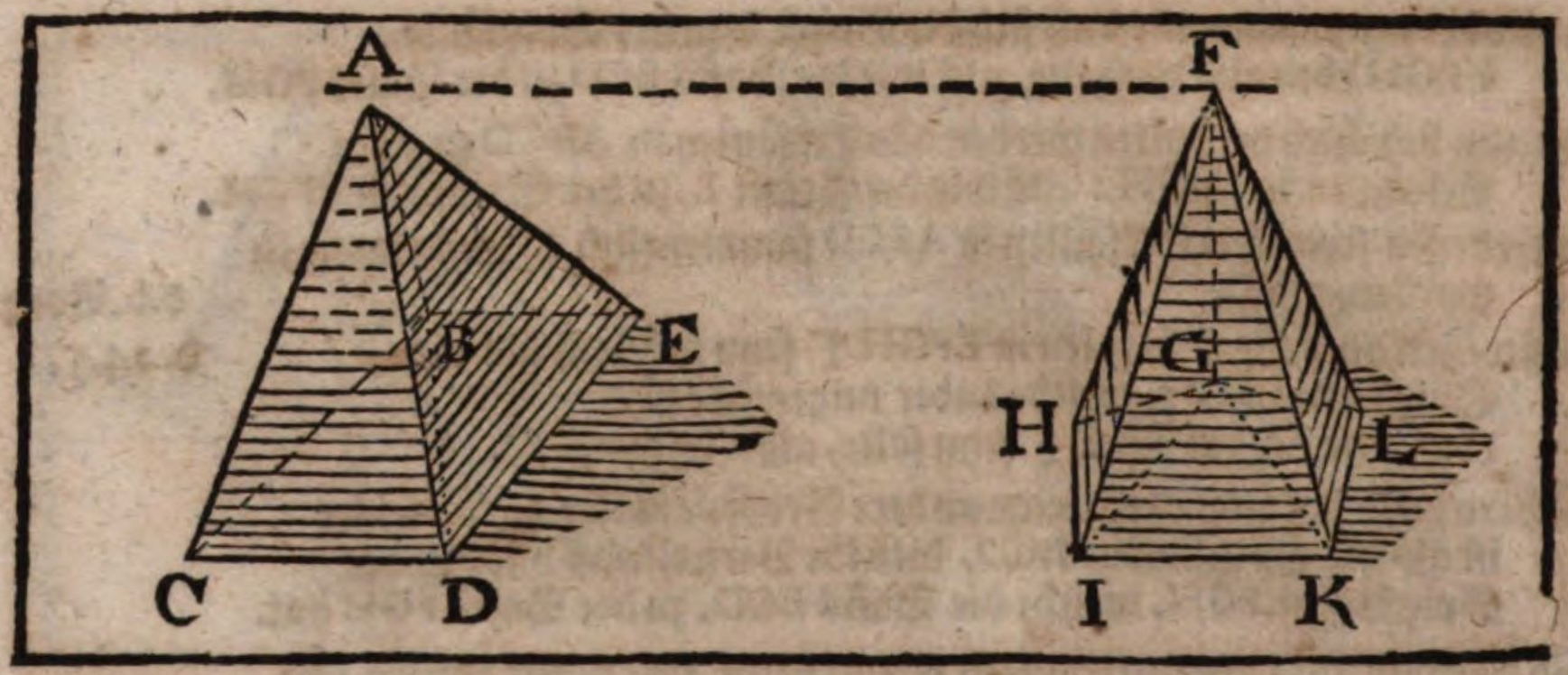
Sondern es muß nothwendig sich verhalten, als wie BCD, FGH :: ABCD, EFGH.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

Die Spitzsäule, so einerley Höhe, und gleiche dreyeckigte Bases haben, seynd einander gleich.

Und hinwiederumb haben gleiche Spitzsäulen, welche gleiche und dreyeckichte Bases haben, einerley Höhe.



Die VI. Vorgab. Betrachtung.

Allerhand Spitz-Säulen, welche gleiche Höhe haben, halten sich gegen einander, als wie ihre Bases.

Es seynd gegeben die Spitzsäulen ABCDE, FGHIKL, welche einerley Höhe haben. Diesem nach saget man, daß seye: wie sich die Basis BCDF zu der Basis GHIKL verhalte: also verhalte sich auch die Spitzsäule ABCDE, zu der Spitzsäule FGHIKL.

Ziehe vorhero auß einem ∠ in denen Basen, als wie auß B und G in die übrige ∠ so viel gerade Linien, als du kanst, dardurch werden die Bases in lauter △ abgetheilt, auff welchen hernach so viel kleine Spitz-Säulen darauff zu stehen dir einbilde. Diesem nach

Beweiß.

Weilen die zwey kleine Spitzs. ABCD und FGHI gleiche Höhe, und die Bases BCD, GHI dreyeckicht haben. d. d. Zub.

So wird seyn, als wie Basis GHI, Basis BCD :: Spitzs FGHI Sp. ABCD. d. 5. 12. und auch als wie Basis GIK, Basis BCD :: Spitzs. FGIK, Spitzs. ABCD. d. 5. 12.

Und als wie Bas GHI + GIK, Bas. BCD :: Spitzs. FGHI + FGIK. Spitzs. ABCD. d. 4. 5.

Ferner ist wie die Bas. GKL. Bas. BCD :: Spitzs. FGKL. Spitzs. ABCD: d. 5. 12.

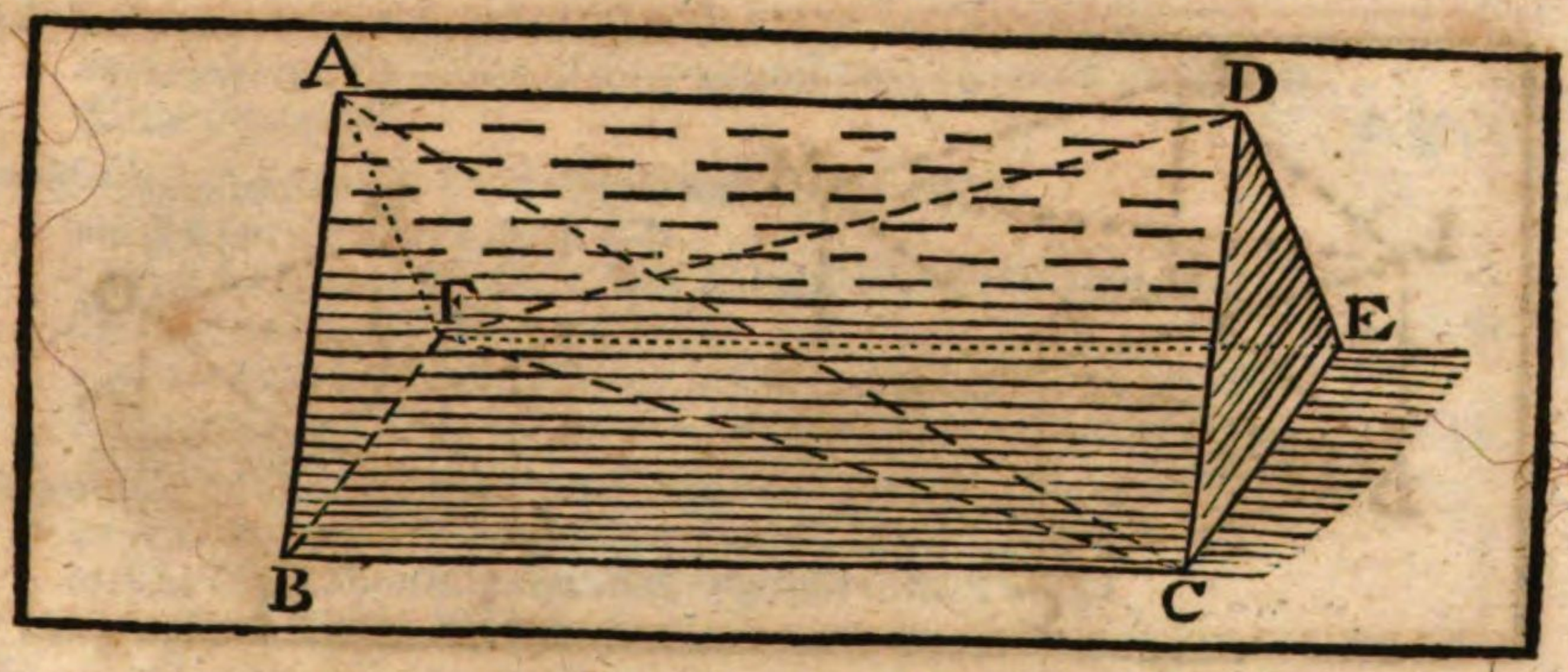
Dahero letztlich seyn werde, als wie Bas. GHI + GIK + GKL (oder mit einem Wort Bas. GHIKL) sich haltet zu der Basis BCD :: ist die Spitzs. FGHI + FGIK + FGKL (oder mit einem Wort, Spitzs. FGHIKL) zu der Spitzs. ABCD. d. 24. 5. d. 24. 5.

Und durch die Umbkehrung Bas. BCD, Bas. GHIKL :: Spitzs. ABCD. Spitzs. EGHIKL. d. 4. 5.

Auff solche Weise wird auch bewiesen, daß wie sich Basis BDE zur Bas. GHIKL verhalte: so seye auch die Spitzs. ABDE, zu der Spitzs. FGHIKL.

Deßwgen schliesset man, daß auch seye, wie Bas. BCD + BDE (das ist die Basis BCDE allein) sich zu der Bas. GHIKL verhalte :: seye die Spitzs. ABCD + ABDE (das ist die Spitzs. ABCDE allein) zu der Spitzs. FGHIKL. d. 24. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Eine jede Eckſäule, ſo eine dreyeckichte Baſis hat, wird in drey Spitzſäulen abgetheilt, welche einander gleich ſeynd, und dreyeckichte Baſes haben.

Es iſt gegeben die Eckſäule ABCDEF, welche zur Baſis, und gegen über ſtehenden Fläche, die gleiche und gleichförmige △ CDE und BAF hat. Dieſem nach ſagt man, daß dieſe Eckſäule in drey dreyeckichte Spitzſäulen, als wie in FACB, FADC, CDFE, welche einander gleich ſeint, abgetheilt werde.

Ziehe vorhero in denen drey ▭ die Diametern FC, AC, FD.

Beweiß.

Der △ ACB iſt ⊓, dem △ ADC.

So haben auch die zwey Spitzſäulen FACB, FADC einerley Höhe. d. 34. 1.

Dahero iſt die Spitz. FACB ⊓, der Spitz. FADC. d. 5. 12.

Abermahlen iſt der △ FAD ⊓, dem △ FDE, d. 34. 1.

und die zwo Spitzſäulen CDAF (oder ſo ein Ding FADC) und CDFE haben auch einerley Höhe.

Dahero iſt auch die Spitz. FADC ⊓, der Spitz. CDFE d. 5. 12.

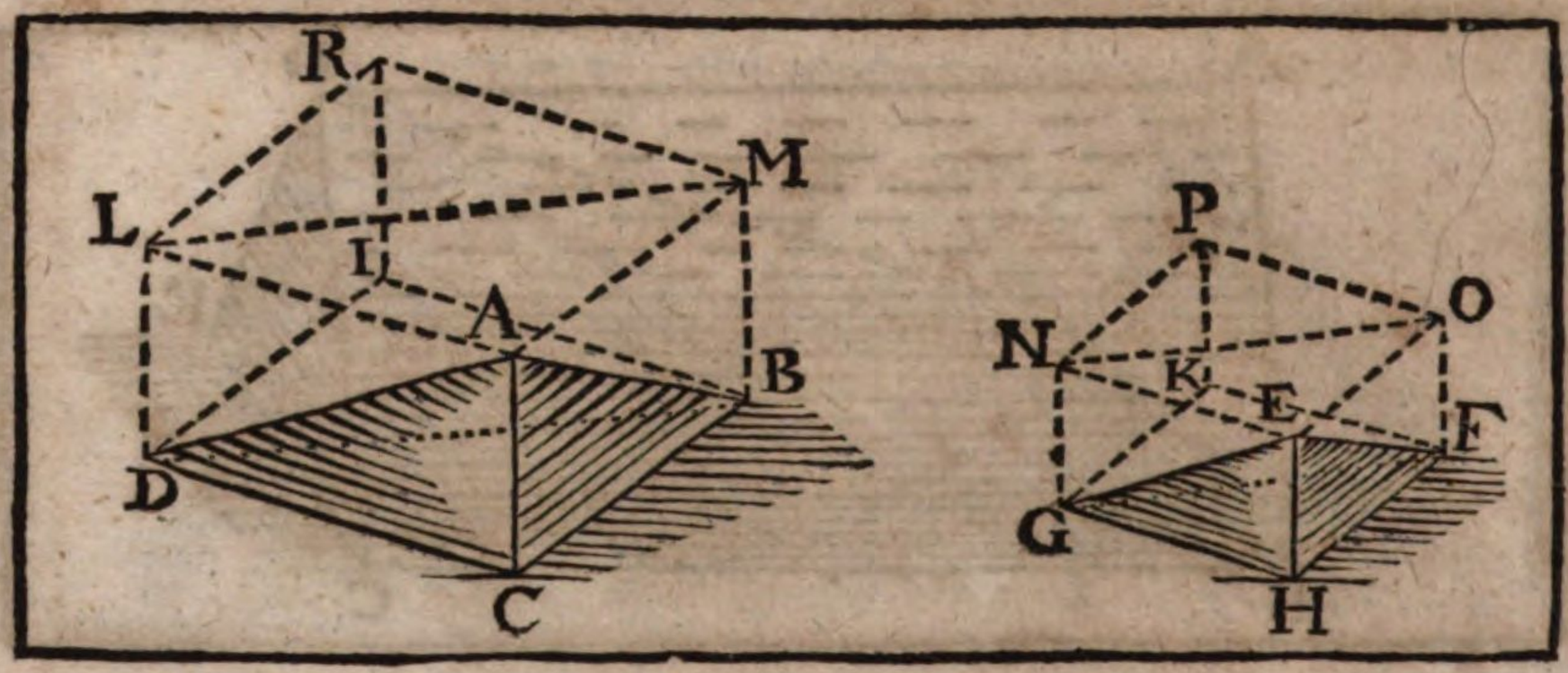
und folgends ſeynd alle drey Spitzſäulen FACB, FADC und CDFE (in welche die Eckſäule ABCDEF iſt abgetheilt worden) einander gleich. d. 1. ax. 1.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Eine jede Spitzſäule iſt grad der dritte Theil der Eckſäule, welche mit derſelben einerley Baſis und Höhe hat, oder

Eine jede Eckſäule iſt dreyfach der Spitzſäule, welche mit derſelben einerley Baſis und Höhe hat.



Die VIII. Vorgab. Betrachtung.

Gleichförmige Spitz-Säulen, welche dreyeckichte Bases haben, halten sich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.

Es seynd gegeben die zwey dreyecklchte Spitzsäulen ABCD, EFGH, welche ihre Bases BCD, FHG gleichförmig haben, und auch die übrige △, gleichförmig denen übrigen △. Diesem nach sagt man, daß eine Spitzsäule zu der andern in dreymahliger Verhaltnuß seye, derjenen, welche eine gleichförmig-haltnuß-sagende Seiten, gesetzt AB, zu der andern EF hat.

Zubereitung.

Erstrecke die Fläche deren △ ACB, DCB, ACD, und
ausfülle die □ CM, CI, CL.
Hernach ziehe LR, RM ═, denen AM, AL biß sie zusammen stossen.
Hange RI zusammen.
So wird darauß das ⌲ CR entstehen, welches mit der Spitzsäulen
ABCD einerley Höhe hat. d. 15. 11.
Auff solche Weise verfertige auch das ⌲ HP.
Letztlich ziehe LM, NO zusammen.

Beweiß.

Dieweilen die Spitzsäulen einander gleichförmig seint, d. d. Vorg.
so werden alle △, ein jeder dem seinen, in beyden Spitzsäulen
einander gleichförmig seyn. d. 9 def. 11.
Und sich zu einem Exempel verhaltenn AC, CB:: EH, HF. d. 1. def. 6.
Und der ∠ ACB wird auch ⊓ seyn dem ∠ EHF. d. 5. 6.

Dahero seynd auch die □ CM, HO einander gleichförmig: d. 15. 11. und 41. 1.
Auff diese Art werden einander gleichförmig seyn die □
CL, HN und CI, HK, und auch ihre gegen über stehende □. d. 24. 11.
Darauff folget, daß auch die ⌲ CR, und HP einander gleichförmig
seint. d. 9. def. 11.

Und deßwegen verhal en sich diese zwey ▭ gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seite CB und HF. d. 33. II.

Die Spitzsäulen ABCD, EFGH seynd unterdessen gerad ein sechster Theil von ihren ▭.
(dann die zwey Eckſäulen LMBCAD und NOFEHG seyn gerad die Helffte deren ▭ CR und HP. d. 28. II.
Und die zwey Spitzsäulen ABCD und EFGH seynd gerad der dritte Theil von denen zwey Eckſäulen LMBCAD und NOFEHG) d. 7. 12.

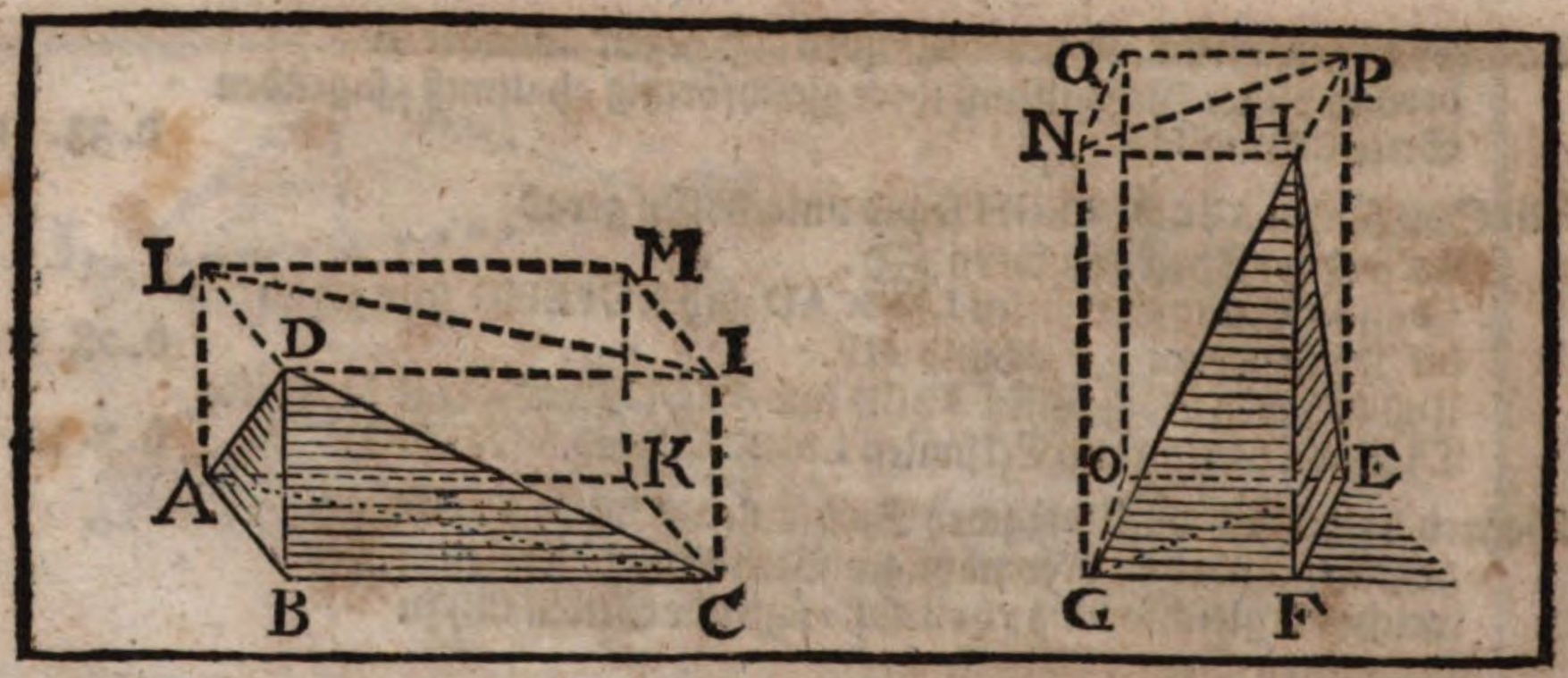
Dahero halten sich auch die zwey Spitzsäulen ABCD, EFGH gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß, derjenen, welche die gleichförmig-haltnuß-sagende Seiten CB, zu der andern Seiten HF hat.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

Auch die gleichförmige Spitzsäulen, welche mehr, als drey Seiten zur Basis haben, stehen gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.

Die Ursach ist, weilen solche in dreyeckichte Spitzsäule können abgetheilt werden, welche verschiedener einander gleichförmig seint; und in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten gegen einander sich verhalten, und dahero auch zusammengesetzter sich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten verhalten werden.



Die IX. Vorgab. Betrachtung.

Die gleichen Spitz-Säulen von dreyeckigten Basen, haben ihre Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter; und hinwiederumb die Spitz-Säule, von dreyeckichten Bases, welche ihre Bases und Höhe widerkehrlich geproportionirter haben, seynd einander gleich.

Es seynd gegeben die gleiche, und auff dreyeckichten Bases stehende Spitzsäulen DABC, HEFG. Diesem nach sagt man I. daß sie ihre Bases ABC, EFG, und die Höhe wiederkehrlich geproportionirter haben, nemlich daß es seye, Bas. ABC. Bas. EFG:: die Höhe der Spitz. HEFG. Höhe der Sp. DABC.

Zubereitung.

Verfertige die ▭ BM, FQ, gleich wie es in der vorgehenden Vorgab geschehen ist.

Beweiß.

Es ist klar, daß die zwey Eck säulen ALICBD und GNPEFH dreymahlen d. 7. Cor. 11. so groß seyn, als die Spitzsäulen ADCB und GHEF.
(dann sie auff einerley Basis stehen, und einerley Höhe haben.) d. d. Zub.

Nun ist die Spitzsäule ADCB ⊓ gegeben der Spitzsäule GHEF. d. d. Vorg.

Darumb ist auch die Eck säule ALICBD ⊓, der Eck säule GNPEF. d. 6. ax. 1.

Unterdessen seyno die ▭ BM und FQ gedoppelt deren Eck säulen ADCB und GHEF. d. 28. 11.

Dahero ist das ▭ BM ⊓, dem ▭ FQ. d. 6. ax. 1.

Diese ▭ BM und FQ aber, haben wegen ihrer Gleichheit die Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter. d. 34. 11.

Folget, daß auch die zwey gleiche Spitzsäule ADCB, GHEF, (welche just der sechste Theil seynd von denen ▭ BM, FQ, ihre Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter haben. d. 15. 5.

11. Wann die Bases und Höhe deren Spitzsäule DABC, HEFG wiederkehrlich geproportionirter seint, nemlich wann es ist, als wie Basis ABC, Basis EFG:: die Höhe der Spitz. HEFG. Höhe der Spitz. DABC.

Diesem nach sagt man, daß die Spitzsäule DABC ⊓ seye, der Spitzsäule HEFG.
Die Zubereitung und Verfertigung der Figur verbleibet wie oben.
Nunmehro, weilen es ist, Basis oder △ ABC, zu Bas. oder △ EFG :: die Höhe der andern Spitzs. zu der Höhe der ersten Spitzs. d.d.Vorg.
So wird auch seyn ▭ ABCK. ▭ EFGO :: die Höhe der andern zu der Höhe der einen. d. 15. 5.
Das ist, in denen ⌲ BM und FQ seint die Bases und Höhe einander widerkehrlich geproportionirter.
Darumb wird das ⌲ BM ⊓ seyn, dem ⌲ FQ. d. 34. 11.
Und folgends auch die Spitzsäule DABC ⊓, der Spitzsäule HEFG. d. 7. ax.
(dann sie just der sechste Theil von denen ⌲ seint).

Welches zu beweisen ware.

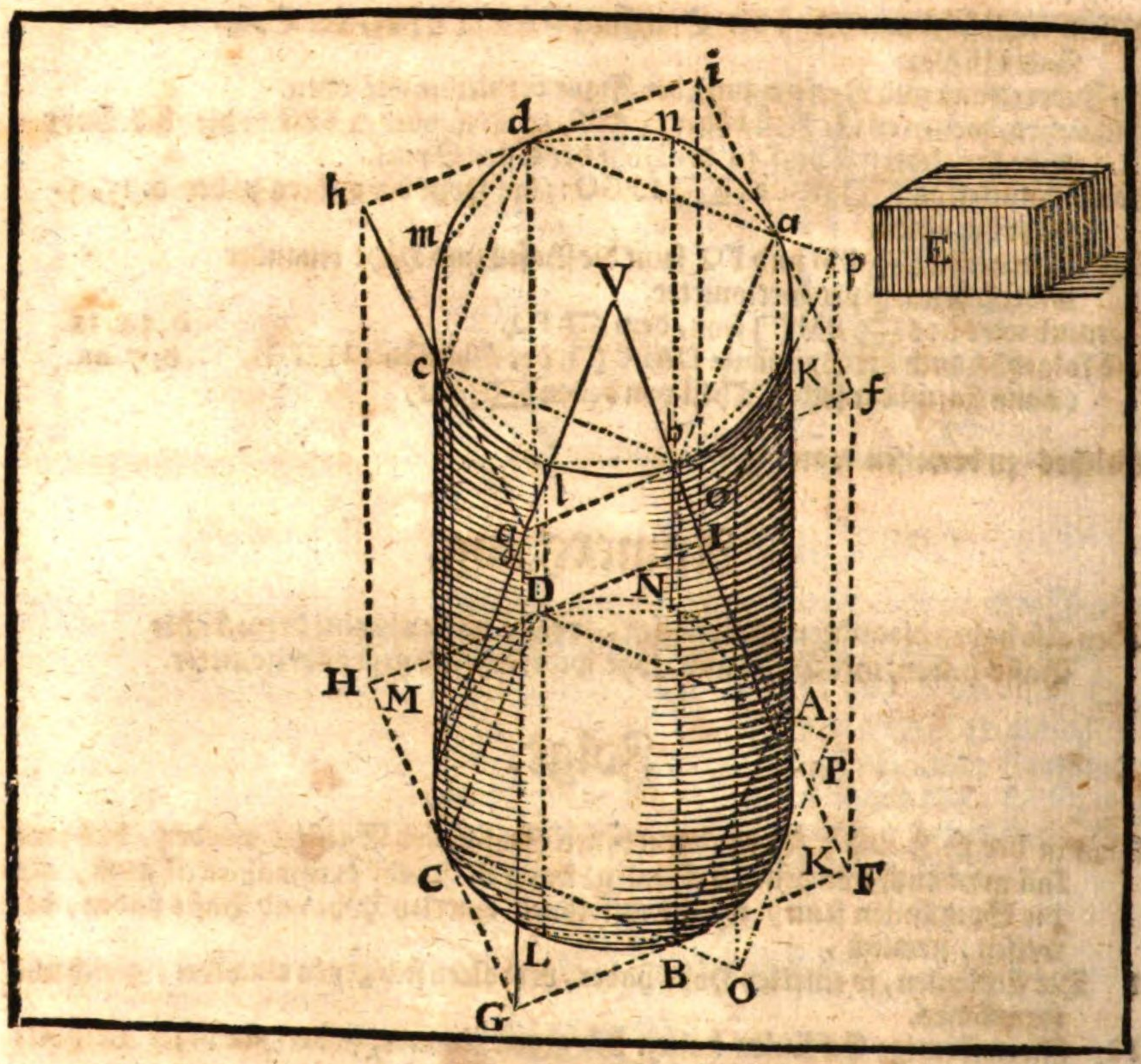
Anmerckung.

Eben also haben die andern Spitzsäulen, welche mehr als eine dreyeckichte Basis haben, ihre Bases und Höhe widerkehrlich geproportionirter.

Folge.

Was in der 6. 8. und 9. Vorgab von denen Spitzsäulen ist gesagt worden, das jene kan man auch von denen Ecksäulen (dann sie geradt dreymahlen so groß, als die Spitzsäulen seint) welche mit ihnen einerley Höhe und Basis haben, beweisen, nemlich,

I. Die Ecksäulen, so einerley Höhe haben, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Bases.
II. Gleichförmige Ecksäulen halten sich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.
III. Gleiche Ecksäulen haben ihre Bases und Höhe widerkehrlich geproportionirter, und welche widerkehrlich geproportionirt seint, seint auch einander gleich.



Die X. Vorgab. Betrachtung.

Ein jeder Kögel ist der dritte Theil von einer Waltze, welche mit demselben einerley Basis und Höhe hat.

Es ist gegeben der Kögel CVK, und die Waltze CcKk, welche einerley Höhe und einerley Basis, nemlich den Zirckel ABCD haben. Diesem nach sagt man, daß der Kögel der dritte Theil von der Waltze seye.

Beweiß.

Gesetzt, man widerspreche es, sagend, daß der Kögel der dritte Theil von der Waltze nicht seye, so folget darauff, daß auch die Waltze nicht dreymahln so groß, sondern entweder ⌜ oder ⌝, als der Kögel dreymahlen genommen, seye.

Seye zum ersten mahl gesetzt, daß die Waltze ⌜ seye, als der Kögel dreymahlen genommen, zu einem Exempel, umb die Grösse E.

Das ist, die Waltze CcKk ist ⌜, dem Kögel CVK dreymahlen genommen, ⊣ E.

Diesem nach einschreibe in den Zirckel das □ ABCD, und umb denselben das □ FGHI.

Erhöhe auff diesem □ die zwey ⌓ Aa, Bb, Cc, Dd, und Ff Gg, Hh, Ii, welche mit der Waltze, und dem Kögel einerley Höhe haben.

Nunmehro ist klar, daß das □ ABCD die Helffte, deß □ FGHI seye. d. 9. an. 4.

Unterdessen verhaltet sich eine Basis zu der andern Basis :: ein ⌓ zu dem andern ⌓ von einerley Höhe. d. 32. 11.

Folget, daß also das ⌓ Aa, Bb, Cc, Dd auch die Helffte deß ⌓ Ff, Gg, Hh, Ii, seye.

Indeme aber das ⌓ Ff, Gg, Hh, Ii ⌜ ist, als die Waltze CcKk. d. 9. ax. 1. und folgends auch die Helffte des ⌓ Ff, u. s. f. ⌜, als die Helffte derselben Waltze.

Darumb wird auch das ⌓ Aa, Bb, Cc, Dd ⌜ seyn, als die Helffte der Waltze:

Abtheile ferner just entzwey die Umbkreiß-Stücke AB, BC, CD, DA in denen Puncten K, L, M, N, und hange zusammen AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA.

Durch K ziehe OKP, welche den Zirckel berühre, und mit BA ═ lauffe, auch mit denen verlängerten CB, DA in denen Puncten O, P zusammen komme, und das ▭ AO gestalte.

Erhöhe auff dem ▭ AO die Eckſäule Aa, Pp, Oo, Bb, und auff dem △ AKB die Eckſäule Aa, Kk, Bb, welche mit der Waltze und dem Kögel einerley Höhe haben.

Weilen demnach der △ AKB die Helffte deß ▭ APOB ist: d. 41. 1. so wird auch die Eckſ. Aa, Kk, Bb die Helffte der Eckſ. Aa. Pp, Oo, Bb, seyn. d. 32. 11.

Und deßwegen wird die Eckſäule Aa, Kk, Bb ⌜ seyn, als die Helffte des Waltzen-Schnitzes Bb, Kk, Aa, welcher zur Basis die gerade Linie AB und den Bogen AKB hat.

Auff diese Weise seint auch die übrigen Eckſäulen Cc, Ll, Bb, u. s. f. ⌜, als die Helffte deren Waltzenschnitze Bb, Ll, Cc, u. s. f.

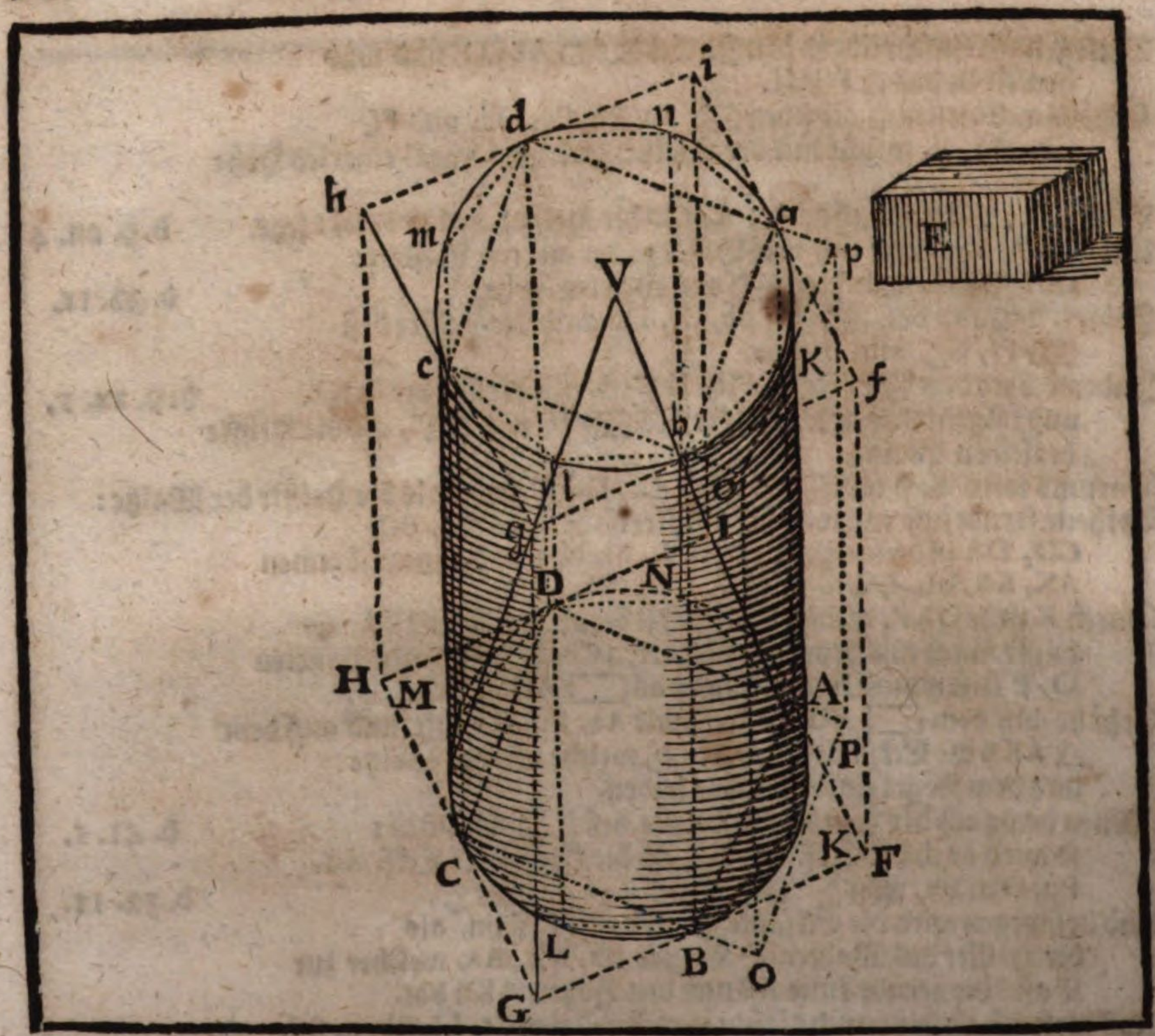
Und folgends seint alle diese Eckſäulen sammentlich ⌜, Als die Helffte aller dieser Waltzenschnitze sammentlich.

Wann man abermahlen die Umbkreißstücke AK, KB, u. s. f. just entzwey schneidet, und (wie vorgehends) Eckſäulen darauff machet,

So werden auch solche Eckſäulen sammentlich ⌜ seyn, als die Helffte deren Waltzenschnitze, welche zur Basis die kleinen geraden Linien, und die kleinen Zirckelbogen haben.

Wann jetzunder der gantzen Waltze CcKk mehr als die Helffte, nemlich das ⌓ Aa, Bb, Cc, Dd, und von denen übrigen Waltzenschnitzen auch mehr als die Helffte, nemlich die Eckſäule Aa, Kk, Bb, u. s. f. abgezogen werden.

So werden letztlich einige Waltzenschnitze überbleiben, welche zusammen genommen ⌝ seint, als die Grösse E, so der Unterscheid ist, umb welchen die Waltze ⌜ ist, als der Kögel dreymahlen genommen. d. 2. Lem. 13.



Setzet man nun, daß nach verrichtem Abzug die Waltzenschnitze Aa, Ll, Kk, Bb, u. s. f. übergeblieben seint, welche zusammen genommen ⌉ seint, als E. So wird

(weilen die Waltze ⌈⌉ gesetzt worden ist, dem Kögel dreymahlen genommen, — E.

Unterdessen aber man auß der Waltze die übergebliebene Waltzenschnitze, und auß dem Kögel dreymahlen genommen — E, dieselbe E (welche ⌈ bewiesen worden ist, als gedachte Waltzenschnitze) abziehet.

Die übrigen Eckſäulen Aa, Kk, Bb, Ll, Cc, Mm, Dd, Nn, auch ⌈ verbleiben, als der Kögel dreymahlen genommen.

Und deßwegen wird der Kögel ⌉ seyn, als der dritte Theil der Waltze.

Entzwischen ist der Eckſäulen Aa, Kk, Bb, Ll, Cc, Mm, Dd, Nn, dritter Theil eine Spitzſäule, welche mit derselben einerley Höhe und Basis hat. b. 7. 12.

Folget, daß also der Kögel CVK ⌉ wäre, als gedachte Spitzſäule, nemlich das gantze ⌉, als sein Theil, so nicht seyn kan.

Dahero ist die Waltze nicht ⌈, als der Kögel dreymahlen genommen.

Setzet man aber, daß die Waltze Cc Kk ⌉ seye, als der Kögel CVK dreymahlen genommen:

So wird alsdann der Kögel ⌈ seyn, als ein dritter Theil von der Waltze.

Seye dahero der Kögel dreymahlen genommen ⌈, als die Waltze umb die Grösse E, also zwar,

Daß der Kögel CVK ⌈⌉ seye dem dritten Theil der Waltze —+ E.

Nunmehro zubereite die Figur, wie vorhero geschehen ist, ausserhalb, daß an statt der Eckſäulen, lauter Spitzsäulen, welche mit der Waltze und dem Kögel einerley Höhe haben, gezogen zu seyn verstanden werden

Hernach abziehe auß dem Kögel CVK die Spitzsäule (als wie vorgehends die Eckſäule auß der Waltzen CcKk), biß endlich einige Kögelschnitze überbleiben, welche zusammen genommen ⌉ seint, als E.

Nachdem nun der Kögel CVK ⌈⌉ gesetzt worden ist, dem dritten Theil der Waltze, —+ E;

Unterdessen aber, wann man auß dem Kögel die übergebliebene Kögelschnitze, und auß dem dritten Theil der Waltze —+ E, dieselbe Grösse E (welche ⌈ ist bewiesen worden, als gedachte Schnitze) abziehet.

So wird die übrige Spitzsäule (dessen Basis das Viel-Eck AKBLC MDN ist, und einerley Höhe mit dem Kögel und der Waltze hat) auch ⌈, als der dritte Theil der Waltze, seyn.

Und deßwegen wird auch diese Spitzsäule dreymahlen genommen ⌈ seyn, als die gantze Waltze Cc Kk.

Entzwischen ist die Eckſäule Aa, Kk, Bb, Ll, Cc, Mm, Dd Nn dreymahlen so groß, als gedachte Spitzsäule. d. 7. 12.

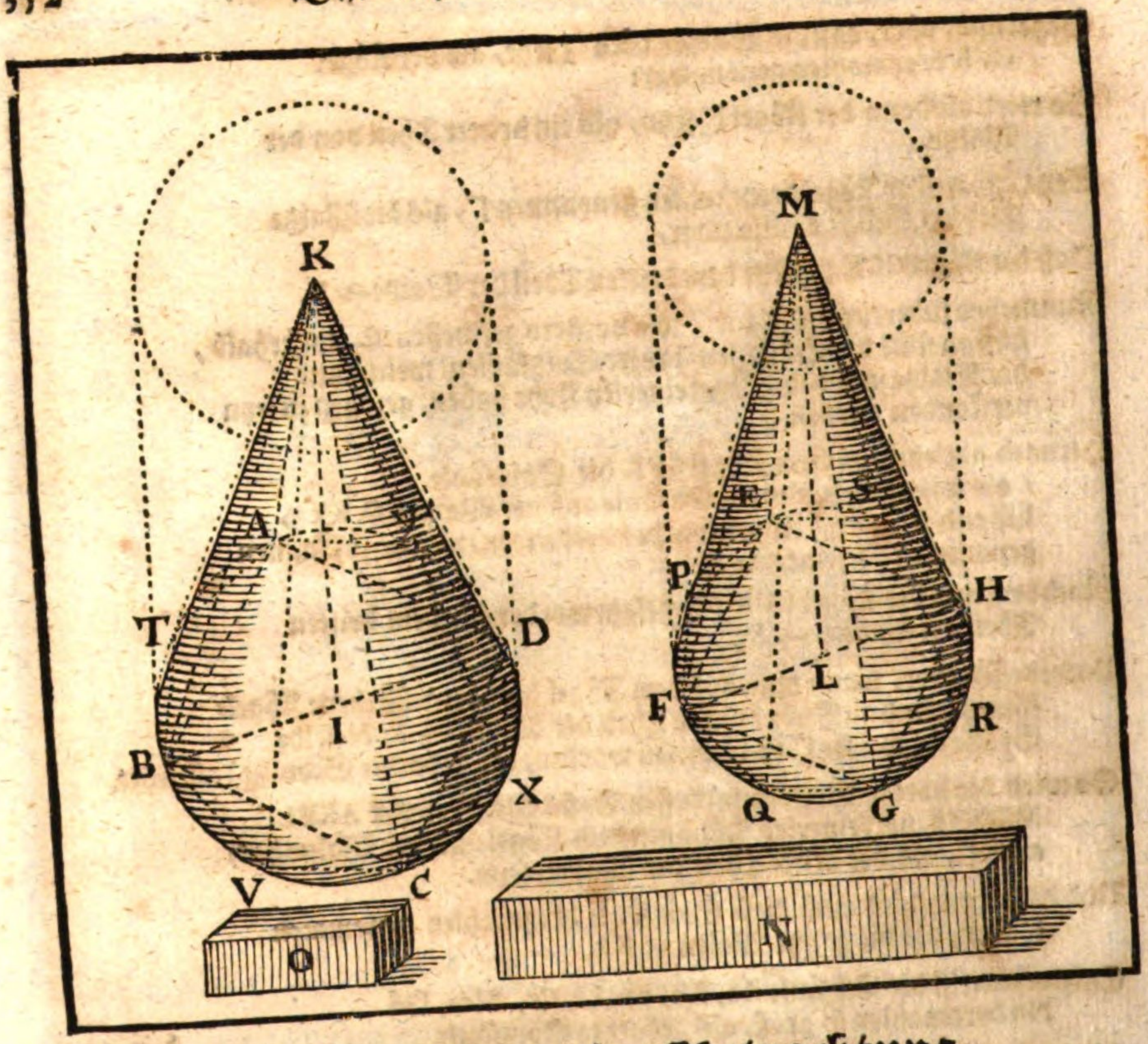
(dann sie einerley Basis, und mit dem Kögel und der Waltze einerley Höhe haben).

Dahero solte auch die Eckſäule Aa, u. s. f. ⌈ seyn, als die Waltze Cc Kk, nemlich der Theil ⌈, als sein gantzes, so nicht möglich ist.

Worauß dann letztlich erscheinet, daß die Waltze auch nicht ⌉ seye, als der Kögel dreymahlen genommen; sondern sie werden nothwendig demselben dreymahlen genommen ⌈⌉ seyn müssen.

Und deßwegen ist der Kögel CVK just der dritte Theil der Waltze Cc Kk.

Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab. Betrachtung.

Die Kögeln und Waltzen, so einerley Höhe haben, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Bases.

Es seint gegeben die zwey Kögel, und die zwey Waltzen, welche zu ihren Bases die Zirckel ABCD, EFGH, und zu ihrer Höhe die gleiche IK, LM haben.

Diesem nach sagt man, daß sich verhalte

Bas. ABCD, Bas. EFGH :: { der eine Kögel K, zu dem andern M. / die eine Waltze K, zu der andern M.

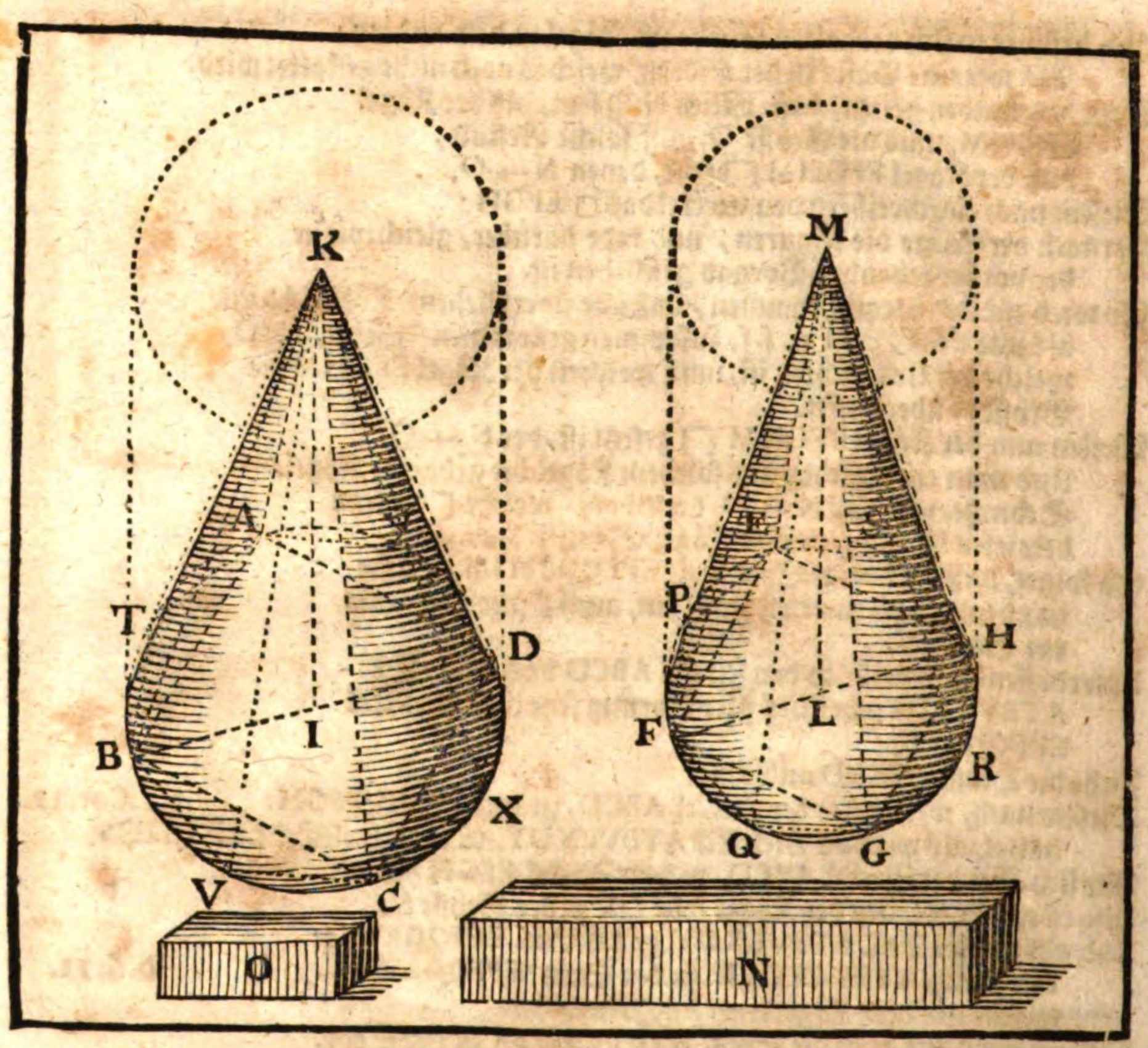
Beweiß.

Wann es nicht geglaubt wird, so seye, daß die Basis ABCD zu der Basis EFGH sich verhalte: als wie der Kögel ABCDK zu einer andern Grösse, gleich wie zu N, welche hernach ⌜, oder ⌝ seyn muß, als der Kögel EFGHM.

Dann gleich kan sie demselben nicht seyn,

Sonsten hätte der Kögel ABCDK, so wol zu dem Kögel EFGHM, als zu N einerley Verhaltnuß. d. 7. 5.

Und deßwegen sich verhalten würde ein Kögel zu dem andern:
Als wie eine Basis zu der andern, welches noch nicht gestattet wird.
Seye derohalben gesetzt, daß erstlich N ⌝ seye, als der Kögel
EFGHM, umb die Grösse O, auff solche Gestalt,
daß der Kögel EFGHM ⌜ seye, denen N + O.
Diesem nach einschreibe in den Circkel das □ EFGH.
Hernach verfertige die Figuren, und rede darüber, gleich wie in
der vorhergehenden Vorgab geschehen ist.
So wird endlich herauß kommen, daß alle überbliebene Kögelschnitze,
als wie EMP, PMF u. s. f. zusammen genommen ⌝ seint, als O,
welche der Unterscheid ist, umb welchen der Kögel EFGHM die
Grösse N übertreffet.
Weilen nun der Kögel EFGHM ⌜ gesetzt ist, der N + O,
Und man entzwischen aus solchem Kögel die gedachte Kögel-
Schnitze, und auß N + O, dieselbe N (welche ⌜ zu seyn
bewiesen ist, als gedachte Kögel-Schnitze) abziehet.
So folget, daß die übrige Spitzsäule EPFQGRHSM, welche
mit dem Kögel einerley Höhe hat, auch ⌜ verbleibe, als
die Grösse N.
Unterdessen einschreibe in den Zirckel ABCD das Viel-Eck
ATBVCXDY, welches gleichförmig seye dem Viel-Eck
EPFQGRHS.
Ziehe die Diametern BD und FH.
Diesem nach, weilen sich der Zirckel ABCD, zu dem Zirckel EFGH d. 2. Cor. 12.
haltet, als wie das Viel-Eck ATBVCXDY, zu dem Viel-Eck EPFQGRHS.
Wie sich aber der Zirckel ABCD, zu dem Zirckel EFGH haltet:
Also ist gesetzt worden der Kögel ABCDK zu der Grösse N.
Und als wie die Bas. ATBVCXDY. zu der Bas. EPFQGRHS::
die Spitz. ATBVCXDYK. zu der Spitz. EPFQGRHSM, d. 6. 12.
welche mit dem Kögel einerley Höhe haben.
Dahero wird sich auch die Spitz. ATBVCXDYK zu der Spitz.
EPFQGRHS verhalten: als wie der Kögel ABCDK, zu N.
Weilen aber die Spitz. ATBVCXDYK ⌝ ist, als der Kögel
ABCDK (nemlich der Theil ist ⌝, als sein gantzes).
So folget, daß auch die Spitzsäule EPFQGRHS ⌝ seye als N.
Welches ungereimt ist, massen sie allererst ⌜ ist bewiesen
worden, als dieselbe N.
Dahero ist N nicht ⌝, als der Kögel EFGM.
Sagt man hingegen, daß N ⌜ seye, als der Kögel EFGM.
Indeme nun gesetzt ist, daß, wie sich der Zirckel ABCD, zu dem
Zirckel EFGH verhalte: Also seye der Kögel ABCDK, zu N.
Und durch die Umkehrung EFGH, ABCD :: N, ABCDK.
Setze man jetzund, daß sich N, zu dem Kögel ABCDK verhalte:
als wie der Kögel EFGHM, zu der Grösse O.
Weilen aber N ⌜ gesetzt worden ist, als der Kögel EFGHM.
so wird auch der Kögel ABCDK ⌜ seyn, als O. d. 14. 5.
Dahero, wie sich der Zirckel EFGH zu dem Zirckel ABCD verhaltet;
also ist auch der Kögel EFGHM, zu O. Welches aber nicht seyn kan.



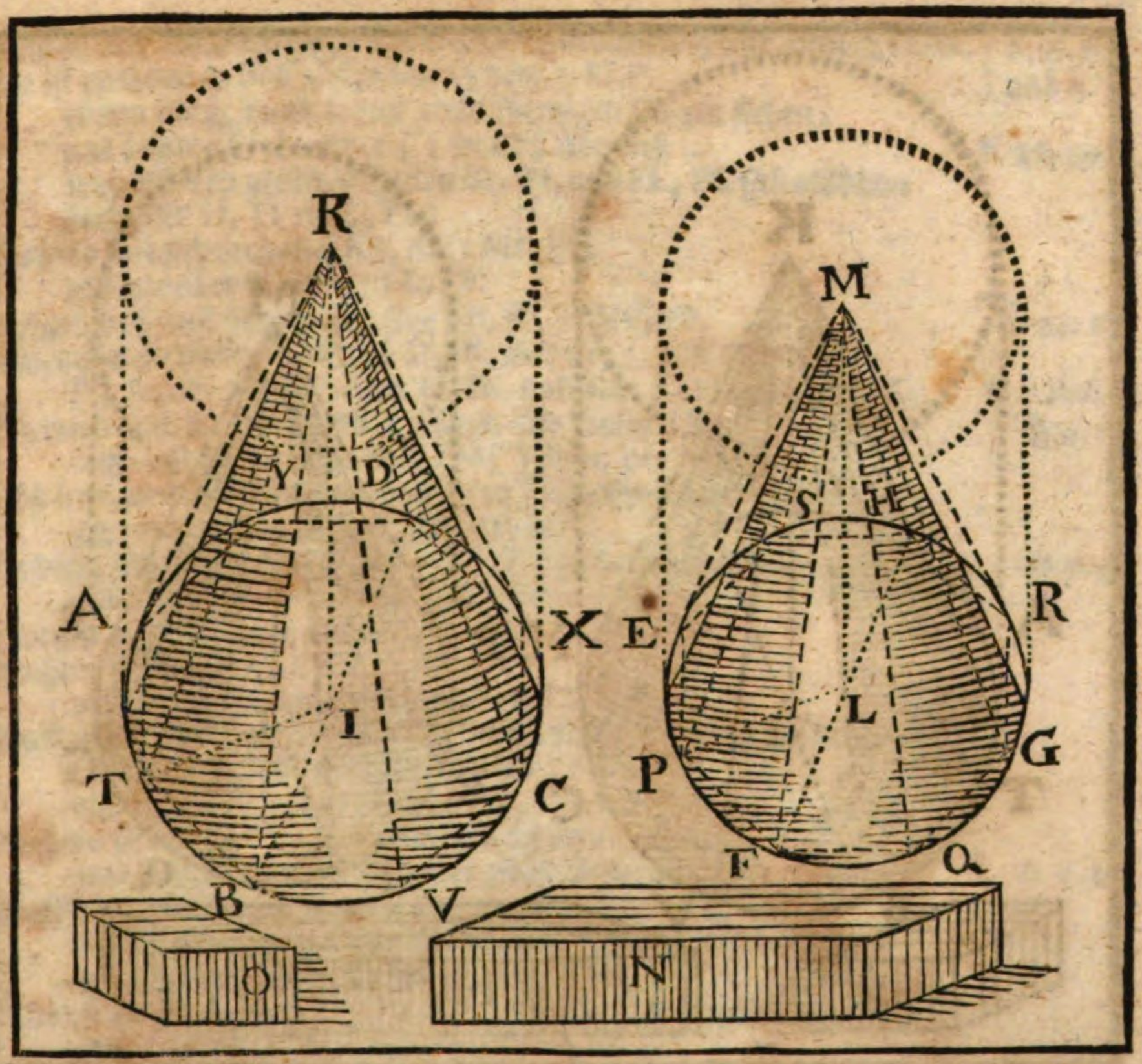
Dann O ⌝ ist, als der Kögel ABCDK, und schon vorgehends bewiesen worden, daß unmöglich seye, daß sich ein Kögel, zu einer Grösse, welche ⌝ ist, als derselbe Kögel, verhalte:
Als wie eine Basis eines Kögels, zu der andern Basis, deß andern Kögels.

Darumb ist N auch nicht ⌜, als der Kögel EFGHM.
sondern N werde nothwendig demselben Kögel ⌐ seyn müssen.

Und deßwegen wie sich die Basis ABCD, zu der Basis EFGH verhaltet: also wird sich auch der Kögel ABCDK, zu dem Kögel EFGHM verhalten. d. 7. 5.

Letztlich wird auch seyn, als wie die Basis ABCD, zu der Basis EFGH sich verhaltet: also ist eine Waltze, zu der andern Waltze. d. 15. 5.
(dann die Waltze dreyfach seint deren Kögeln, welche mit solchen einerley Höhe und Bases haben). Dahero die Kögeln. u. s. f. d. 10. 12.

Welches zu beweisen ware.



Die XII. Vorgab. Betrachtung.

Gleichförmige Kögeln und Waltze halten sich gegen einander, in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Diametern ihrer Basen gegen einander haben.

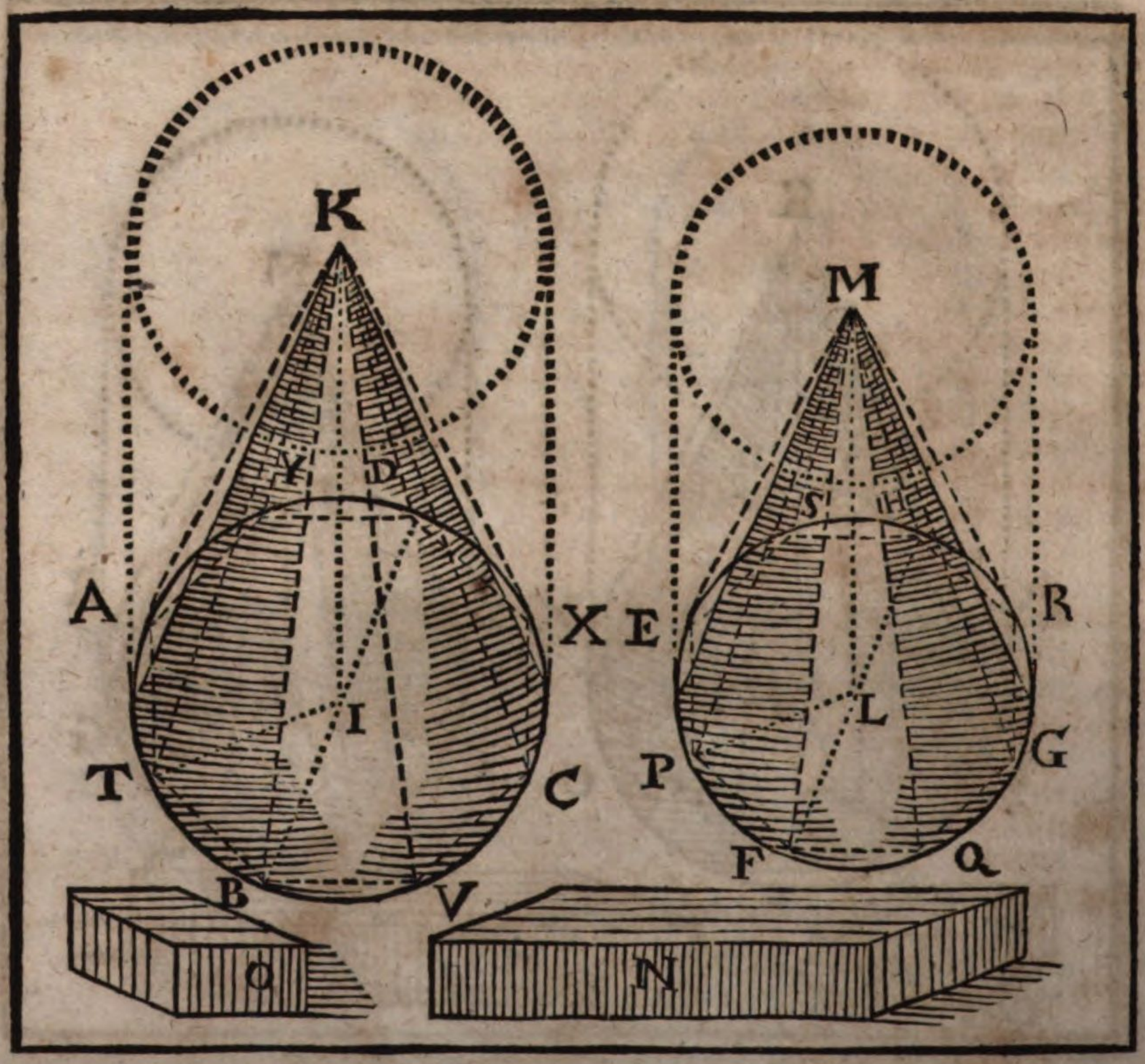
Es seint gegeben die zwey gleichförmige Kögeln und Waltzen, deren Bases die Zirckeln ABCD, EFGH, und die Diametern ihrer Basen BD, FH, und die axe IK, LM seint. Diesem nach sagt man, daß der eine Kögel, zu dem andern, und auch eine Waltze zu der andern sich in dreymahliger Verhaltnuß der jenen, welche ein Diameter zu dem andern hat, verhalte.

Beweiß.

Wann es nicht geglaubet wird, so seye, daß der Kögel ABCDK zu einer andern Grösse, wie nemlich zu N, in dreymahliger Verhaltnuß, welche der Diameter BD, zu dem Diameter FH hat, stehe.

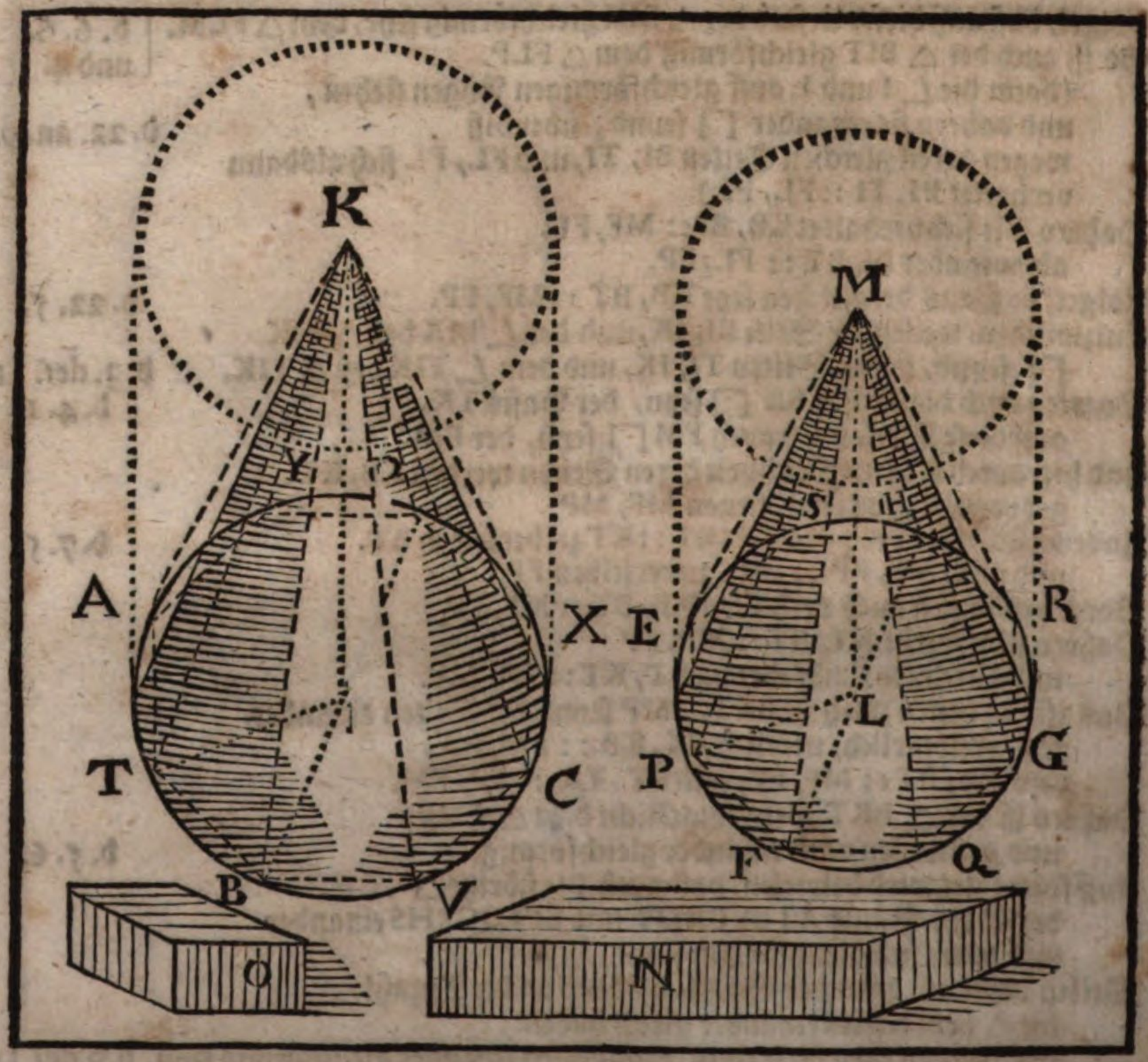
Nun ist klar, daß N entweder ⌉, oder ⌈, als der Kögel EFGHM seyn muß.

Dann wann sie ihme gleich wäre: so hätte der Kögel ABCDK d. 7. 5. einerley Verhaltnuß zu dem Kögel EFGHM und der Grösse N.



Und dahero wäre der Kögel ABCDK, zu dem Kögel EFGHM
auch in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, so der Diameter
BD, zu dem Diameter FH hat.
welches aber hier noch nicht zugelassen wird.
Seye dahero gesetzt, daß N ⌉ seye, als der Kögel EFGHM
umb die Grösse O.
Diesem nach zubereite und verfertige die Figuren, gleichwie in
der vorhergehenden Vorgab geschehen ist, damit man beweisen möge,
daß die Spitzsäule EPFQGRS ⌈ seye, als N.
Hange hernach TI und FL zusammen.
Dieweilen der Kögel ABCDK gleichförmig gegeben ist
dem Kögel EFGHM.
So werden sie ihre Diametern und Axen gegen einander ge-
proportionirter haben. d.24.def.11.
Und dahero seyn BD. FH (oder BI. FL) :: IK. LM. d. 15. 5.
Und durch die Verwexlung BI. IK :: FL. LM.
Nunmehro ist in dem △ BIK der ∠ BIK ⌉ dem ∠ FLM
in △ FLM (dann beyde rechte ∠ seint) d.3.def.11.
Und die Seiten BI, IK seynd geproportionirt denen Seiten FL, LM.

Folget, daß auß dieser Ursach der △ BIK gleichförmig seye, dem △ FLM. [d. 6. 6.
So ist auch der △ BIT gleichförmig dem △ FLP. [und 4.
(dann die ∠ I und L auff gleichförmigen Bögen stehen,
und dahero sie einander ⊓ seynd; über diß d. 22. an. 9.
wegen deren gleichen Seiten BI, TI, und FL, PL sich alsdann
verhaltet BI, TI :: FL, PL)
Dahero wie sich verhaltet KB, BI :: MF, FL.
als wie aber BI, BT :: FL, FP.
Folget, daß aus dergleichen seye KB, BT :: MF, FP. d. 22. 5.
Entzwischen, weilen die Seite BI, IK, uud der ∠ BIK deß △ BIK.
⊓ seynd, denen Seiten TI, IK, und dem ∠ TIK deß △ TIK. d. 3. def. 11.
So wird auch die Basis BK ⊓ seyn, der Basis TK. d. 4. 1.
auff diese Weise wird auch FM ⊓ seyn, der PM.
Und hierdurch wegen Gleichheit deren Seiten werden KB, KT
geproportionirt seyn, denen MF, MP.
Indeme sich aber verhaltet KB, BT :: KT zu derselben BT. d. 7. 5.
uud auch MF, FP :: MP, zuderselben FP.
Vorgehends sich auch verhalten KB, BT :: MF, FP.
Dahero seyn werde KT, BT :: MP, FP.
und durch die Umbkehrung BT, KT :: FP, MP.
Das ist, in denen zwey △ BKT, FMP seynd die Seiten einander.
proportionirlich, nemlich TK, KB :: PM, MF,
und KB, BT :: MF, FP, und BT, TK, :: FP, PM.
Dahero ist der △ BKT gleichwincklicht dem △ FMP.
und deßwegen auch einander gleichförmig. d. 5. 6.
Auff solche Art wird bewiesen, daß auch die übrige △
der Spitz-Säule ATBVCXDY und EPFQGRHS einander
und unter sich gleichförmig seynd.
Weilen demnach gedachte Spitzsäule auch an der Anzahl
die △ beyderseits einander gleich haben:
So werden eben diese zwey Spitzsäulen einander gleichförmig seyn, d. 9. def. 11.
Und deßwegen sich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß
derjenigen, welche eine gleichförmig-haltnuß sagende Seiten
BT, zu der andern FP hat, verhalten. d. 8. Cor. 12.
Es ist unterdessen BT, FP :: BI, FL.
(dann der △ BIT gleichförmig ist, dem △ FLP)
Und auch als wie BI, FL :: BD, FH. d. 15. 5.
Dahero wird eine Spitzsäule, zu der andern in dreymahliger
Verhaltnuß seyn, der jenen, welche ein Diameter BD
zu dem andern FH hat.
Es ist aber auch anfanglich gesetzt worden, daß der Kögel
ABCDK zu N in dreymahliger Verhaltnuß derjenen
seye, welche ein Diamenter D, zu dem andern FH hat.
So folget dann, daß sich die eine Spitzsäule ATBVCXDY zu
der andern Spitzsäule EPFQGRHS verhalte, als wie der
Kögel ABCDK, zu der Grösse N.
Unterdessen ist die Spitzsäule ATBVCXDY ⊐, als der Kögel
ABCDK (nemlich der Theil ist ⊐, als sein gantzes).



Dahero die Spitzsaule EPFQGRHS auch ⌝ seyn muß, als die Grösse N, welche aber anfänglich ist ⌜ bewiesen worden, als dieselbe Spitzsäule. So gantz ungereimt ist.

Darauß schliesset man aber, daß also die Grösse N nicht ⌝, als der Kögel EFGHM seyn könne.

Setze man jetzund, daß N. ⌜ seye, als der Kögel EFGHM.

Weilen schon anfänglich gesetzt worden ist, daß der Kögel ABCDK zu N in dreymahliger Verhaltnuß seye der jenen, welche ein Diameter, BD, zu dem andern FH hat.

Und auch durch das vorgehende bewiesen worden ist, daß die Spitzsäule ATBVCXDY, zu der Spitzsäule EPFQGRHSin dreymahliger Verhaltruß seye derjenen, welche der Diameter BD, zu dem andern Diameter FH hat.

So wird demnach seyn, daß, als wie sich der Kögel ABCDK, zu N verhaltet: also sich eine Spitzsäule zu der andern verhalten werde.

Und durch die Umbkehrung, wie N, zu dem Kögel ABCDK: also wird die andere Spitzsäule EPFQGRHS, zu der ersten Spitzsäule ATBVCXDY seyn.

Indeme aber die Spitzsäule EPFQGRS zu der Spitzsäule ATBVCXDY in dreymahliger Verhaltnuß ist, deren gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten PE, zu TB. (oder deß Diameters EH, zu BD) d. 8. Cor. 12.

So wird auch N, zu dem Kögel ABCDK in dreymahliger Verhaltnuß seyn, der jenen, welche der Diameter FH, zu BD hat.

Seye unterdessen gesetzt, daß, als wie N, zu dem Kögel ABCDK sich verhalte: also der Kögel EFGHM, zu einer Grösse, als wie zu O, seye.

Indeme aber jetzund N. ⌐ ist gesetzt worden, als der Kögel EFGHM.

So wird auch der Kögel ABCDK ⌐ seyn müssen, als O. d. 14. 5.

Und deßwegen wird der Kögel EFGHM, zu der Grösse O (welche ⌐ ist, als der Kögel ABCDK) auch in dreymahliger Verhaltnuß seyn, derjenen, welche der Diameter FH, zu dem Diameter BD hat.

Welches aber ungereimt ist: massen schon vorgehends bewiesen worden ist, daß nicht seyn könne, daß ein Kögel zu einer andern Grösse, welche ⌐ ist, als der Kögel, in dreymahliger Verhaltnuß der jenen stehe, welche die Diametern deren Basen gegen einander haben.

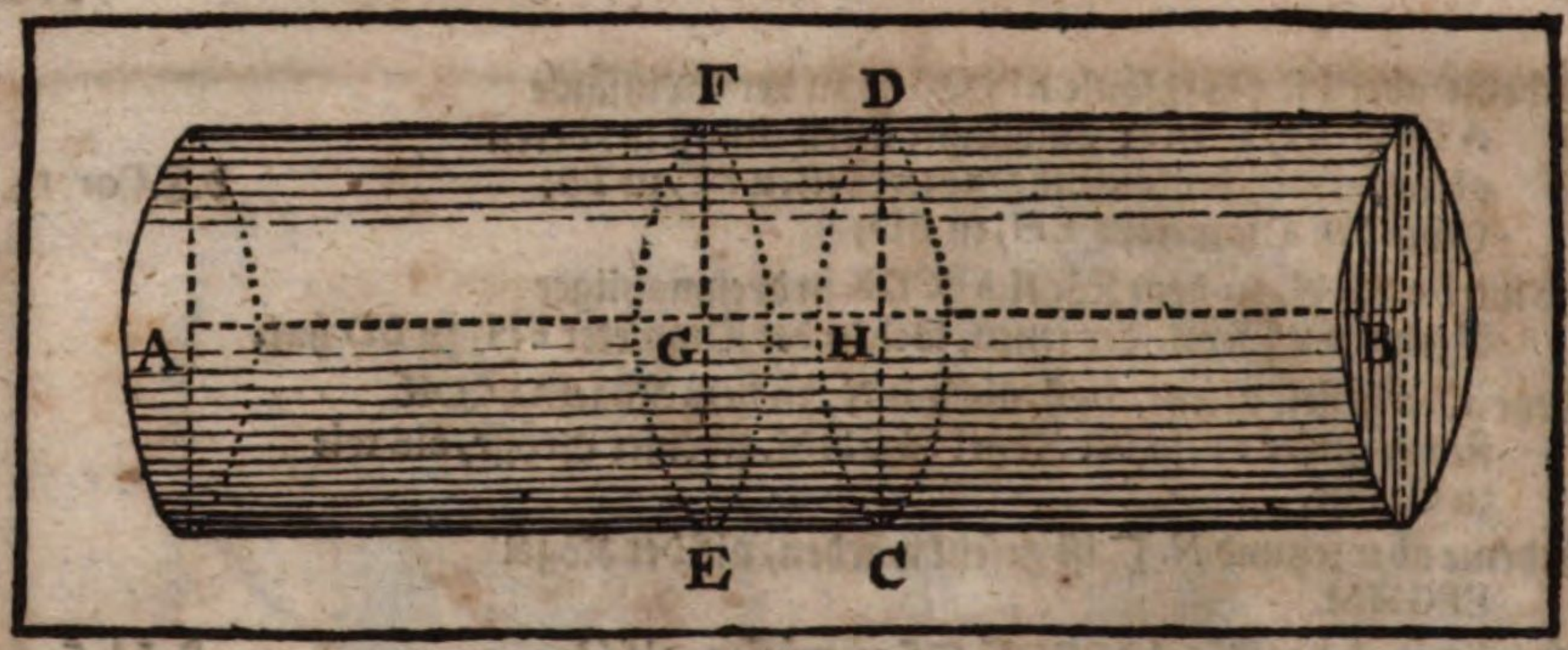
Dahero ist N auch nicht ⌐, als der Kögel EFGHM, sondern sie muß nothwendig demselben ⌐ seyn.

Und darum (weilen man anfänglich gesetzt hat, daß der Kögel ABCDK, zu N in dreymahliger Verhaltnuß seye, deß Diameters BD, zu dem Diameter FH)
Auch derselbe Kögel ABCDK, zu dem andern Kögel EFGHM in dreymahliger Verhaltnuß seyn werde, derjenen, welche der Diameter BD, zu dem Diameter FH hat. d. 7. 5

Letztlich, weilen die Waltze, geradt dreyfach seynd deren Kögeln, welche einerley Höhe und Bases haben:

So werden auch die Waltze, eine zu der andern, in dreymahliger Verhaltnuß seyn, derjenen, welche ein Diameter der einen Basis, zu dem Diameter der andern Basis hat.

Welches zu beweisen ware.



Die XIII. Vorgab. Betrachtung.

Wann eine Waltze mit einer Fläche, so denen gegenüberstehenden Basen Parallel ist, durchschnitten wird: so werden sich die Waltzen-Stücke gegen einander verhalten, gleich wie ihre Axen.

Es ist gegeben, daß die Waltze AB mit der Fläche EF, welche denen Basen A und B = ist, durchschnitten seye. Diesem nach sagt man, daß, als wie sich die Axe AG, zu GB verhalte: also sich das Waltzenstücke AG zu dem Waltzenstück GB verhalten werde.

Zubereitung. Nehme nach Gefallen auff der Linie GB einen geradt-auffmessenden Theil, gleich wie GH, welcher zu einem Exempel, der vierdte Theil von GB ist.

Durch diesen ziehe die Fläche CHD =, denen Basen A und B.

Beweiß. Dieweilen GH der vierdte Theil von der Linie GB ist.

So werden nothwendig in der übrigen HB, noch drey Theile, (welche insonderheit □ seynd der GH) seyn müssen.

Wann man nun durch solche auch einige Fläche, so denen Basen = seint, ziehet:

So wird man drey Waltzenstücke hierauß kriegen, deren eine jede insonderheit □ ist, dem Waltzenstücke EFDC (dann sie einerley Höhe und Bases haben). b. 11. 12.

Dahero ist das Stück EFDC sowol der vierte Theil der Waltze GB, als die Linie GH der vierdte Theil der Axe, oder Linie GB.

Unterdessen setze man, daß GH in der Linie AG gerad dreymahlen seye, und durch solche Theile auch einige Fläche, welche denen Basen = seynd, gezogen worden seynd.

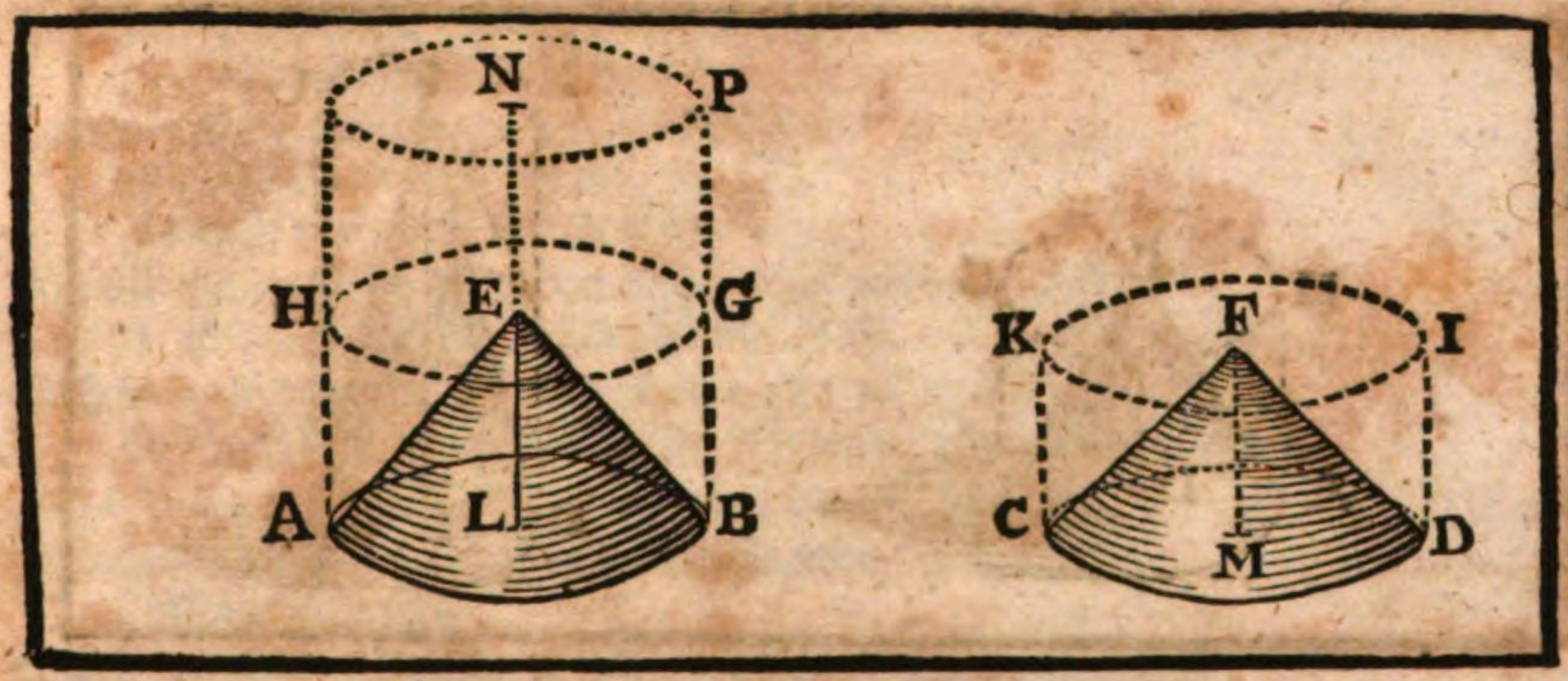
So wird, als wie vorgehends, bewiesen, daß auch drey Waltzenstücke in dem Stück AG seyn werden, deren ein jedes insonderheit □ ist, dem Waltzenstück EFDC.

Dahero, wie offt die Linie GA einen vierdten Theil von der Linie GB begreiffet: so offt wird auch das Waltzenstück AG einen vierdten Theil von dem Waltzenstück GB begreiffen u. s. f.

Darumb wie sich verhaltet die Axe AG, zu der Axe GB; also sich verhalten werde das Waltzenstück AG, zu dem Waltzenstück GB. b. 6. def. 5.

Welches zu beweisen ware.

Mercke, was man hier mit dem vierten Theil bewiesen hat, mag auch mit einem jeden andern untervilfachen Theil bewiesen werden.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Die Waltze und Kögeln, welche gleiche Bases haben, verhalten sich gegen einander, als wie ihre Höhe.

Es seynd gegeben die Waltze LN, MF, welche gleiche Bases AB, CD, haben. Diesem nach sagt man, daß sich die Waltze LN, zu der Waltze MF verhalte, gleich wie die Höhe LN, zu der Höhe MF.

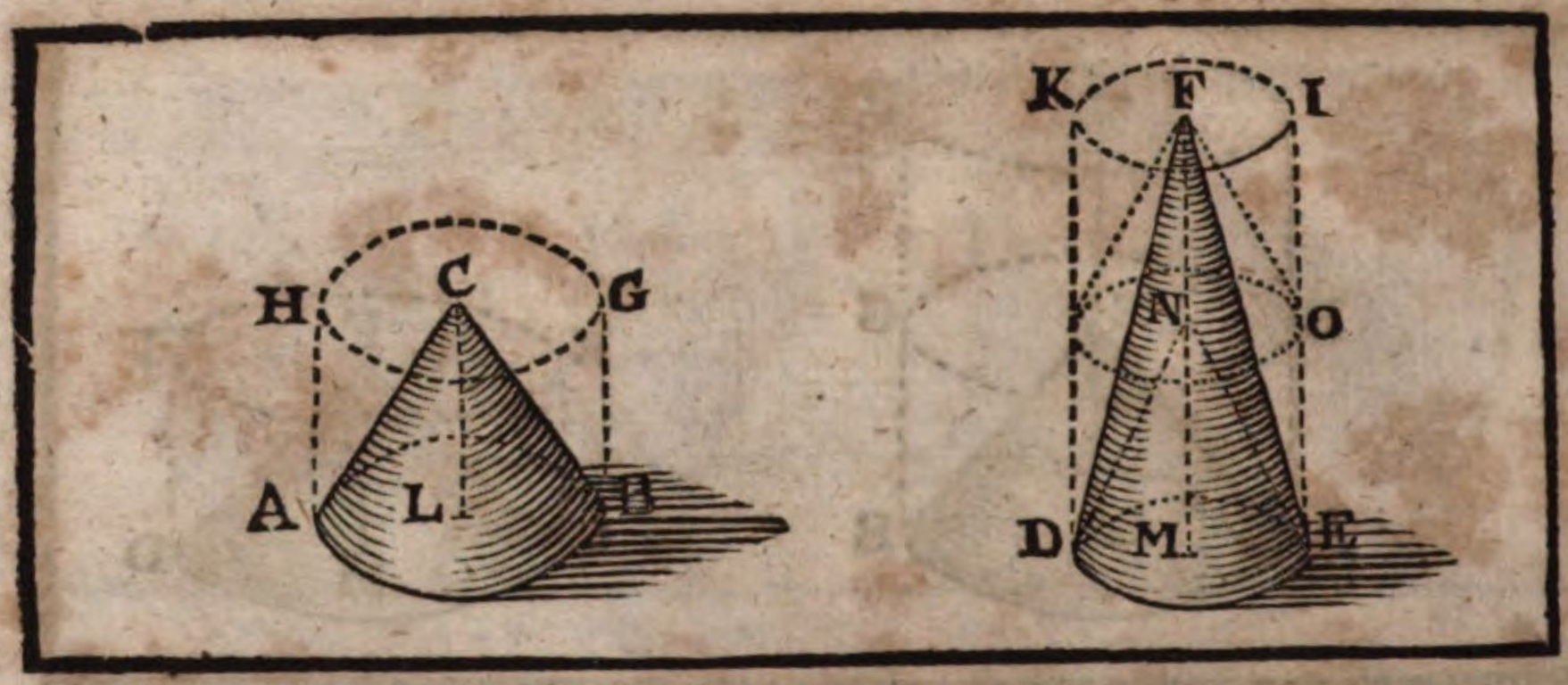
Zubereitung.

Auff der Grössern Höhe LN, mache LE □, der MF,
Durch E ziehe die Fläche HG =, denen Basen.
so entstehen darauß die Waltze LE und EN.

Beweiß.

Die Waltze LE ist □, der Waltze MF. d. 11. 12.
Unterdessen verhaltet sich die Waltze LN, zu der Waltze LE,
als wie die axe, oder Höhe LN: zu der Axe, oder Höhe LE, d. 13. 12.
oder dergleichen MF.
Darumb wird sich auch die Waltze LN, zu der Waltze MF verhalten, gleich wie die Höhe LN, zu der Höhe MF.
Weilen nun die Kögeln gerad ein dritter Theil deren Waltze seynd. d. 10. 12.
So folget, daß sich auch ein Kögel zu dem andern verhalte: d. 15. 5.
als wie eine Höhe zu der andern.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab. Betrachtung.

Gleiche Waltze, und Kögeln haben ihre Bases und Höhe Widerkehrlich geproportionirter: und welche ihre Bases, und Höhe widerkehrlich geproportionirter haben, seynd einander gleich.

Es seynd gegeben die zwo gleiche Waltze LC, MF. Diesem nach sagt man, daß sich die Basis AB, zu der Basis DE verhalte, als wie die Höhe MF, zu der Höhe LC.

Zubereitung.

Auff der grössern Höhe MF, mache MN ⊓, der LC.
Ziehe durch N die Fläche NO ═, denen Basen.
Woraus die zwey Waltze DO, OK erwachsen.

Beweiß.

Die zwey Waltze LC, MN haben einerley Höhe. d. d. Zub.
Dahero als wie sich haltet die Basis AB, zu der Basis DE:
Also ist die Waltze LC, zu der Waltze MN. d. 11. 12.
Als wie sich aber verhaltet die Waltze LC, zu der Waltze MN:
Also ist die Waltze MF, zu derselben Waltze MN. d. 7. 5.
(dann die Waltze LC ⊓ gegeben ist, der Waltze MF)
Und auch wie die Waltze MF, sich zu der Waltze MN verhaltet: d. 14. 12.
Also ist die Linie, oder Höhe MF, zu der Linie oder Höhe MN.
Folget darumb letztlich, daß sich die Basis AB, zu der Basis DE verhalte, als wie die Höhe MF, zu der Höhe LC.
Welches zum ersten zu beweisen ware.

Wann sich hernach die Basis AB, zu der Basis DE verhaltet,
Als wie die Höhe MF zu der Höhe LC, so sagt man,
Daß die Waltze LC ⊓ seye der Waltze MF.
Die Zubereitung bleibet wie vorgehends.

Weilen es ist, als wie die Basis AB, zu der Basis DE ::
die Höhe MF, zu der Höhe LC. d. d. Vorg.

Als wie sich aber die Basis AB, zu der Basis DE verhaltet ::
ist die Waltze LC, zu der Waltze MN. d. 11. 12.
(dann sie einerley Höhe haben).

Und als wie die Höhe MF zu der Höhe LC, oder dergleichen MN,
:: ist die Waltze MF, zu der Waltze MN. d. 14. 12.

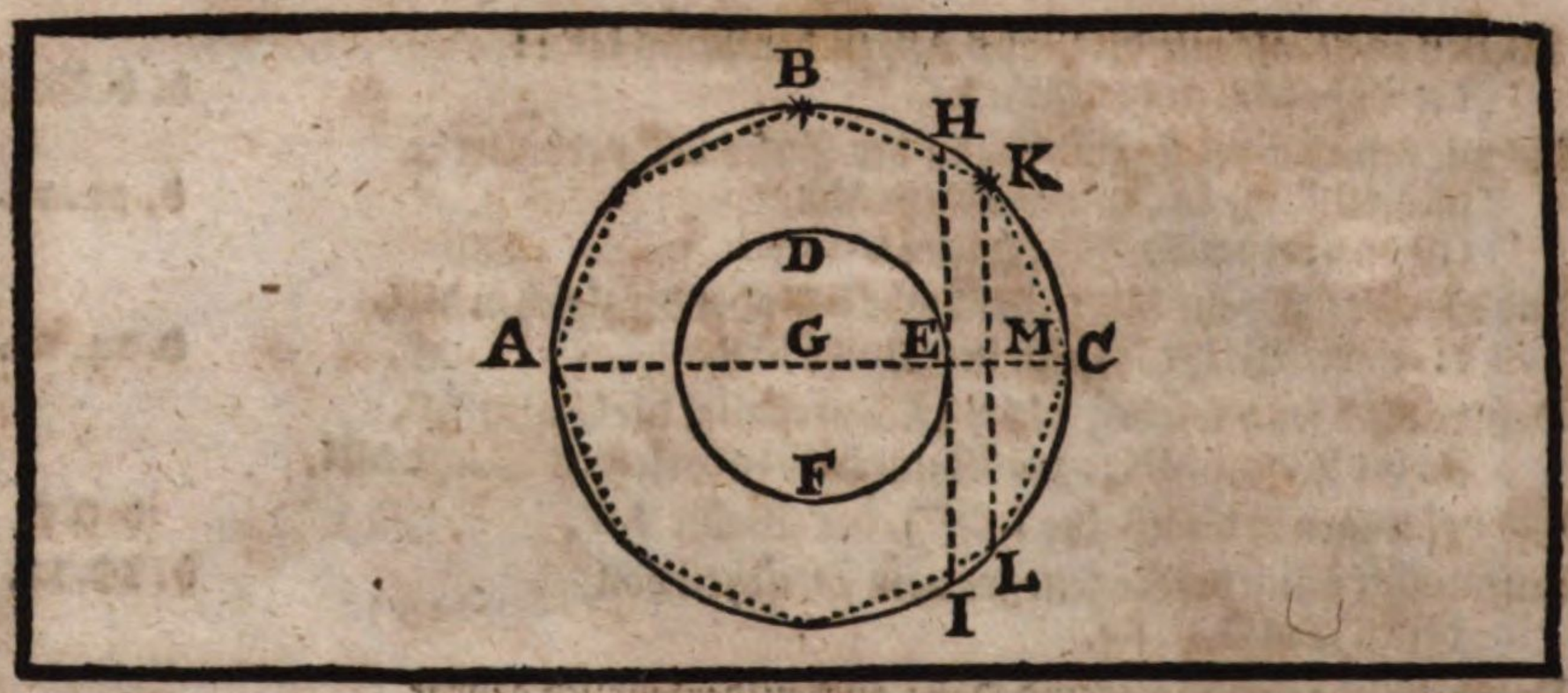
Dahero auch seyn werde; als wie sich verhaltet die Waltze LC,
Zu der Waltze MN :: die Waltze MF, zu derselben Waltze MN.

Und deßwegen ist die Waltze LC ⌐, der Waltze MF. d. 9. 5.

Unterdessen seynd die Kögeln grad ein Drittheil von d. 10. 12.
denen Waltze, u. s. f.

Dahero solche ihre Bases und Höhe auch widerkehrlich gepro-
portionirter haben. u. s. f.

Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab. Handgriff.

Es seynd zwey Zirckeln, so einerley Mittel-Punct haben, gegeben, man verlanget in dem grössern Zirckel ein gleichseitiges Viel-Eck, welches gleiche und an der Anzahl gerade Seiten habe, einzuschreiben, doch, daß sothanes Viel-Eck den kleinern Zirckel nicht berühre.

Es seynd gegeben die zwey ungleiche Zirckeln ABC, DEF, welche einerley Mittel-Punct G haben. Diesem nach verlangt man in dem grössern Zirckel ABC ein gleichseitiges Viel-Eck, so die Seiten an der Anzahl grad hat, einzuschreiben, doch mit diesem Geding, daß solches den kleinern Zirckel DEF nicht berühre.

Handgriff.

Ziehe durch den Mittel-Punct G die gerade Linie AC, welche den Zirckel DF in E durchschneide.

Durch E ziehe HEI bleyrecht auff AC, und daß sie den Zirckel DEF in E berühre. d. 16. 3.

Indeme nun der Bogen ABHC ⌐ ist, als der Bogen HC. d. 9. ax. 1.
wann man unterdessen auß ABHC die Helffte, nemlich AB, hinweg nemmet; und abermahlen aus der übrigen Helffte BC, die Helffte, und auß der übergebliebenen Helffte wiederumb die Helffte abziehet. u. s. f.

So ist klar, daß letztlich ein Bogen überbleiben werde, welcher ⌐ seyn solte, als der Bogen HC. d. 2. Lem. 12.

Gesetzt ein solcher Bogen seye KC, so ⌐ ist, als der Bogen HC.

Ziehe K. C zusammen.

So wird KC eine Seite von dem verlangten Viel-Eck seyn.

Beweiß.

Weilen der Bogen KC ein gerader Theil, nemlich die Helffte von einer andern Helffte, und so fort, ist.

So folget klar, daß derselbe KC den gantzen Zirckel ABC grad auffmesse, und auch die Bögen an der Anzahl gleich habe.

Wann nun sothane Bögen, gleich wie KC, mit geraden Linien unterspannet werden.

So werden auch solche Linien einander ⊓ seyn. d. 29. 3.
Und dahero ist das eingeschriebene Vieleck erstlich gleichseitig, alsdann wegen der Bögen, so an der Anzahl gerad gemacht worden seynd, hat es die Seiten an Anzahl gerad.

Daß aber diß Viel-Eck den Zirckel DEF nicht berühre, wird also bewiesen: Ziehe vorhero KML bleyrecht auff AC.

Indeme die ∠ HEM, KME zween rechte Winckeln seynd.
So wird HI = seyn, der LK. d. 28. 1.

Unterdessen berühret die Linie HI den Zirckel DEF bloß allein in einem Puncten, nemlich in E.

Folgel darum, daß die andere Linie LK denselben Zirckel gar nicht berühre, sondern völlig ausserhalb denselben seye.
(dann zwey Parallel-Linien niemahlen zusammen stossen können) d. 34. def. 1.

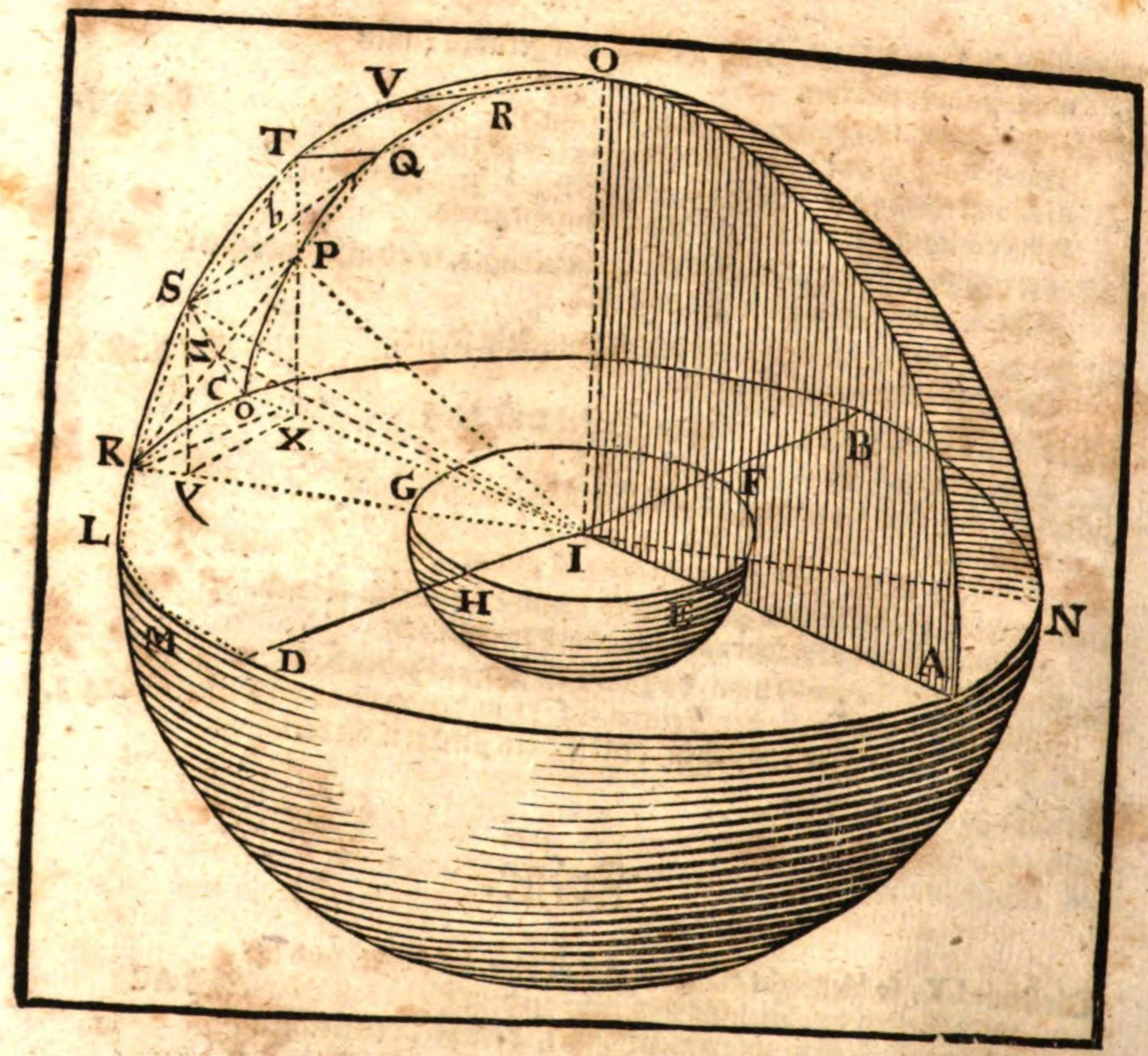
Dahero wird KC denselben Zirckel noch weniger berühren können.
(dann solche noch weiter, als LK, darvon abstehet)

Auff solche Weise beweiset man, daß auch die übrige Seiten deß Viel-Ecks (massen sie der Seiten CK ⊓ seynd, und von dem Mittel- d. 14. 3.
Punct G gleich weit abstehen) den kleinern Zirckel nicht berühren.

Welches zu machen ware.

Folge.

Die Linie LK, so bleyrecht auff dem Diameter AC stehet, und die zwey Seiten deß Viel-Ecks (welche an dem Ende deß Diameters AG zusammen stossen) zusammen hanget, berühret den kleinern Zirckel niemahlen.



Die XVII. Vorgab. Handgriff.

Es seynd zwo Kugeln gegeben, welche auß einem Mittel-Punct beschrieben seynd. Man verlanget in die grössere Kugel eine vielflächige Figur einzuschreiben, welche die Fläche der kleinern Kugel nirgends berühre.

Es seynd gegeben die zwo Kugeln ABCD, EFGH, welche aus einem Mittel-Punct I beschrieben seynd. Man begehrt in die grössere ABCD eine vielflächige Figur also einzuschreiben, daß sie auff keine Weise die Fläche der gegebenen kleinern Kugel berühre.

Mercke, die zwey Kugeln seynd allhier nur halb schattirter angezeigt.

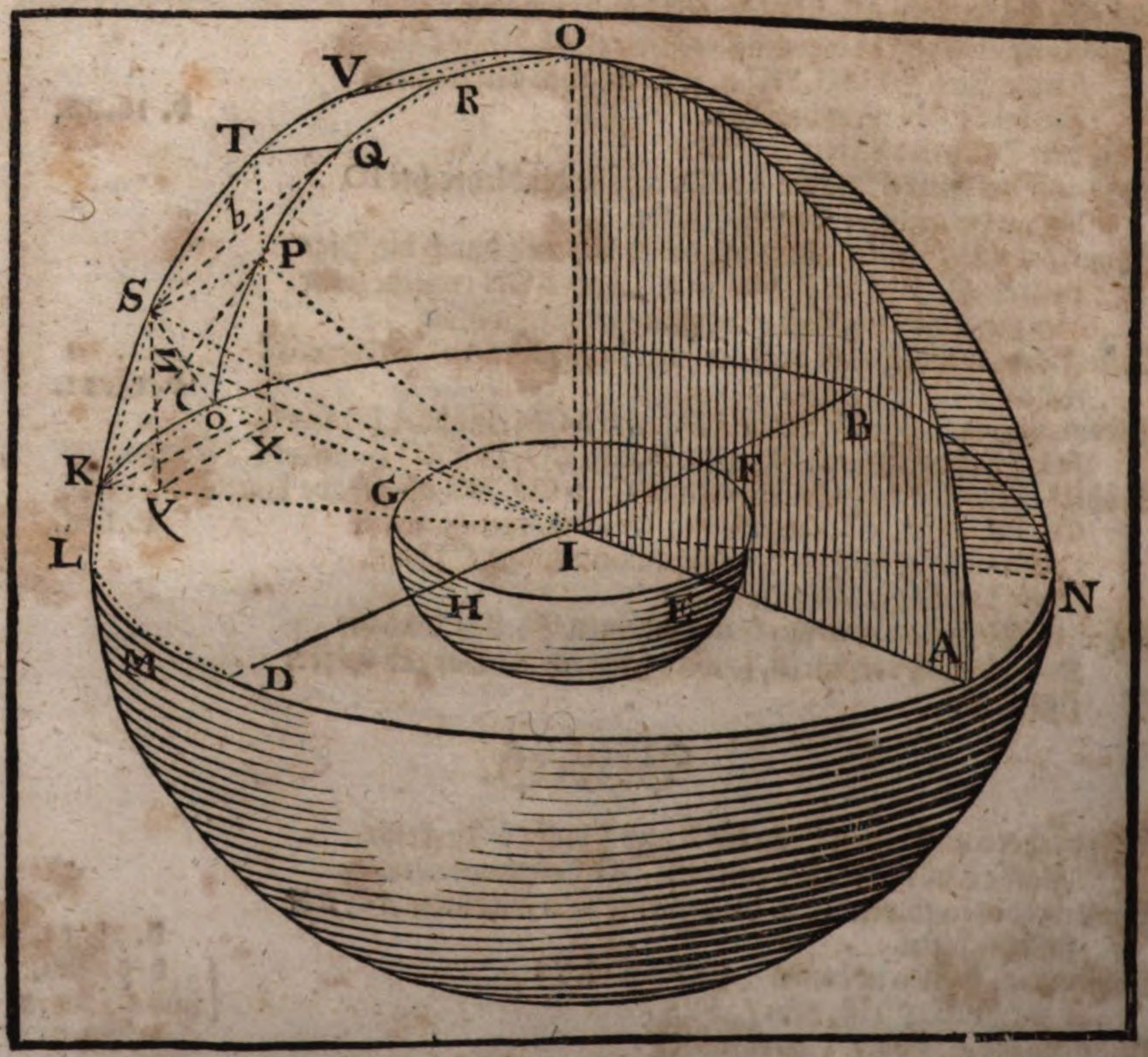
Handgriff.

Durchschneide beyde Kugeln mit einer Fläche, welche durch dero Mittel-Punct I gehe, und die zween Zirckeln ABCD und EFGH mache.

Ziehe die Diametern AC, BD bleyrecht auff einander.
Einschreibe alsdann in den grössern Zirckel ABCD das gleichseitige Viel-Eck CKLMD u. s. f. welches den kleinern Zirckel EFGH nicht berühre. d. 16. 12.
Ziehe den Diameter KIN.
Aus I auff der Zirckel-Fläche ABCD, erhöhe die bleyrechte IO biß an die grössere Kugels-Fläche.
Nunmehro bilde dir ein, als wann durch IO, und durch die Diametern AC, KN die Fläche AOC, und KON (welche zwar hier nur halb angedeutet worden) gezogen wären.
Diese Fläche werden auch auff der Zirckels-Fläche ABCD bleyrecht stehen. d. 18. 11.
Indeme nun die halben Zirckeln AOC und KOM einander ⊓ seint, so werden auch deren Viertels-Bögen CO, und KO einander ⊓ seyn.
Stöhle dahero in die gleiche Viertels-Bögen CO, KO die gerade Linien CP, PQ, QR, RO und KS, ST, TV, VG, welche denen CK, KL, LM, MD an der Anzahl und Länge ⊓ seint. d. I. 4.
Ziehe SP, TQ, VR zusammen.
Auff diese Weise kan man mit denen übrigen Theilen umb die Kugel herum verfahren, so wird hernach die Vorgab verfertiget seyn.

Beweiß.

Lasse vorhero auß denen Puncten P uud S auff die Zirckels-Fläche ABCD die bleyrechte PX, SY herunter fallen.
Diese werden nothwendig in die gemeine Durchschnitte AC, KN fallen müssen.
Nunmehro, weilen in denen △ CXP und KYS
der ∠ PXC ⊓ ist, dem ∠ SYK, d. 38. 11. / d. d. Zub. / und 10. ax. 1.
Und auch der ∠ PCX ⊓ ist, dem SKY, d. 27. 3.
(dann sie in gleichen Umbkreiß Stücke PC, SK stehen)
Letztlich die Seiten CP ⊓ ist, der Seiten KS. d. d. Hand.
So werden auch die zwo übrige Seiten PX und XC ⊓ seyn, denen zwo übrigen Seiten SY und YX. d. 26. 1.
Wann man dahero von denen gleichen IC, IK, die gleiche XC und YK abziehet,
So wird verbleiben IX ⊓, der IY. d. 3. ax. 1.
Deßwegen wird in dem △ CIK seyn IX, XC :: IY, YK d. 7. 5.
und folgends schliesset man, daß YX = seye, der KC. d. 2. 6.
Unterdessen, indeme PK ⊓ bewiesen worden ist, der SY. d. d. Vorg.
Und darzu beyde auff einer Fläche ABCD bleyrecht stehen,
So wird PX = seyn, der SY, d. 6. 11.
Und auch SP =, und ⊓ der YX. d. 33. 1.
Und wiederumb SP wird = seyn, der KC. d. 9. 11.
Nun folget auß diesem, daß die Vielseitige Figur KSPC d. 7. 11.
auff einer Fläche allein, und auff diese Art auch die übrige vierseitige Figuren TQPS, VRQT, und letztlich der △ ROV



ein jedes auff seiner besondern Fläche seye. d. 2. 11.

Und alsofort kan man leichtlich beweisen, daß die gantze Kugel ABCD mit dergleichen vier- und dreyseitigen Figuren, von denen eine jede auff seiner besondern Fläche lieget, umbschlossen seye, und dahero eine vielflächige Figur ist eingeschrieben worden.

Jetzund aber stehet zu beweisen, daß gedachte Fläche den Umbkreiß der kleinern Kugel auff keine Weise berühren.

Ziehe vorhero auß dem Mittel-Punct I. die Linie IZ, bleyrecht in die vierseitige Fläche KCPS. d. 11. 11.

Hernach hange ZP, ZC, ZS, ZK zusammen.

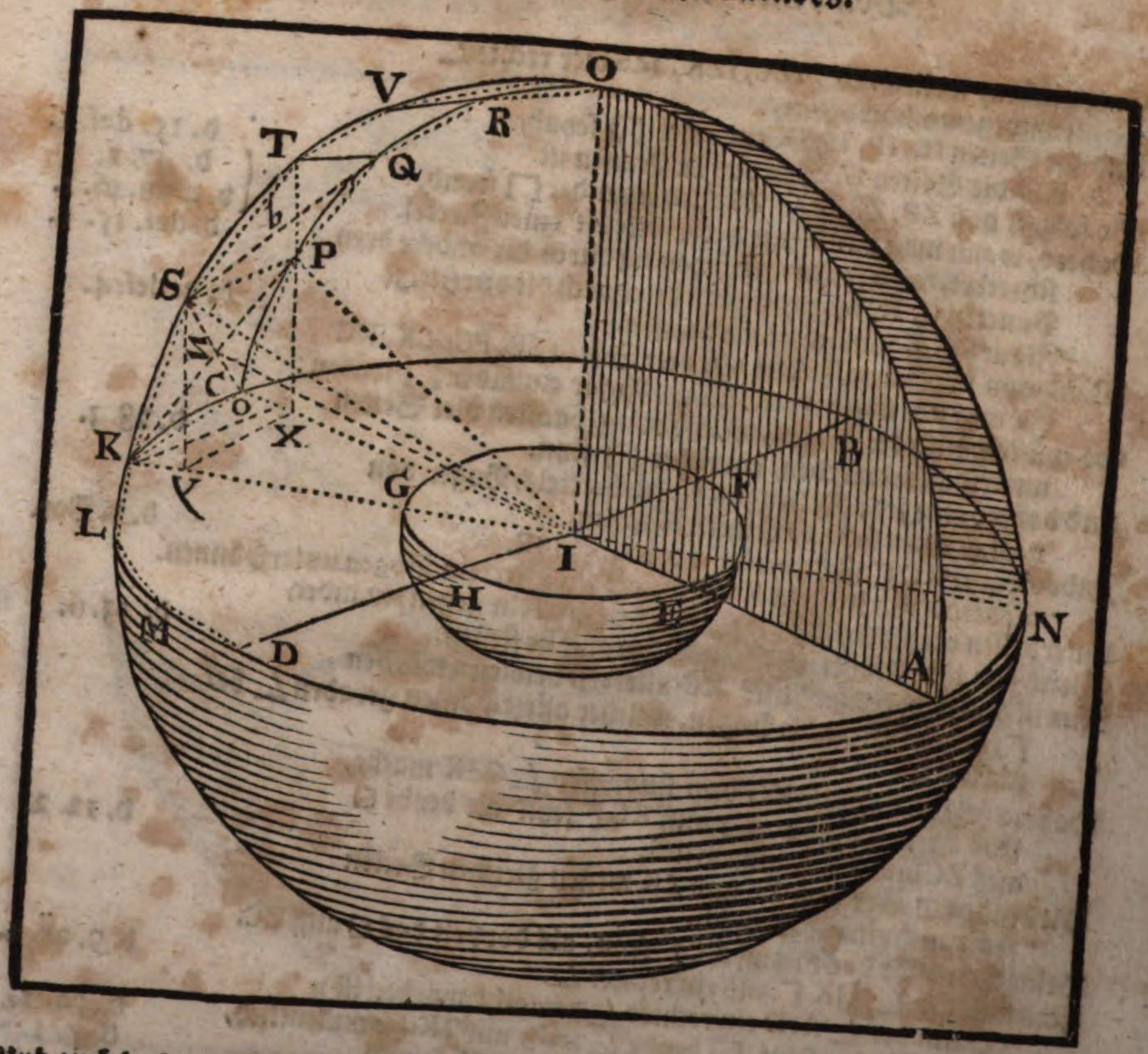
Letztlich ziehe auß K die Linie KO bleyrecht auff CA.

Diesem nach ist erstlich klar, daß sich verhalte IC, CK :: IX, XY. IC aber ist ⊏, als IX (nemlich das gantze ist ⊏ als sein Theil.) { d. 4. Cor. 2. 6. und d. Vor.

Dahero wird auch CK ⊏ seyn, als XY (oder die gleiche PS.) d. 14. 5.

Auff solche Weise ist SP ⊏, als TQ, und TQ ⊏, als VR.

Entzwischen, weilen IZP, IZC, IZK, IZS vier rechte ∠
seynd gemacht worden,
Und die Seiten IC, IP, IS, IK einander ⌐ seynd,
und die Seiten IZ allen vier △ gemein ist. d. 15. def. 1.
So folget, daß ZP, ZC, ZK, ZS auch einander ⌐ seynd. d. 47. 1.
Dahero, wann man auß Z mit der Weite ZP einen Zirckel v. 4. an. 46. 1.
schreibet, wird solcher nothwendig durch die andere drey d. def. 15. 1.
Puncten C, K, S, gehen, und hierdurch die vierseitige
Figur SPCK umbschreiben müssen. d. 3. def. 4.
Wann nun in solchem Zirckel alle vier Seiten SP, PC, CK, KG
der umbschriebenen vierseitigen Figur einander ⌐ wären:
So müsten auch die Bögen, welche von gedachten vier Seiten
unterspannet werden, einander ⌐ seyn. d. 28. 3.
Und dahero eine jede Seiten just einen Viertels-Bogen von
dem gantzen Umbkreiß unterspannen.
Indeme aber KC ⌐ ist bewiesen worden, als SP. d. d. Vor.
so wird dann dieselbe KC mehr als ein Viertels-Bogen unterspannen.
Unterdessen verhalten sich die ∠ in denen Zirckeln gegen einander,
Gleich wie ihre Umbkreiß-Stücke, darauff sie stehen. d. 33. 6.
Nun ist das Umbkreiß-Stück KC allererst bewiesen worden
⌐, als ein Viertels-Bogen, welcher allezeit einen geraden ∠ be-
schliesset.
Dahero folget, daß also KG dem stumpffen ∠ CZK mache,
Und darum wird das □ auff KC ⌐ seyn' als beyde □
auff ZC und ZK sammentlich. d. 12. 2.
Die beyden □ aber auff ZC und ZK wegen gleichen Seiten
seint auch einander gleich).
Deßwegen wird das □ auff KC ⌐ seyn, als doppelt das □ auff ZC.
Ferner ist der ∠ AIK ⌐, als ein rechter ∠. d. 9. ax. 1.
(Dann der ∠ AID ein rechter ∠ gemacht worden ist)
Diesem ∠ AIK aber seint ⌐ beyde ∠ IKC, und IKC sammentlich, d. 32. 1.
(welche sonsten unter sich selbst einander ⌐ seint). d. 5. 1.
Dahero wird die Helffte von beyden ∠, als wie der ∠ ICK ⌐
seyn, als ein halb rechter ∠.
Darumb wird in dem △ COK (massen der ∠ COI ein rechter d. d. Zus.
∠ ist, und der ∠ ICK ⌐, als ein halbrechter ∠) der dritte
∠ CKO nothwendig ⌐ seyn, als der ∠ ICK, d. 32. Cor. 1.
Und folgends die Linie Ko ⌐ seyn, als die Linie Co. d. 19. 1.
Dahero ist klar, daß das □ auff KC (welches sonsten ⌐ ist,
denen zwey □ auff Ko und Co) ⌐ seyn werde, als das □
auff der grössern Seiten Ko zweymahlen genommen.
Unterdessen ist schon bewiesen worden, daß dasselbe □ auff KC
⌐ seye, als das □ auff ZC zweymahlen genommen.
Dahero wird das □ auff Ko einmahlen genommen, auch
⌐ seyn, als das □ auff ZC, auch einmahleu genommen.
Diesem nach, weilen das □ auff IC ⌐ ist, denen zwey □ auff
IZ und ZC. d. 47. 1.



Und auch das □ auff IK ⌐ ist, denen zwey □ auff IO und KO.
wegen gleichen Seiten aber ist das □ auff IC ⌐, dem □ auff IK. d. 47. 1.
Dahero seynd auch die zwey □ auff IZ und ZC ⌐, denen zwey □ d. 15. def. 1.
auff Io und Ko.
Wann man nun beyderseits die zwey ungleiche □, nemlich das
kleinere □ auff ZC, und das grössere □ auff Ko von denen
gleichen □ auff IC und IK abziehet.
So ist klar, daß das übrige □ auff IZ ⌐ seyn werde, als das
übrige □ auff IO.
Und folgends wird auch die Linie IZ ⌐ seyn, als die Linie Io. d. 5. ax. 1.
Unterdessen ist der Punct o (das ist die Linie Ko) ausserhalb d. 4. an. 46. 1.
der Kugel EFGH, und kan dieselbe nicht berühren.
Folget, daß noch vielweniger die Fläche KSPC, worauff Z d. 16. Cor. 12.
der nechste Punct gegen den Mittel-Punct I ist, gedachte
kleinere Kugel EFGH berühren werde. u. s. f.
Eben auff diese Weise beweiset man, daß die Fläche STQP,
TVRQ, VOR die Kugel nicht EFGH berühren können, u. s. f.

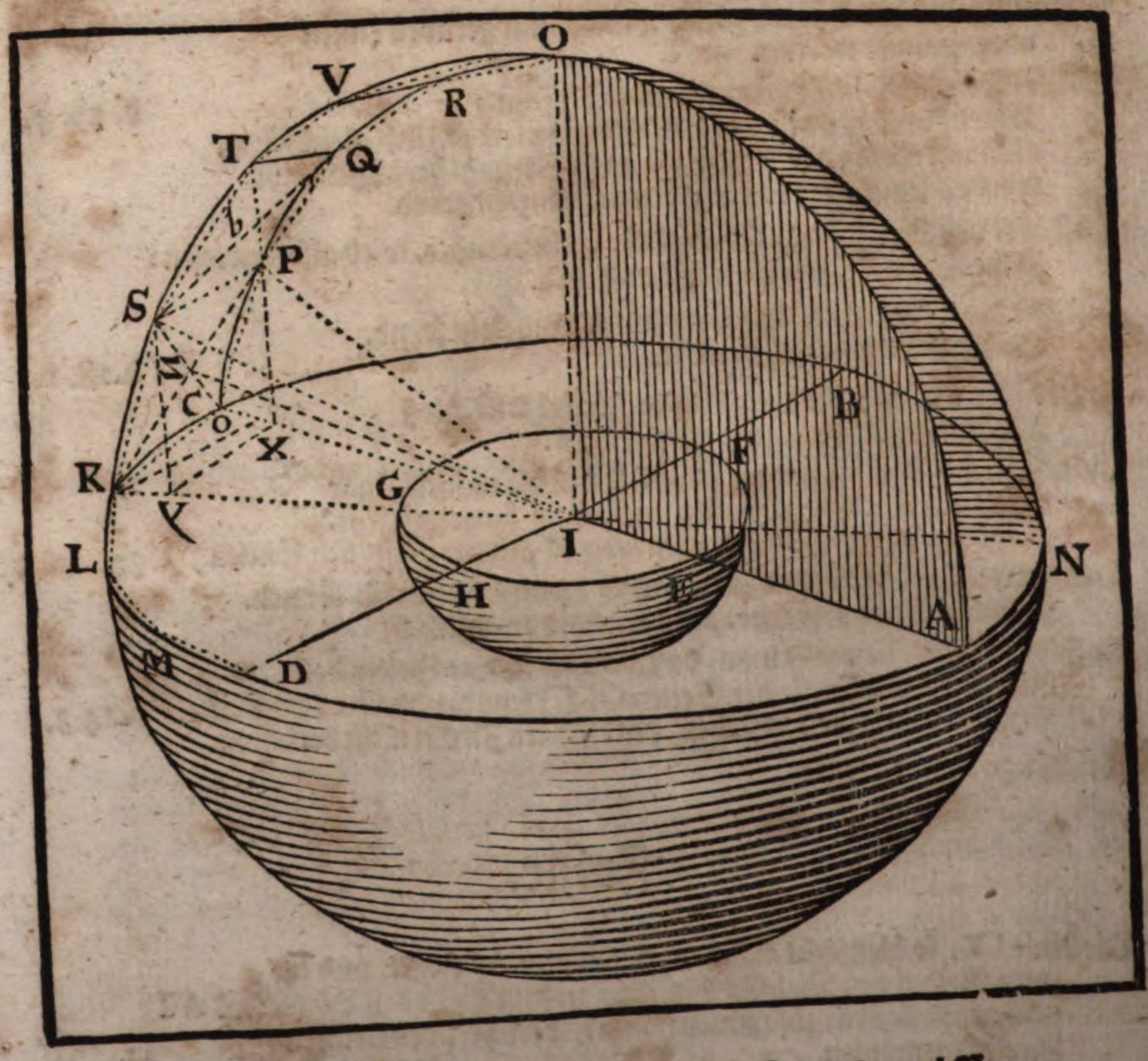
Dahero ist die vielflächige Figur ORV, TQPS, u. s. f. welche die kleinere Kugel nicht berühret, in die Kugel ABCD eingeschrieben worden.
Welches zu machen ware.

Folge

Wann in einer andern Kugel auch eine vielflächige Figur, gleichförmig der erst eingeschriebenen vielflächigen Figur, eingeschrieben wird: so wird sich eine vielflächige eingeschriebene Figur, zu der andern gleichförmig eingeschriebenen vielflächigen Figur in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der einen Diameter, zu dem Diameter der andern hat, verhalten.

Dann klar ist, wann beyde Kugeln umb einen Punct gestöhlt werden, (wie vorgehends geschehen ist) daß sie wegen einerley einfallenden geraden Linien, und gleicher Außtheilung, in gleichformige, und an der Anzahl gleichen Spitzsäule (als wie in der grösten Kugel die Spitzsäule KSPCI, dessen Basis KSPC und der Spitze I ist) abgetheilt werden.

Nun verhalten sich gleichförmige Spitzsäule gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten (nemlich deren halb-Diametern CI, GI d. Cor. 8. Vorg. 12): das ist, die grössere Spitzsäule KSPCI verhaltet sich gegen der kleinern gleichförmigen Spitzsäule in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der grössere halb-Diameter CI, zu dem kleinern halb-Diameter GI hat. u. s. f. Eine grössere Spitzsäule zu einer kleinern Spitzsäule, so viel deren in beyden Kugeln seynd; wie aber eine grössere Spitzsäule sich zu einer kleinern Spitzsäule verhaltet: also werden sich alle grössere Spitzsäule sammentlich in einer Kugel (das ist, die gantze grössere dichte vielflächige Figur) zu allen kleinern Spitzsäulen sammentlich in der andern Kugel (das ist, zu der gantzen kleinern dichten vielflächigen Figur) verhalten (d. 12. 5.) und dahero sich auch die grössere vielflächige Figur, zu der kleineren gleichförmig vielflächigen Figur in dreymahliger Verhaltnuß ihrer halb oder gantzen Diametern (d. 15. 5.) verhaltet.



Die XVII. Vorgab. Handgriff.

Es seynd zwo Kugeln gegeben, welche auß einem Mittel-Punct beschrieben seynd. Man verlanget in die grössere Kugel eine vielflächige Figur einzuschreiben, welche die Fläche der kleinern Kugel nirgends berühre.

Es seynd gegeben die zwo Kugeln ABCD, EFGH, welche aus einem Mittel-Punct I beschrieben seynd. Man begehrt in die grössere ABCD eine vielflächige Figur also einzuschreiben, daß sie auff keine Weise die Fläche der gegebenen kleinern Kugel berühre.

Mercke, die zwey Kugeln seynd allhier nur halb schattirter angezeigt.

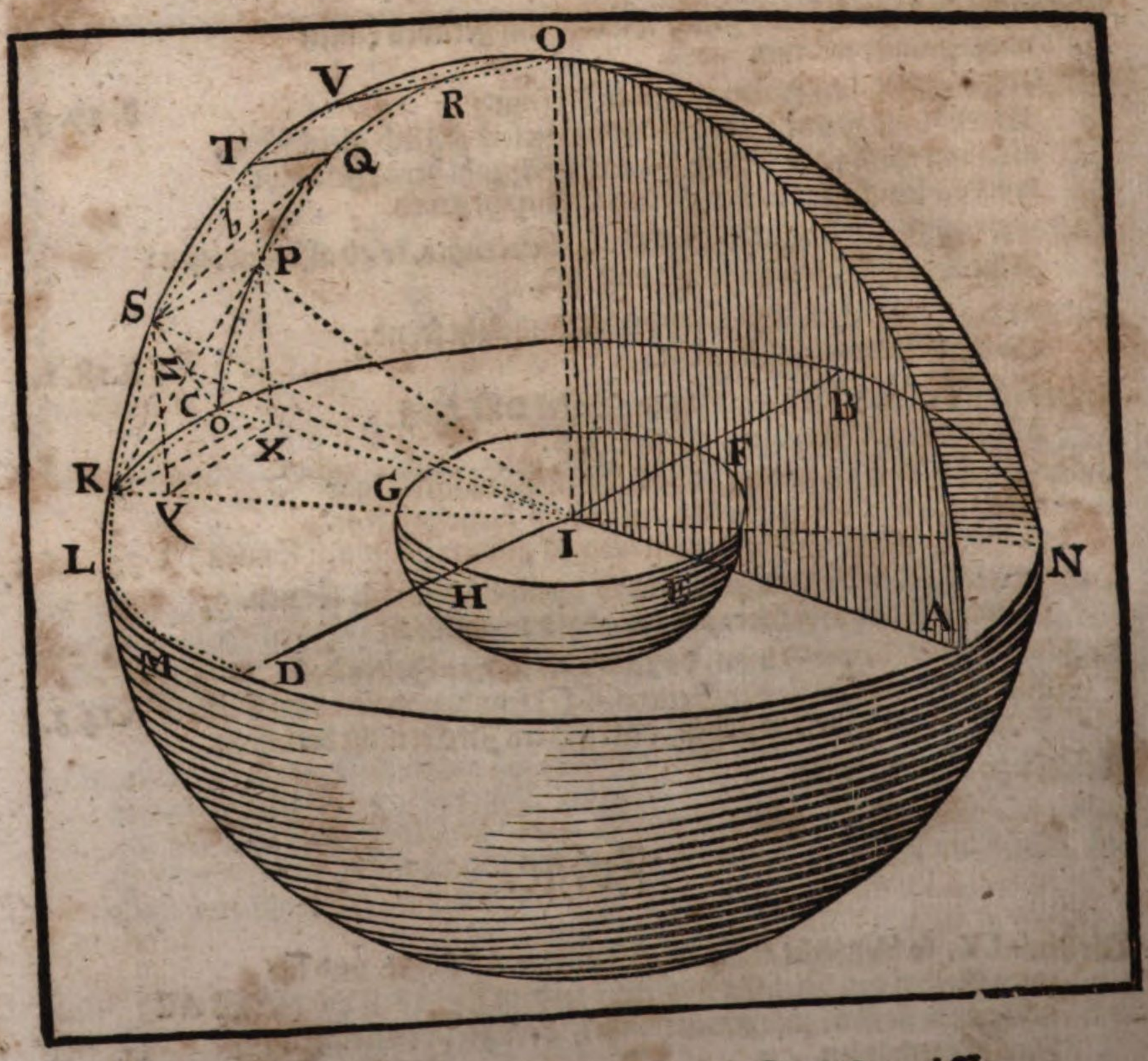
Handgriff.

Durchschneide beyde Kugeln mit einer Fläche, welche durch dero Mittel-Punct I gehe, und die zween Zirckeln ABCD und EFGH mache.

Ziehe die Diametern AC, BD bleyrecht auff einander.
Einschreibe alsdann in den grössern Zirckel ABCD das gleichseitige Viel-Eck CKLMD u. s. f. welches den kleinern Zirckel EFGH nicht berühre. d. 16. 12.
Ziehe den Diameter KIN.
Aus I auff der Zirckel-Fläche ABCD, erhöhe die bleyrechte IO biß an die grössere Kugels-Fläche.
Nunmehro bilde dir ein, als wann durch IO, und durch die Diametern AC, KN die Fläche AOC, und KON (welche zwar hier nur halb angedeutet worden) gezogen wären.
Diese Fläche werden auch auff der Zirckels-Fläche ABCD bleyrecht stehen. d. 18. 11.
Indeme nun die halben Zirckeln AOC und KOM einander ⊓ seint, so werden auch deren Viertels-Bögen CO, und KO einander ⊓ seyn.
Stöhle dahero in die gleiche Viertels-Bögen CO, KO die gerade Linien CP, PQ, QR, RO und KS, ST, TV, VG, welche denen CK, KL, LM, MD an der Anzahl und Länge ⊓ seint. d. I. 4.
Ziehe SP, TQ, VR zusammen.
Auff diese Weise kan man mit denen übrigen Theilen umb die Kugel herum verfahren, so wird hernach die Vorgab verfertiget seyn.

Beweiß.

Lasse vorhero auß denen Puncten P uud S auff die Zirckels-Fläche ABCD die bleyrechte PX, SY herunter fallen.
Diese werden nothwendig in die gemeine Durchschnitte AC, KN fallen müssen. d. 38. 11.
Nunmehro, weilen in denen △ CXP und KYS der ∠ PXC ⊓ ist, dem ∠ SYK, d. d. Zub. und 10. ax. I.
Und auch der ∠ PCX ⊓ ist, dem SKY, d. 27. 3.
(dann sie in gleichen Umbkreiß Stücke PC, SK stehen) d. d. Hand.
Letztlich die Seiten CP ⊓ ist, der Seiten KS.
So werden auch die zwo übrige Seiten PX und XC ⊓ seyn, denen zwo übrigen Seiten SY und YX. d. 26. I.
Wann man dahero von denen gleichen IC, IK, die gleiche XC und YK abziehet,
So wird verbleiben IX ⊓, der IY. d. 3. ax. I.
Deßwegen wird in dem △ CIK seyn IX, XC :: IY, YK d. 7. 5.
und folgends schliesset man, daß YX = seye, der KC. d. 2. 6.
Unterdessen, indeme PK ⊓ bewiesen worden ist, der SY. d. d. Vorg.
Und darzu beyde auff einer Fläche ABCD bleyrecht stehen,
So wird PX = seyn, der SY, d. 6. 11.
Und auch SP =, und ⊓ der YX. d. 33. I.
Und wiederumb SP wird = seyn, der KC. d. 9. 11.
Nun folget auß diesem, daß die Vielseitige Figur KSPC auff einer Fläche allein, und auff diese Art auch die übrige vierseitige Figuren TQPS, VRQT, und letztlich der △ ROV d. 7. 11.



Die XVII. Vorgab. Handgriff.

Es seynd zwo Kugeln gegeben, welche auß einem Mittel-Punct beschrieben seynd. Man verlanget in die grössere Kugel eine vielflächige Figur einzuschreiben, welche die Fläche der kleinern Kugel nirgends berühre.

Es seynd gegeben die zwo Kugeln ABCD, EFGH, welche aus einem Mittel-Punct I beschrieben seynd. Man begehrt in die grössere ABCD eine vielflächige Figur also einzuschreiben, daß sie auff keine Weise die Fläche der gegebenen kleinern Kugel berühre.

Mercke, die zwey Kugeln seynd allhier nur halb schattirter angezeigt.

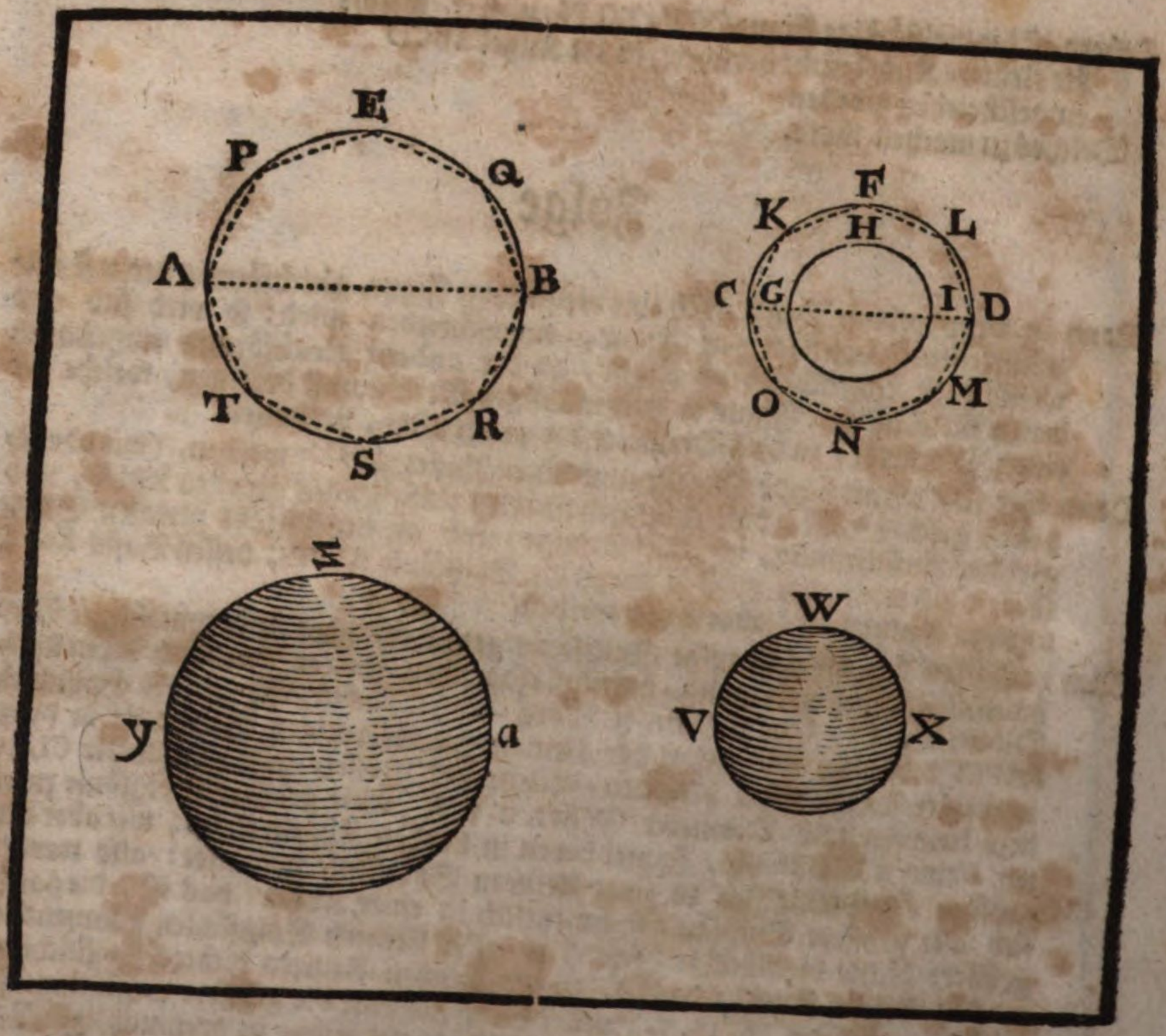
Handgriff.

Durchschneide beyde Kugeln mit einer Fläche, welche durch dero Mittel-Punct I gehe, und die zween Zirckeln ABCD und EFGH mache.

Ziehe die Diametern AC, BD bleyrecht auff einander.
Einschreibe alsdann in den grössern Zirckel ABCD das gleich-
seitige Viel-Eck CKLMD u. s. f. welches den kleinern
Zirckel EFGH nicht berühre. d. 16. 12.
Ziehe den Diameter KIN.
Aus I auff der Zirckel-Fläche ABCD, erhöhe die bleyrechte IO
biß an die grössere Kugels-Fläche.
Nunmehro bilde dir ein, als wann durch IO, und durch die Dia-
metern AC, KN die Fläche AOC, und KON (welche zwar
hier nur halb angedeutet worden) gezogen wären.
Diese Fläche werden auch auff der Zirckels-Fläche ABCD bleyrecht
stehen. d. 18. 11.
Indeme nun die halben Zirckeln AOC und KOM einander ⊓ seint,
so werden auch deren Viertels-Bögen CO, und KO einander ⊓ seyn.
Stöhle dahero in die gleiche Viertels-Bögen CO, KO die gerade Linien
CP, PQ, QR, RO und KS, ST, TV, VG, welche denen d. I. 4.
CK, KL, LM, MD an der Anzahl und Länge ⊓ seint.
Ziehe SP, TQ, VR zusammen.
Auff diese Weise kan man mit denen übrigen Theilen umb die
Kugel herum verfahren, so wird hernach die Vorgab verfer-
tiget seyn.

Beweiß.

Lasse vorhero auß denen Puncten P uud S auff die Zirckels-
Fläche ABCD die bleyrechte PX, SY herunter fallen.
Diese werden nothwendig in die gemeine Durchschnitte AC, KN
fallen müssen. d. 38. 11.
Nunmehro, weilen in denen △ CXP und KYS
der ∠ PXC ⊓ ist, dem ∠ SYK, } d. d. Zub. und 10. ax. I.
Und auch der ∠ PCX ⊓ ist, dem SKY, d. 27. 3.
(dann sie in gleichen Umbkreiß Stücke PC, SK stehen)
Letztlich die Seiten CP ⊓ ist, der Seiten KS. d. d. Hand.
So werden auch die zwo übrige Seiten PX und XC ⊓ seyn,
denen zwo übrigen Seiten SY und YX. d. 26. I.
Wann man dahero von denen gleichen IC, IK, die gleiche
XC und YK abziehet,
So wird verbleiben IX ⊓, der IY. d. 3. ax. I.
Deßwegen wird in dem △ CIK seyn IX, XC :: IY, YK d. 7. 5.
und folgends schliesset man, daß YX = seye, der KC. d. 2. 6.
Unterdessen, indeme PK ⊓ bewiesen worden ist, der SY. d. d. Vorg.
Und darzu beyde auff einer Fläche ABCD bleyrecht stehen,
So wird PX = seyn, der SY, d. 6. 11.
Und auch SP =, und ⊓ der YX. d. 33. I.
Und wiederumb SP wird = seyn, der KC. d. 9. 11.
Nun folget auß diesem, daß die Vielseitige Figur KSPC d. 7. 11.
auff einer Fläche allein, und auff diese Art auch die übrige
vierseitige Figuren TQPS, VRQT, und letztlich der △ ROV



Die XVIII. Vorgab. Betrachtung.

Die Kugeln verhalten sich gege einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern.

Es seynd gegeben die zwo Kugeln AEB, CFD und ihrer Diametern AB, CD. Diesem nach sagt man, daß sich die Kugel AEB, zu der Kugel CFD in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalte.

Beweiß.

Gesetzt, man gestehe es nicht: so wird dannoch die Kugel AEB sich zu einer andern Kugel, gleich wie zu GHI (welche ⅂ ist, als die Kugel CFD), oder zu YZa (welche Γ ist, als CFD) in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalten können.

Zulasse man anfänglich, daß die Kugel AEB sich zu der Kugel GHI, (welche ⅂ seye, als die Kugel CFD) in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalte.

Nunmehro bilde dir ein, daß die zwey Kugeln GHI und CFD aus einem Mittel-Punct gezogen seynd.

Alsdann einschreibe in die grössere CFD die vielflächige Figur CKFLDMNO, welche die kleinere Kugel GHI nicht berühre. d. 17. 12.

Letztlich in die Kugel AEB einschreibe die vielflächige Figur APE QBRST gleichförmig, der vielflächigen Figur CKFLDMNO.

Diesem nach ist klar, daß die gleichförmige eingeschriebene vielflächige Figur APEQBRST in der Kugel AEB, sich zu der eingeschriebenen vielflächigen Figur in der Kugel CFD in dreymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern AB, CD, verhalte. d. 17. Cor. 12.

Es ist aber zugelassen worden, daß auch die Kugel AEB sich zu der Kugel GHI in dreymahliger Verhaltnuß, deren Diameteru AB, CD, verhalte:

Dahero wird sich die Kugel AEB, zu der Kugel GHI verhalten: gleich wie die dichte vielflächige Figur APEQBRST, zu der dichten vielflächigen Figur CKFLDMNO.

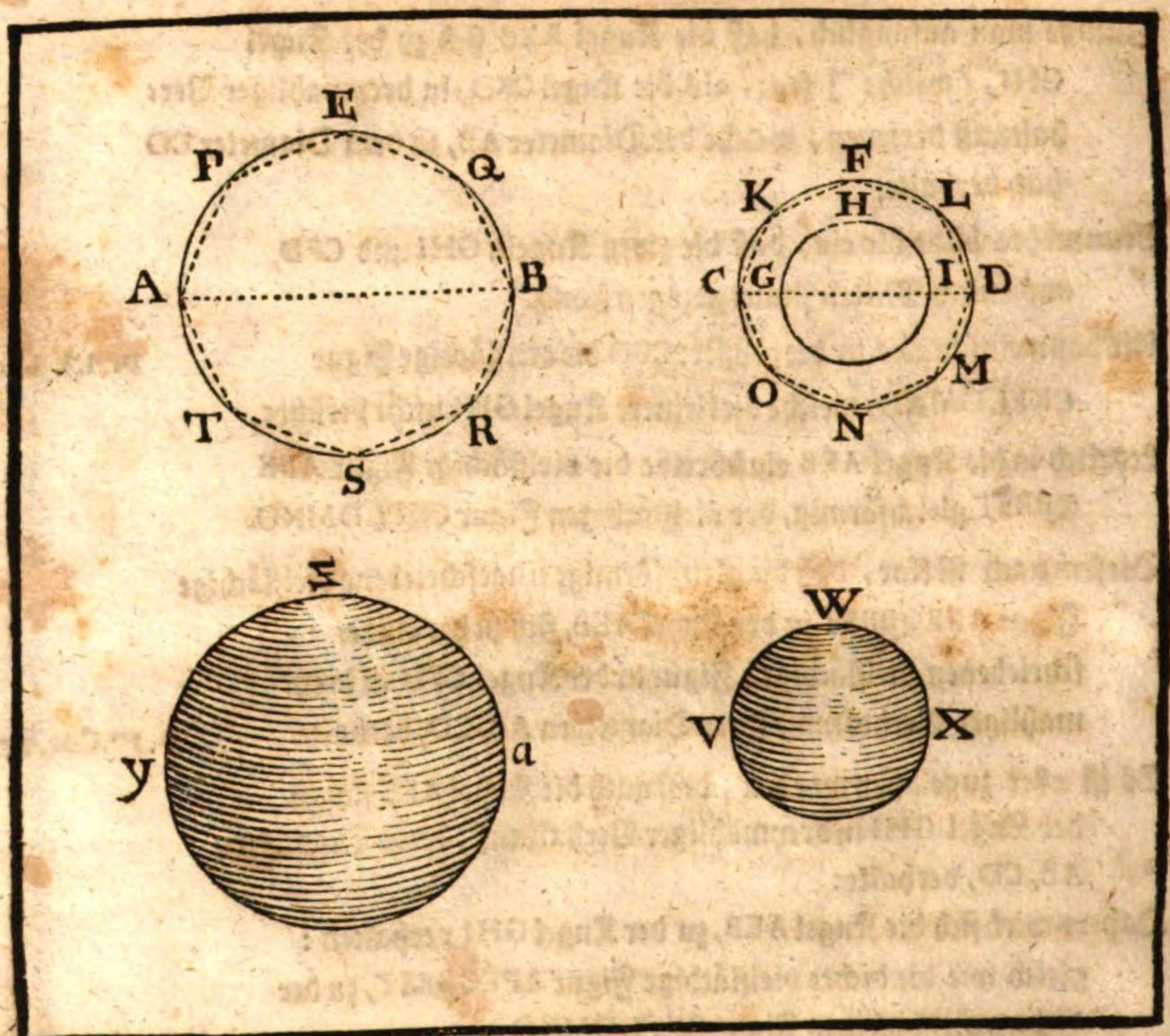
Und durch die Verwexlung, wird sich die Kugel AEB zu der dichten vielflächigen Figur APEQBRST verhalten: gleichwie die Kugel GHI, zu der dichten vielflächigen Figur CKLDMNO.

Unterdessen ist die Kugel AEB ⌜, als die dichte vielflächige Figur APEQBRST, (nemlich das gantze ist ⌜, als sein Theil).

Folget, daß auch die Kugel GHI ⌜ seye, als die dichte vielflächige Figur CKFLDMNO (der Theil ⌜ als sein gantzes)

So ungereimt ist.

Dahero schliesset man, daß die Kugel AEB sich nicht zu einer andern Kugel, welche ⅂ ist, als die Kugel CFD, in dreymahliger Verhaltnuß deren Diametern AB zu DC verhalte.



Seye zum andern mal zugelassen, daß sich die Kugel AEB zu der Kugel YZa (welche Γ seye, als die Kugel CFD) in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, so der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalte.

Weilen dann die vielflächige Figur APEQBRST sich zu der gleichförmigen vielflächigen Figur CKFLDMNO in dreymahliger Verhaltnuß deren Diametern AB, CD, verhaltet: d.17.Cor.12.

So wird sich auch die Kugel AEB zu der Kugel YZa verhalten: gleichswie die vielflächige Figur APEQBRST, zu der vielflächigen Figur CKFLDMNO.

Und durch die Verwexlung wird sich die Kugel YZa zu der Kugel AEB verhalten: als wie CKFLDMNO, zu APEQBRST.

Es verhaltet sich aber CKFLDMNO, zu APEQBRST in dreymahliger Verhaltnuß deren Diametern, nemlich CD, zu AB. 6.7. Cor. 12.

Dahero wird sich auch die Kugel YZa, zu der Kugel AEB in dreymahliger Verhaltnuß deren Diametern CD, zu AB, verhalten.

Unterdessen setze man, daß, wie sich die Kugel YZa zu der Kugel AEB verhalte: also seye die Kugel CFD, zu einer andern Kugel, gleich wie zu VWX.

So wird die Kugel CFD sich auch zu der Kugel VWX in dreymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern CD, AB verhalten müssen.

Nun ist die Kugel YZa ⌜ gesetzt worden, als die Kugel CFD. Dahero folget, daß auch die Kugel AEB ⌜ seye, als VWX.

Und deßwegen wird sich die Kugel CFD, zu der Kugel VWX (welche dann ⌝ ist, als die Kugel AEB) in dreymahliger Verhaltnuß deren Diametern CD zu AB verhalten müssen. Welches aber ungereimt ist. Dann erst vorgehends bewiesen worden ist, daß eine Kugel zu einer Kugel, welche ⌝ ist als die andere CFD, nicht in dreymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern, sich verhalten könne.

Dahero wird noch unfehlbar die Kugel AEB sich zu der Kugel CFD in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB zu dem Diameter CD hat, verhalten müssen.

Welches zu beweisen ware.

Folge.

Es verhaltet sich eine Kugel zu der andern, als wie die erst eingeschriebene vielflächige Figur, zu der andern gleichförmig eingeschriebenen vielflächigen Figur.

GOTT allein die Ehre.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euclides,

Teutsch-Redender Euclides. Oder: Acht Bücher, Von denen Anfängen Der Meß-Kunst, Auf eine neue und gantz leichte Art, Zum Nutzen Allen Generalen, Ingeniern, Natur- und Warheit-Kündigern, Bau-Meistern, Künstlern [et]c

Wien in Oesterreich 1744

4 Math.p. 39 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053301-0
VD18 10243828